Série 8

1. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.

a) On fixe $\varepsilon = \frac{1}{10}$; déterminer M tel que $x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 2| < \varepsilon$.

b) A l'aide de la définition de la limite d'une fonction, montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$.

2. Calculer la limite des fonctions suivantes lorsque x tend vers $+\infty$.

a) $a(x) = \dfrac{(2x+1)^2(3x-1)\,(25x^2-1)}{60x^5 - x^3 - 6x + 8}$

b) $b(x) = \dfrac{|x|\,\sqrt{x + x^{-1}}}{\sqrt[3]{x^4 - 1}}$

c) $c(x) = \dfrac{\cos x\,\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^2+1}}$

d) $d(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3 + \sin x}}$

e) $e(x) = \dfrac{(x^2+1)\,(\sin x - 2)}{2x+1}$

f) $f(x) = \sqrt{x\,(x+1)} - x$.

3. Etudier la convergence de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{(x+1)\,\sin x}{2x+1}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Justifier rigoureusement votre réponse.

4. Calculer la limite des fonctions suivantes lorsque x tend vers $-\infty$.

a) $a(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{x^3 - 2}}$

b) $b(x) = \left(\sqrt{x^2+1} + 2x\right)(3 - \cos^2 x)$

c) $c(x) = x^2\left(\sqrt[3]{8x^3 - 1} - 2x\right)$

d) $d(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2 - x}$.

5. Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$. Déterminer p et q réels tels que

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^2 + ax + b} - (px + q)\right] = 0\,.$$

6. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. Calculer, si elle existe, la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \tfrac{a}{x} \cdot E\left(\tfrac{x}{b}\right)$.

7. Exercice facultatif.

Démontrer le résultat suivant :

Soit f une fonction à valeurs réelles strictement positives.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Réponses de la série 8

1. a) $M \geq 21$.

b) $\forall\, \varepsilon > 0, \quad x > M(\varepsilon) \geq 1 + \dfrac{2}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \left|\dfrac{2x}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$.

2. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = 5$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} b(x) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} c(x) = 0$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} d(x) = 1$.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} e(x) = -\infty$.

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

3. $f(x)$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.
On le démontre en définissant deux suites (a_n) et (b_n) qui divergent vers $+\infty$ et telles que $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$.

4. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} a(x) = 2$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} b(x) = -\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} c(x) = -\dfrac{1}{12}$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} d(x) = -\dfrac{1}{2}$.

5. $p = -1$ et $q = -\dfrac{a}{2}$.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a}{x} \cdot E\left(\frac{x}{b}\right) = \dfrac{a}{b}$
