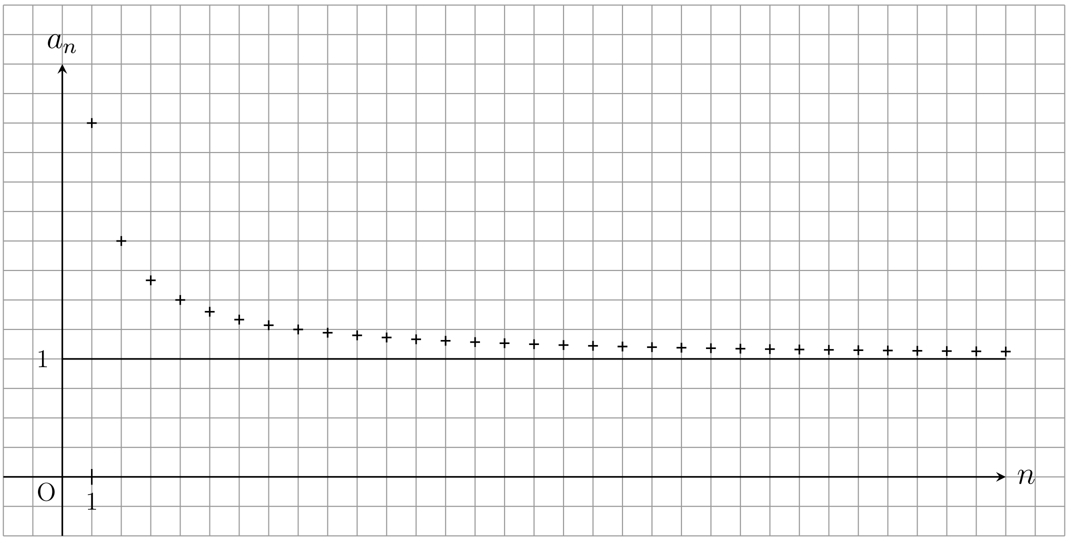
Série 5

1. Voici la représentation de la suite définie par $a_n = \dfrac{n+2}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.



a) Soit $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon$.

Déterminer graphiquement $N(\varepsilon)$ dans les trois cas suivants :

i) $\varepsilon = \frac{1}{2}$, ii) $\varepsilon = \frac{1}{4}$, iii) $\varepsilon = \frac{1}{8}$.

b) Démontrer à l'aide de la définition de la limite d'une suite que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

2. On considère la suite (a_n) définie par son terme général $a_n = \sqrt{1+\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que (a_n) converge vers $a = 1$.

3. Montrer que les suites ci-dessous sont majorées en exhibant un majorant.

a) $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $b_n = \frac{n^2+n}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) $c_n = \frac{n+3}{n^2+1} + \frac{n+4}{n^2+1} + \cdots + \frac{2n+2}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Indication : combien y a-t-il de termes dans la somme ?

d) $d_n = \frac{n+3}{n^2+1} + \frac{n+4}{n^2+2} + \cdots + \frac{2n+2}{n^2+n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Déterminer le terme général des suites dont on donne les premiers termes.

a) (a_n) : $4, \dfrac{7}{3}, 2, \dfrac{13}{7}, \dfrac{16}{9}, \dfrac{19}{11}, \dfrac{22}{13}, \ldots$

b) (b_n) : $\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{7}{10}, \dfrac{10}{17}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{16}{37}, \dfrac{19}{50}, \ldots$

c) $(c_n):\ \dfrac{2}{3}\,,\ 0\,,\ \dfrac{4}{15}\,,\ 0\,,\ \dfrac{6}{35}\,,\ 0\,,\ \dfrac{8}{63}\,,\ 0\,,\ \dfrac{10}{99}\,,\ \cdots$

d) $(d_n):\ 5\,,\ \dfrac{5}{3}\,,\ \dfrac{5}{7}\,,\ \dfrac{1}{3}\,,\ \dfrac{5}{31}\,,\ \dfrac{5}{63}\,,\ \dfrac{5}{127}\,,\ \dfrac{1}{51}\,,\ \dfrac{5}{511}\,,\ \cdots$

5. a) Soit $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$. On considère la suite

$$1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, \dots$$

Soit (A_n) définie par

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} r^k,$$

c'est-à-dire, A_n est la somme des premiers n termes de la suite ci-dessus. Montrer par récurrence que

$$A_n = \frac{1-r^n}{1-r}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

b) On considère la suite $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$ d'entiers naturels impairs. Soit A_n la somme des premiers n termes de cette suite. Montrer par récurrence que

$$A_n = n^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

6. On considère la suite (a_n) définie par récurrence de la façon suivante :

$$a_{n+1} \;=\; 3 - \frac{2}{a_n}\,, \qquad a_1 = 3\,, \qquad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Déterminer le terme général de la suite (a_n), puis démontrer ce résultat par récurrence.

7. a) Donner un exemple de suites (a_n) et (b_n) telles que la somme $(a_n + b_n)$ est une suite constante, mais pour lesquelles (a_n) et (b_n) ne sont pas constantes.

b) Montrer que si (a_n) et (b_n) sont bornées, alors la suite $(a_n \cdot b_n)$ est bornée.

c) Donner un exemple de suites (a_n) et (b_n) telles que $(a_n \cdot b_n)$ est bornée, mais pour lesquelles ni la suite (a_n) est bornée ni la suite (b_n) est bornée.

d) Donner un exemple de suites (a_n) et (b_n) telles que (a_n) est strictement croissante,(b_n) est strictement décroissante et $a_1 < b_1$, mais telles qu'il n'existe aucun $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $b_n < a_n$.

8. Soient (a_n) une suite et $l \in \mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes, déterminer lesquelles sont équivalentes à

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l.$$

Quand ce n'est pas le cas, s'en convaincre en exhibant un contre-exemple.

a) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*,$ tel que $n \geq N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |a_n - l| < \varepsilon.$

b) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*,$ tel que $n \geq N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |a_n - l| \leq \varepsilon.$

c) $\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*,$ tel que $n \geq N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |a_n - l| < \varepsilon.$
d) $\exists N \in \mathbb{N}^*,$ tel que $\forall \varepsilon > 0,\ n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - l| < \varepsilon.$
e) $\forall N \in \mathbb{N}^*, \exists \varepsilon > 0$ tel que $n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - l| < \varepsilon.$

9. Exercice facultatif
[Voir l'Exemple 2 du `Chapitre_2_sec_1_suites_introduction.pdf` des slides du cours sur Moodle pour la définition de fraction continue, ainsi qu'un exemple.]
Déterminer une fraction continue qui décrit $\sqrt{5}$. Calculer les premiers termes de la suite associée à cette fraction continue. Puis définir cette suite par récurrence.

Réponses de la série 5

1. Si $N > \dfrac{2}{\varepsilon}$, alors $n \geq N \quad \Rightarrow \quad |\, a_n - 1 \,| < \varepsilon$

2. Si $N > \dfrac{1}{2\,\varepsilon + \varepsilon^2}$, alors $n \geq N \quad \Rightarrow \quad |\, a_n - 1 \,| < \varepsilon$

3. a) Par exemple $M = 1$.
b) Par exemple $M = 2$.
c) Par exemple $M = 4$.
d) Par exemple $M = 4$.

4. a) $a_n = \dfrac{3n+1}{2n-1}, n \in \mathbb{N}^*$
b) $b_n = \dfrac{3n-2}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}^*$
c) $c_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2} \cdot \dfrac{n+1}{n^2+2n}, n \in \mathbb{N}^*$
d) $d_n = \dfrac{5}{2^n-1}, n \in \mathbb{N}^*$

7. a) Par exemple $a_n = (-1)^n$ et $b_n = (-1)^{n+1}, n \in \mathbb{N}^*$.
c) Par exemple $a_n = 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, ...$ et $b_n : 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, ...$
d) Par exemple $a_n = 1 - \frac{1}{n}, b_n = 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

8. a) C'est la définition du cours.
b) La proposition est équivalente.
c) La proposition n'est pas équivalente.
d) La proposition n'est pas équivalente.
e) La proposition n'est pas équivalente.
