

Série 4

1. On considère l'équation : $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + 2m - 1 = 0$.

Pour quelles valeurs de m cette équation admet-elle deux racines x_1 et x_2 vérifiant la relation : $-6 < x_1 < 4 < x_2$?

2. On donne le trinôme $P(x) = (m - 2)x^2 - 4mx + 5m - 1$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer m pour que la courbe d'équation $y = P(x)$ soit entièrement contenue dans le demi-plan défini par : $y < -6x + 5$.

b) Déterminer l'équation de la parabole définie par $y = P(x)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

i) la parabole est tangente à la droite d'équation $y = -6x + 5$,

ii) $P(x)$ admet un minimum.

Calculer alors la valeur de x pour laquelle $P(x)$ est minimum.

3. Résoudre dans \mathbb{R} les équations irrationnelles suivantes :

$$\text{a) } \sqrt{-x^2 - x + 6} = -(x + 1), \quad \text{b) } \frac{x - 2(1 + \sqrt{x - 1})}{2x - \sqrt{x - 1} - 5} = 1.$$

4. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

$$\text{a) } x - 3 > \sqrt{x^2 + 3x}, \quad \text{b) } \sqrt{\frac{x^2(2x - 5)}{2(x + 1)}} \geq 2 - x.$$

Quelques exercices supplémentaires sur les trinômes du second degré :

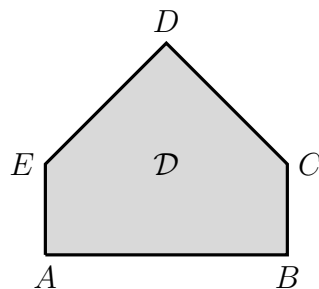
5. On considère l'équation : $x^2 + (m - 2)x - (m + 3) = 0$.

Déterminer m pour que la somme des carrés des racines soit égale à 9.

Indication : utiliser les formules de Viète pour exprimer la somme des carrés des racines.

6. On considère le domaine \mathcal{D} ci-contre.

- On note a la longueur du côté AB .
- On note b la longueur du côté BC .
- $ABCE$ est un rectangle.
- ECD est un triangle isocèle rectangle en D .
- Le périmètre L du domaine \mathcal{D} est fixé et vaut 10.



Le but est de trouver a et b pour que l'aire de \mathcal{D} soit maximale, avec la contrainte que le périmètre est fixé constant à la valeur 10. (NB. On appelle ce genre de problème des problèmes d'optimisation sous contraintes.)

- a) Exprimer la longueur b en fonction du périmètre et de a .
- b) Déterminer l'ensemble des valeurs admissibles pour a , c'est-à-dire l'ensemble des valeurs possibles de a pour qu'un tel domaine soit constructible.
Indication : utiliser que $a > 0$, $b > 0$ et l'expression de b trouvée au point précédent.
- c) Déterminer l'aire \mathcal{A} du domaine \mathcal{D} en fonction de a .
- d) Déterminer la valeur de a pour que l'aire soit maximale.
- e) Vérifier que la valeur de a trouvée au point précédent est bien contenue dans l'ensemble des valeurs admissibles.

Quelques exercices supplémentaires sur les puissances et les racines :

7. Simplifier les expressions suivantes où p et q sont des nombres réels strictement positifs.

a) $A = [-p(-p^{-2})^m]^{-2m}$, $m \in \mathbb{Z}$.

b) $B = 9 \sqrt[3]{2p^6q} + 3 \sqrt[3]{-16p^3q} + \sqrt[3]{2q}$.

8. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Dans les cinq cas suivants, déterminer si les deux expressions données sont égales. Justifier rigoureusement votre réponse.

a) $A(x) = \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + x + 1}$ et $a(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$,

b) $B(x) = \operatorname{sgn}(x) \sqrt{x^6 + 1}$ et $b(x) = x^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^6}}$,

c) $C(x) = \sqrt[3]{x^4 + x^3}$ et $c(x) = x \sqrt[3]{x + 1}$,

d) $D(x) = \sqrt{x^6}$ et $d(x) = x^2|x|$,

e) $E(x) = \sqrt[4]{x^2}$ et $e(x) = \sqrt{x}$.

9. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante par rapport à la variable x en fonction du paramètre m :

$$\sqrt{2(x^2 + 1)} = x - m, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Expliciter l'ensemble solution pour chaque valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

10. Exercice facultatif

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante par rapport à la variable x en fonction du paramètre m :

$$\sqrt{|x^2 - 5m^2|} \leq x - m, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Expliciter l'ensemble solution pour chaque valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Réponses de la série 4

1. $m \in]1, \frac{5}{2}[$.
 2. a) $m \in]-\infty, 1[$.
b) $y = x^2 - 12x + 14; \quad x_{\min} = 6$.
 3. a) $S = \{-\frac{5}{2}\}$.
b) $S = \{2\}$.
 4. a) $S = \emptyset$.
b) $S = [-2\sqrt{2}; -1[\cup [\frac{5}{2}; +\infty[$.
 5. $m = 1$.
 6. a) $b = \frac{10 - (\sqrt{2} + 1)a}{2}$.
b) $]0, \frac{10}{1 + \sqrt{2}}[$.
d) $a_{\max} = \frac{10}{1 + 2\sqrt{2}}$.
 7. a) $A = p^{2m(2m-1)}$.
b) $B = (3p - 1)^2 (2q)^{1/3}$.
 9.
 - si $m \in]-\infty, -1]$, alors $S = \left\{-m - \sqrt{2(m^2 - 1)}, -m + \sqrt{2(m^2 - 1)}\right\}$,
 - si $m \in]-1, +\infty[$, alors $S = \emptyset$.
 10.
 - Si $m < 0$, alors $S = [-m, +\infty[$.
 - Si $m = 0$, alors $S = \mathbb{R}_+$.
 - Si $m > 0$, alors $S = [2m, 3m]$.
-