Série 3

1. On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{1}{2}\,x - 2$ et $g(x) = -3\,x - \frac{11}{2}$.

a) Dans un repère orthonormé (unité = 2 carrés), représenter le graphe de f et de g, puis en déduire celui de $|f|$.

Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $|f(x)| = g(x)$.

b) Interpréter graphiquement, sur l'exemple ci-dessus, l'équivalence suivante

$$|\,f(x)\,| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) = -g(x) \end{array} \right.$$

Pour cela, résoudre graphiquement les deux équations $f(x) = g(x)$ et $f(x) = -g(x)$ sur le domaine $g(x) \geq 0$ et observer que la solution est la même qu'au point a).

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes :

a) $|-x + 4| \;=\; -\dfrac{3}{x}$,

b) $\left|x^3 - 2x^2 - 4x + 3\right| \;=\; (x^2 + 1)\,(x - 3)$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante par rapport à la variable x en fonction du paramètre m :

$$\left|\,m\,x + m + 2\,\right| \;=\; x + 3\,.$$

Expliciter l'ensemble solution pour chaque valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| < x - 1$,

b) $\left|\dfrac{5x^2 - 9x - 8}{x - 1}\right| > 8 - x$,

c) $\Big|\,2\,(x+3) - |x-1|\,\Big| \leq |x-1|$,

d) $|x^2 + 3x - 1| \geq x^2 + x + 1$,

e) $\dfrac{1-x}{2+x} \leq 1 - \left|1 + \dfrac{2}{3x-4}\right|$.

5. Résoudre l'inéquation suivante par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}$ et en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$|2x - 1| < m.$$

Réponses de la série 3

1. $S = \{-3\}$.

2. a) $S = \{2 - \sqrt{7}\}$

b) $S = \{3\}$

3. ∘ si $m \in \,]-\infty\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[$ alors $S = \{-1\,,\,-\frac{m+5}{m+1}\,\}$,

∘ si $m \in \,[-1\,,\,1\,[$ alors $S = \{-1\,\}$,

∘ si $m = 1$ alors $S = \,[-3\,,\,+\infty\,[$.

4. a) $S =]1, +\infty[$

b) $S =]-\infty, -2[\cup]0, 1[\cup]1, 2[\cup]3, +\infty[$

c) $S = [-3, -1]$

d) $S = [-2, 0] \cup [1, +\infty[$

e) $S =]-\infty, -2[\cup[0, 1] \cup [3, +\infty[$

5. • si $m \leq 0$, $S = \emptyset$,

• si $m > 0$, $S = \left]\frac{1-m}{2}, \frac{1+m}{2}\right[$.