

Série 1

1. Étudier le signe de la quantité $P(x)$ en mettant au même dénominateur et/ou en factorisant.

a) $P(x) = -x^3 - 2x^2 - x$

b) $P(x) = (x + 3)^2 - x - 3$

c) $P(x) = x^2 + x - 2$

d) $P(x) = x - \frac{4}{x}, x \neq 0$

e) $P(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1}, x \neq -1, 0$

2. En étudiant le signe de la différence, comparer les quantités $P(x)$ et $Q(x)$ ci-dessous (c'est-à-dire déterminer pour quel intervalle a-t-on $P(x) > Q(x), P(x) < Q(x), P(x) = Q(x)...$)

Indication : compléter les carrés

a) $P(x) = x^2 + 6x, Q(x) = -5$

b) $P(x) = x^2 + 2x, Q(x) = -\frac{3}{4}$

c) $P(x) = x^2 + 3, Q(x) = -2x$

d) $P(x) = x^2 + 3, Q(x) = 2x$

e) $P(x) = x^5 + 2x^3, Q(x) = -9x$

3. En étudiant le signe de la différence, comparer les quantités $P(x)$ et $Q(x)$ ci-dessous (c'est-à-dire déterminer pour quel intervalle a-t-on $P(x) > Q(x), P(x) < Q(x), P(x) = Q(x)...$)

Indication : mettre au même dénominateur

a) $P(x) = \frac{1}{1-x}, Q(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0, 1$

b) $P(x) = \frac{x^2}{2}, Q(x) = \frac{4}{x}, x \neq 0$ (Vérifier au préalable que la quantité $x^2 + 2x + 4 > 0$ pour tout x).

c) $P(x) = \frac{3x+9}{2x+6}, Q(x) = \frac{3x}{2x+2}, x \neq -3, -1$

4. En comparant les quantités par une étude du signe de la différence, montrer que

a) pour tout $x > -1, \frac{x}{x+1} < 1$

b) pour tout $x > 0, \frac{x^2+1}{x} \geq -2$.

5. Rendre rationnel (sans racines) le dénominateur des expressions suivantes.

a) $A = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1},$ b) $B = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2\sqrt{3}},$ c) $C = \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}-1},$

d) $D = \frac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}},$ e) $E = \frac{x^2}{2+x+\sqrt[3]{x^2-12x-8}}.$

6. Déterminer a et b pour lesquels $z \in [a, b]$ pour chacun des cas ci-dessous

a) $x \in [1, 2], y \in [-1, 1], z = x + y$

b) $x \in [2, 3], y \in [-1, 3], z = x - y$

Réponses de la série 1

1. a) • $P(x) < 0 \iff x \in]0, +\infty[$
 • $P(x) > 0 \iff x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[$
 • $P(x) = 0 \iff x \in \{-1, 0\}$
- b) • $P(x) < 0 \iff x \in]-3, -2[$
 • $P(x) > 0 \iff x \in]-\infty, -3[\cup]-2, +\infty[$
 • $P(x) = 0 \iff x \in \{-3, -2\}$
- c) • $P(x) < 0 \iff x \in]-2, 1[$
 • $P(x) > 0 \iff x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$
 • $P(x) = 0 \iff x \in \{-2, 1\}$
- d) • $P(x) < 0 \iff x \in]-\infty, -2[\cup]0, 2[$
 • $P(x) > 0 \iff x \in]-2, 0[\cup]2, +\infty[$
 • $P(x) = 0 \iff x \in \{-2, 2\}$
- e) • $P(x) < 0 \iff x \in]-1, 0[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$
 • $P(x) > 0 \iff x \in]-\infty, -1[\cup]0, \frac{1}{2}[$
 • $P(x) = 0 \iff x \in \{\frac{1}{2}\}$
2. a) • $P(x) > Q(x) \iff P(x) - Q(x) > 0 \iff x \in]-\infty, -5[\cup]-1, +\infty[$
 • $P(x) < Q(x) \iff P(x) - Q(x) < 0 \iff x \in]-5, -1[$
 • $P(x) = Q(x) \iff P(x) - Q(x) = 0 \iff x \in \{-5, -1\}$.
- b) • $P(x) > Q(x) \iff P(x) - Q(x) > 0 \iff x \in]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[$
 • $P(x) < Q(x) \iff P(x) - Q(x) < 0 \iff x \in]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$
 • $P(x) = Q(x) \iff P(x) - Q(x) = 0 \iff x \in \{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\}$.
- c) $P(x) > Q(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- d) $P(x) > Q(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- e) • $P(x) > Q(x) \iff P(x) - Q(x) > 0 \iff x > 0$
 • $P(x) < Q(x) \iff P(x) - Q(x) < 0 \iff x < 0$
 • $P(x) = Q(x) \iff P(x) - Q(x) = 0 \iff x = 0$
3. a) • $P(x) > Q(x) \iff P(x) - Q(x) > 0 \iff x \in]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{2}, 1[$
 • $P(x) < Q(x) \iff P(x) - Q(x) < 0 \iff x \in]0, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$
 • $P(x) = Q(x) \iff P(x) - Q(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$
- b) • $P(x) > Q(x) \iff P(x) - Q(x) > 0 \iff x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$
 • $P(x) < Q(x) \iff P(x) - Q(x) < 0 \iff x \in]0, 2[$
 • $P(x) = Q(x) \iff P(x) - Q(x) = 0 \iff x = 2$

- c) • $P(x) > Q(x) \iff P(x) - Q(x) > 0 \iff x > -1$
• $P(x) < Q(x) \iff P(x) - Q(x) < 0 \iff x \in]-\infty, -3[\cup]-3, -1[$
• $P(x)$ n'est jamais égal à $Q(x)$.

5. a) $A = 3 - 2\sqrt{2}$, b) $B = -\frac{7 + 2\sqrt{21}}{5}$, c) $C = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + 1}{x + 1}$,

d) $D = \frac{\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{4}}{5}$,

e) $E = \frac{(2+x)^2 - (2+x)\sqrt[3]{x^2 - 12x - 8} + \sqrt[3]{(x^2 - 12x - 8)^2}}{x + 7}$.

6. a) $z \in [0, 3]$
b) $z \in [-1, 4]$
-