

Série 11

1. Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes, en précisant leur ensemble de définition et celui de la fonction dérivée.

a) $a(x) = x^6 + 15\sqrt[5]{x^2} - \frac{6}{x}$

d) $d(x) = \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}$

b) $b(x) = \frac{4x - 1}{2x + 1}$

e) $e(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$

c) $c(x) = \sqrt{\frac{1 - 2x}{x + 1}}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{(1 - \sqrt{x^3})^2}$

g) $g(x) = (x - 1)^5(2x + 1)^5$; pour quelles valeurs de x la dérivée $g'(x)$ est-elle nulle ?

h) $h(x) = \sqrt[3]{(x - 1)^2(x + a)}$; pour quelle valeur de a la dérivée $h'(x)$ est-elle nulle en $x = -1$?

2. Déterminer l'équation de la parabole d'équation $y = x^2 + px + q$ tangente à la droite d'équation $y - 3x - 1 = 0$ au point T d'abscisse $x_T = 1$.

3. Déterminer les points de tangence T des droites passant par l'origine et tangentes à la courbe Γ d'équation $y = \frac{3x + 1}{x^2 - x + 4}$.

4. Soient f une fonction dérivable en $x_0 = 2$, Γ_1 la courbe d'équation $y = f(x)$ et t_1 la tangente à Γ_1 en $x_0 = 2$.

$$t_1 : 3x - 2y - 4 = 0.$$

Soient g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, Γ_2 la courbe d'équation $y = g \circ f(x)$ et t_2 la tangente à Γ_2 en $x_0 = 2$.

Déterminer l'équation cartésienne de t_2 .

5. On donne deux arcs de parabole Γ_1 et Γ_2 définis par

$$\Gamma_1 : f_1(x) = -2x^2 + 6 \quad \text{et} \quad \Gamma_2 : f_2(x) = -(x-1)^2.$$

Déterminer l'équation cartésienne de la tangente t commune aux courbes Γ_1 et Γ_2 , de pente négative.

6. Montrer que les graphes des deux fonctions f et g admettent un unique point d'intersection,

$$f(x) = \frac{2x-1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^2-3x+4}{x^2-2x+3},$$

puis calculer l'angle φ entre les deux courbes en ce point.

7. Soit \widehat{b} la fonction définie dans l'exercice 7 de la série 10 (prolongée par continuité de la fonction b donnée dans l'exercice 4 b) de la série 9) :

$$\widehat{b}(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} + x - 1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad \widehat{b}(0) = 1.$$

La fonction \widehat{b} est-elle continûment dérivable en $x_0 = 0$?

8. Calculer la dérivée d'ordre n , $n \in \mathbb{N}^*$, des fonctions suivantes :

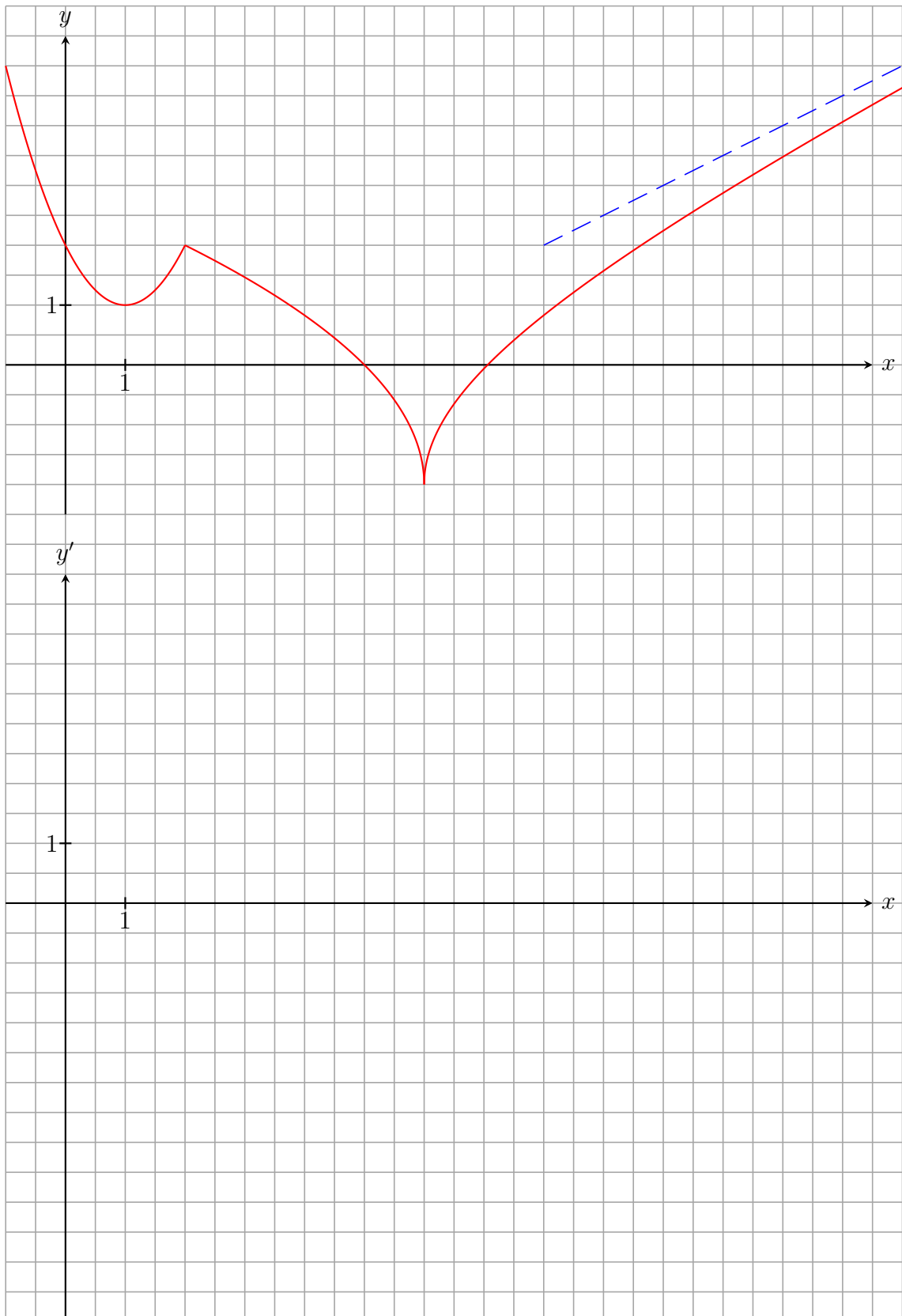
$$\text{a) } f(x) = x^{-3} \qquad \text{b) } g(x) = \sin(ax), \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

9. Parmi les énoncés suivants, déterminer s'ils sont vrais ou faux. S'ils sont vrais, justifier. S'ils sont faux, donner un contre-exemple.

- Soient f, g deux fonctions réelles telles que $h = g \circ f$ soit continue en $x_0 \in \mathbb{R}$. Si g est continue sur \mathbb{R} , alors f est continue en x_0 .
- Si f est dérivable en $x = 0$, alors $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h) - f(h)}{h} = 2f'(0)$.
- Soient f et g deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} . Si $f'(0) = 0$, alors $(f \circ g)'(0) = 0$.
- Si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, alors f' est continue sur I .

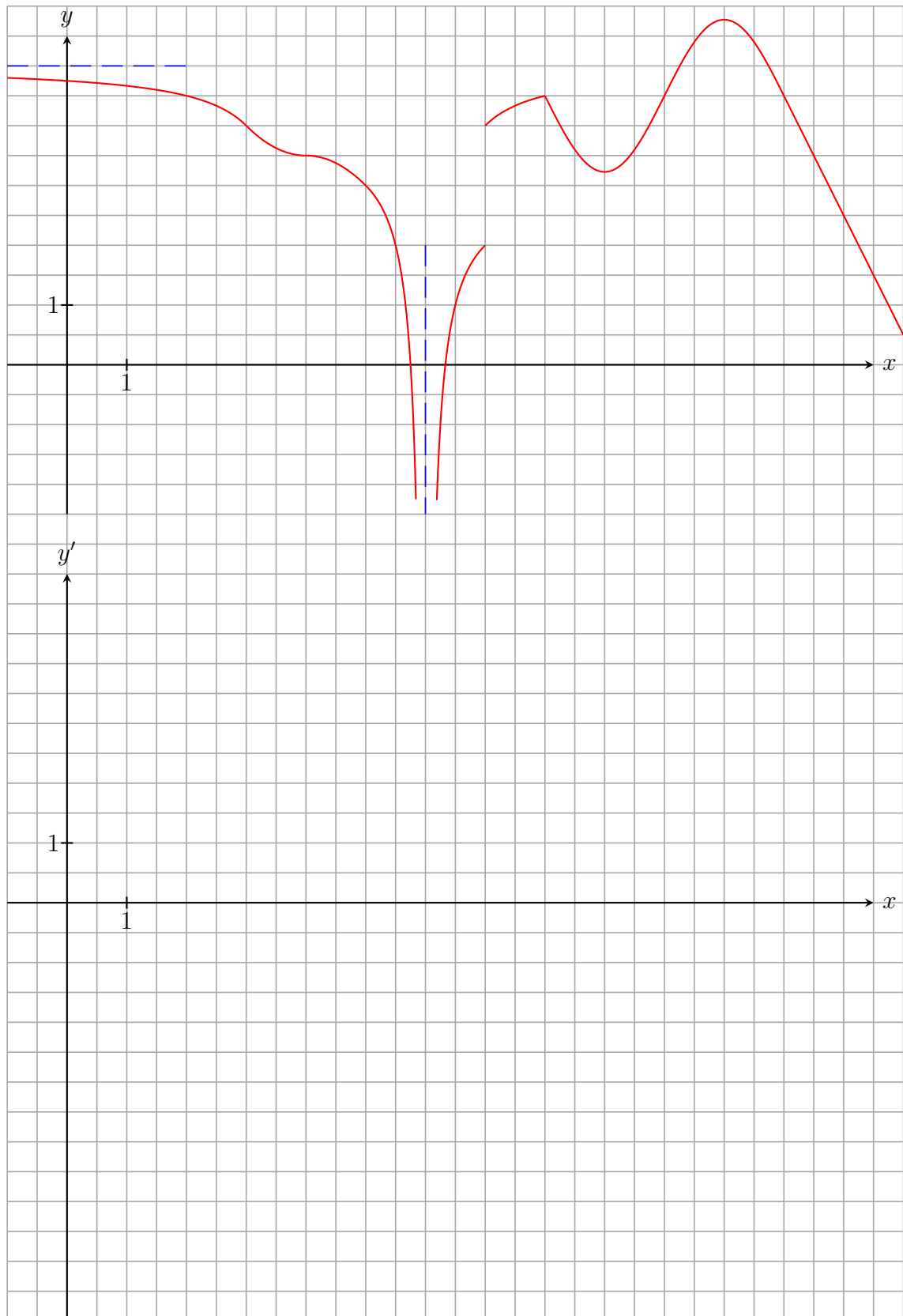
10. On donne ci-dessous la courbe Γ d'équation $y = f(x)$.

Esquisser le graphe de la fonction dérivée de f .



11. On donne ci-dessous la courbe Γ d'équation $y = f(x)$.

Esquisser le graphe de la fonction dérivée de f .



Réponses de la série 11

1. a) $a'(x) = 6 \left(x^5 + \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + \frac{1}{x^2} \right)$, $D_a = D_{a'} = \mathbb{R}^*$.
- b) $b'(x) = \frac{6}{(2x+1)^2}$, $D_b = D_{b'} = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$.
- c) $c'(x) = -\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{(x+1)^3(1-2x)}}$, $D_c =]-1; \frac{1}{2}]$ et $D_{c'} =]-1; \frac{1}{2}[$.
- d) $d'(x) = \frac{7}{8} \frac{1}{\sqrt[8]{x}}$, $D_d = \mathbb{R}_+$ et $D_{d'} = \mathbb{R}_+^*$.
- e) $e'(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \left(\sqrt{x^2+1} + x \right)^2$, $D_e = D_{e'} = \mathbb{R}$.
- f) $f'(x) = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1-\sqrt{x^3}}}$, $D_f = \mathbb{R}_+$ et $D_{f'} = \mathbb{R}_+ - \{1\}$.
- g) $g'(x) = 5(4x-1)(x-1)^4(2x+1)^4$, $D_g = D_{g'} = \mathbb{R}$,
 $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; 1\}$.
- h) $h'(x) = \frac{3x+2a-1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+a)^2(x-1)}}$, $D_h = \mathbb{R}$ et $D_{h'} = \mathbb{R} - \{1; -a\}$,
 $h'(-1) = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

2. Equation de la parabole : $y = x^2 + x + 2$.

3. $T(-1; -\frac{1}{3})$

4. $t_2 : 3x + 4y - 8 = 0$.

5. $t : 4x + y - 8 = 0$.

6. $\varphi = \arctan(3)$.

7. Oui, car $\lim_{x \rightarrow 0} \widehat{b}'(x) = \widehat{b}'(0)$

8. a) $f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} (-1)^n (n+2)! x^{-(n+3)}$, à démontrer par récurrence.

b) $g^{(n)}(x) = a^n \sin(ax + \frac{n\pi}{2})$, à démontrer par récurrence.

9. a) Faux. b) Vrai. c) Faux. d) Faux.