Série 10

1. Peut-on trouver des valeurs des constantes A et B de sorte que les fonctions suivantes soient continues en $x = 0$?

a) $a(x) = \dfrac{|x|(x+1)+x}{x^2(x+1)}$ si $x \neq 0$ et $a(0) = A$,

b) $b(x) = \dfrac{x\sqrt{3-4\cos x+\cos^2 x}}{|x|\,\sin x}$ si $x \neq 0$ et $b(0) = B$.

2. a) La fonction définie par $f(x) = |\tan x| \cdot \cos^3(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est-elle continue en $x = 0$?

b) Montrer que la fonction $f(x) = x - E(x^2)$ est continue à droite en $x = \sqrt{2}$.

3. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1-\cos(x^2)}{\sin^2 x - \tan^2 x}\,.$$

La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $x = 0$?

4. Montrer que les deux courbes Γ_1 et Γ_2 admettent un point d'intersection, puis localiser son abscisse sur un intervalle de longueur Δ :

a) $\Gamma_1 :\ y = \sin(x)$, $\Gamma_2 :\ y = \sqrt{x-2}$, $\Delta = 1$.

b) $\Gamma_1 :\ y = \cos(x)$, $\Gamma_2 :\ y = x^3$, $\Delta = \frac{\pi}{12}$.

5. Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en $x = 0$?

a) $a(x) = \tan|x|$

b) $b(x) = x\,\sin|x|$

c) $c(x) = \sin(x)\,\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $c(0) = 0$

d) $d(x) = \sin^2(x)\,\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $d(0) = 0$.

6. On considère la fonction g définie dans un voisinage de $x_0 = \frac{\pi}{2}$ par

$$g(x) = \frac{\cos(2x)+\sin x}{\sin(2x)} \quad \text{si } x \neq \tfrac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad g(\tfrac{\pi}{2}) = 0\,.$$

Montrer à l'aide de la définition que la fonction g est dérivable en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

7. Montrer que la fonction $b(x)$ de l'exercice **4.** b) de la série 9 peut être prolongée par continuité en $x_0 = 0$.

Est-elle alors dérivable en $x_0 = 0$? $\qquad b(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x}$.

8. Sans utiliser les règles de dérivation, déterminer l'équation de la tangente t au graphe de f en x_0 :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\,, \qquad x_0 = 2\,.$$

9. Exercice facultatif.

Soit f une fonction définie sur un voisinage pointé de x_0.

On dit que f admet une dérivée symétrique en x_0 si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ existe. On note alors cette limite $f'_s(x_0)$.

- $*$ Montrer que si f est dérivable en x_0, alors $f'_s(x_0)$ existe.
- $*$ Vérifier que la réciproque est fausse.

Réponses de la série 10

1. a) Non b) Oui : $B = 1$

2. a) oui, car $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ b) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^+} f(x) = f(\sqrt{2}\,)$

3. Oui : $\widehat{f}(0) = -\frac{1}{2}$

4. Utiliser le théorème de la valeur intermédiaire

5. a) non b) oui c) non d) oui

6. La fonction g est dérivable en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ et $g'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{3}{4}$.

7. La fonction prolongée $\widehat{b}$ est dérivable en $x_0 = 0$ et $\widehat{b}\,'(0) = \frac{1}{2}$.

8. $t: \; x + 4y - 3 = 0$