Algèbre élémentaire

Ordre sur $\mathbb{R}$

La notation $x \geq y$ veut dire "x est plus grand ou égal à y". $\mathbb{R}$ est un ensemble totalement ordonné par rapport à la relation $\geq$. C'est-à-dire, on peut comparer toute paire de nombres réels:

$$\text{pour tout } x, y \in \mathbb{R},\ x \geq y \text{ ou } y \geq x.$$

Cet ordre satisfait les propriétés suivantes:

- $x \geq y$, $y \geq x \Longrightarrow x = y$
- $x \geq y$, $y \geq z \Longrightarrow x \geq z$ (*transitivité*)
- $x \geq y \Longrightarrow x + z \geq y + z$ pour tout $z \in \mathbb{R}$
  Cette propriété permet de déduire que $x \geq y \iff x - y \geq 0$.
- $x \geq 0$, $y \geq 0 \Longrightarrow x \cdot y \geq 0$
- $x \geq 0$, $y \geq 0 \Longrightarrow x + y \geq 0$
- $a \geq b$, $x \geq y \Longrightarrow a + x \geq b + y$
- $x \geq y$, $a \geq 0 \Longrightarrow a \cdot x \geq a \cdot y$
- $x \geq y$, $a \leq 0 \Longrightarrow a \cdot y \geq a \cdot x$

La notation $y \leq x$ est équivalente à $x \geq y$. Cette relation est appelée la *comparaison large*.

On note $x > y$ ou $y < x$ la *comparaison stricte*, "x est strictement plus grand que y".

Toutes les propriétés ci-dessus restent valables si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes.

- L'ensemble des nombres réels x satisfaisant la condition $x \geq 0$ est noté $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_{\geq 0}$.
  On dit qu'un tel nombre est *positif*.
- L'ensemble des nombres réels x satisfaisant la condition $x > 0$ est noté $\mathbb{R}_{>0}$.
  On dit qu'un tel nombre est *strictement positif*.
- L'ensemble des nombres réels x satisfaisant la condition $x \leq 0$ est noté $\mathbb{R}_-$ ou $\mathbb{R}_{\leq 0}$.
  On dit qu'un tel nombre est *négatif*.
- L'ensemble des nombres réels x satisfaisant la condition $x < 0$ est noté $\mathbb{R}_{<0}$.
  On dit qu'un tel nombre est *strictement négatif*.

Notation

Les intervalles réels bornés:

$$\begin{aligned} x \in [a,b] &\iff a \leq x \leq b \\ x \in\ ]a,b[&\iff a < x < b \\ x \in\ ]a,b] &\iff a < x \leq b \\ x \in [a,b[&\iff a \leq x < b \end{aligned}$$

Les intervalles réels non bornés:

$$\begin{aligned} x \in [a,\infty[&\iff a \leq x \\ x \in\ ]-\infty,b] &\iff x \leq b \\ x \in\ ]a,\infty[&\iff a < x \\ x \in]-\infty,b[&\iff x < b \end{aligned}$$