

Corrigé 3

1. On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ et $g(x) = -3x - \frac{11}{2}$.

a) Dans un repère orthonormé (unité = 2 carrés), représenter le graphe de f et de g , puis en déduire celui de $|f|$.

Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $|f(x)| = g(x)$.

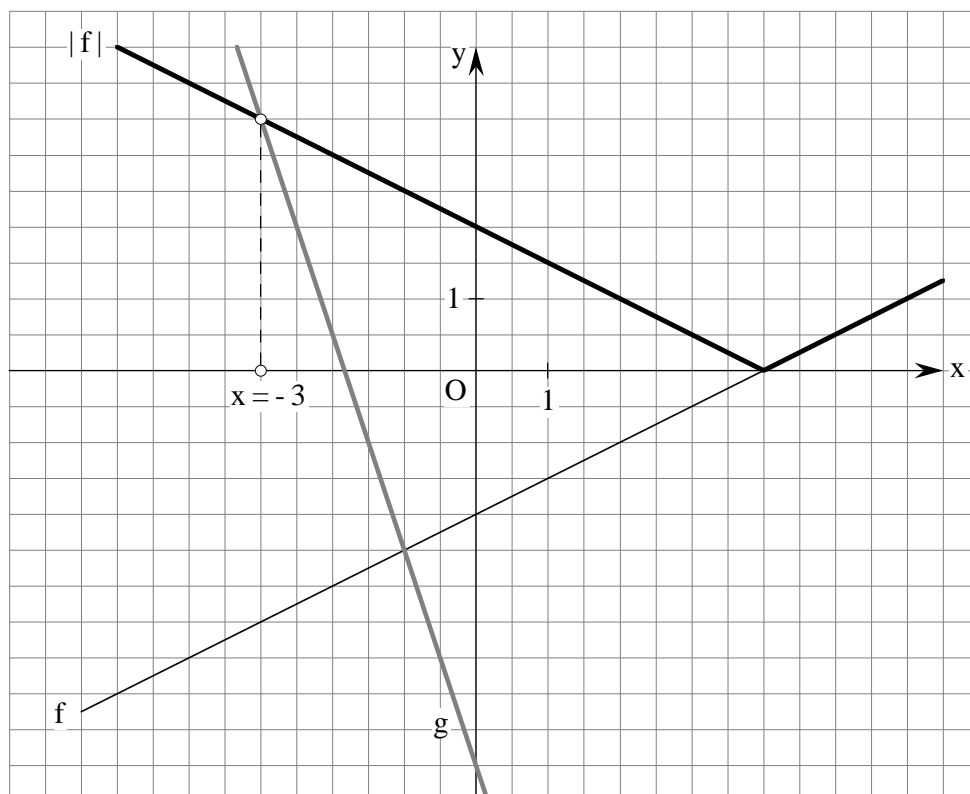
b) Interpréter graphiquement, sur l'exemple ci-dessus, l'équivalence suivante

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \text{ et } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

Pour cela, résoudre graphiquement les deux équations $f(x) = g(x)$ et $f(x) = -g(x)$ sur le domaine $g(x) \geq 0$ et observer que la solution est la même qu'au point a).

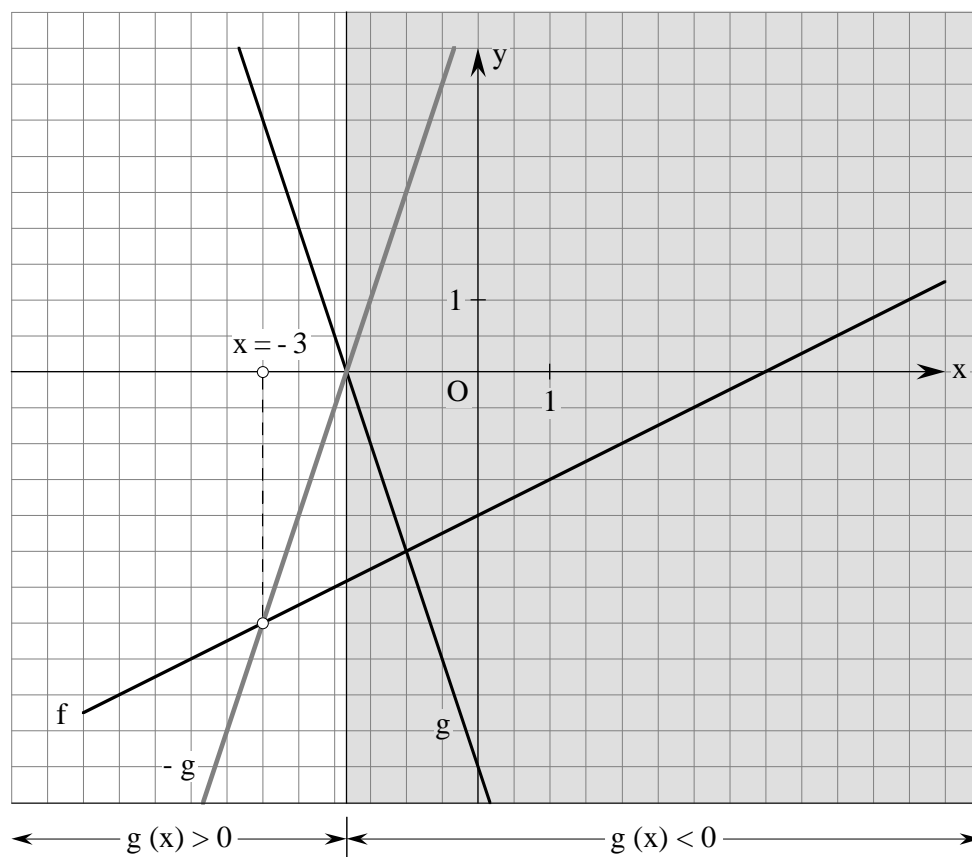
a) Les graphes de f et g sont des droites. Le graphe de $|f|$ se déduit de celui de f en symétrisant par rapport à l'axe Ox tous les points d'ordonnée négative.

On en déduit graphiquement que l'unique solution de $|f(x)| = g(x)$ est $x = -3$.



b) On représente le graphe de $-g$ en symétrisant par rapport à l'axe Ox tous les points du graphe de g .

Sur le domaine $D_{\text{pos}} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0\}$ (domaine blanc sur la figure ci-dessous), l'équation $f(x) = g(x)$ n'admet pas de solution et l'équation $f(x) = -g(x)$ admet une unique solution $x = -3$.



2. Résoudre dans \mathbb{R} les deux équations suivantes :

a) $|-x + 4| = -\frac{3}{x}$,

b) $|x^3 - 2x^2 - 4x + 3| = (x^2 + 1)(x - 3)$.

a) Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}^*$.

Condition de positivité : cette équation admet d'éventuelles solutions seulement si $-\frac{3}{x} \geq 0$. Or

$$-\frac{3}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

On a donc $D_{\text{pos}} = \mathbb{R}_-$.

Pour $x \in D_{\text{def}} \cap D_{\text{pos}} = \mathbb{R}_-$, l'équation devient :

$$-x + 4 = \pm \frac{3}{x} \Leftrightarrow x(-x + 4) = \pm 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 & (1) \\ \text{ou} \\ x^2 - 4x - 3 = 0 & (2). \end{cases}$$

- Résolution de l'équation (1)

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0. \quad \text{Sur } \mathbb{R}_-, \text{ on a } S_1 = \emptyset.$$

- Résolution de l'équation (2)

$$x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{7}. \quad \text{Sur } \mathbb{R}_-, \quad S_2 = \{2 - \sqrt{7}\}.$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{2 - \sqrt{7}\}.$$

b) Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}$.

Condition de positivité : cette équation n'admet d'éventuelles solutions que si $(x^2 + 1)(x - 3) \geq 0$.

$$(x^2 + 1)(x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [3, +\infty[.$$

On a donc $D_{\text{pos}} = [3, +\infty[$.

Pour $x \in D_{\text{def}} \cap D_{\text{pos}} = [3, +\infty[$, l'équation devient :

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - 4x + 3 &= \pm(x^2 + 1)(x - 3) \\ \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 4x + 3 &= \pm(x^3 - 3x^2 + x - 3) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 & (1) \\ \text{ou} \\ 2x^3 - 5x^2 - 3x = 0 & (2). \end{cases} \end{aligned}$$

- Résolution de l'équation (1)

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 2) = 0.$$

Sur $[3, +\infty[$, $S_1 = \{3\}$.

- Résolution de l'équation (2)

$$2x^3 - 5x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 - 5x - 3) = 0 \Leftrightarrow x(2x + 1)(x - 3) = 0.$$

Sur $[3, +\infty[$, $S_2 = \{3\}$.

$$S = S_1 \cup S_2 = \{3\}.$$

3. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante par rapport à la variable x en fonction du paramètre m :

$$|mx + m + 2| = x + 3.$$

Expliciter l'ensemble solution pour chaque valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}$.

Cette équation n'admet d'éventuelles solutions que si $x + 3 \geq 0$.

Condition de positivité : $x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-3, +\infty[$.

Sur le domaine restreint $D_{\text{def}} \cap D_{\text{pos}} = D_{\text{pos}} = [-3, +\infty[$, l'équation est équivalente au système suivant :

$$|mx + m + 2| = x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} mx + m + 2 = x + 3 & (a) \\ \text{ou} \\ mx + m + 2 = -(x + 3) & (b) \end{cases}$$

Résolution de l'équation (a) :

$$mx + m + 2 = x + 3 \Leftrightarrow (m - 1)x = -m + 1,$$

- si $m = 1$, l'équation devient $0x = 0$, elle est vérifiée pour tout $x \in D_{\text{pos}}$,
 $S_a = D_{\text{pos}} = [-3, +\infty[$,
- si $m \neq 1$, l'équation devient $x = \frac{-m + 1}{m - 1} \Leftrightarrow x = -1$,
or $-1 \in D_{\text{pos}}$ donc $S_a = \{-1\}$.

Résolution de l'équation (b) :

$$mx + m + 2 = -(x + 3) \Leftrightarrow (m + 1)x = -m - 5,$$

- si $m = -1$, l'équation devient $0x = -4$, elle n'est jamais vérifiée,
 $S_b = \emptyset$,
- si $m \neq -1$, l'équation devient $x = \frac{-m - 5}{m + 1}$.

Mais $x = \frac{-m - 5}{m + 1}$ n'est solution que s'il appartient à D_{pos} :

$$\frac{-m - 5}{m + 1} \geq -3 \Leftrightarrow \frac{2(m - 1)}{m + 1} \geq 0 \Leftrightarrow m \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$$

donc si $m \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$ alors $S_b = \left\{ \frac{-m - 5}{m + 1} \right\}$.

Détermination de l'ensemble solution S de l'équation initiale en fonction de $m \in \mathbb{R}$:

$$S = S_a \cup S_b.$$

- si $m \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ alors $S = \{-1, -\frac{m+5}{m+1}\}$,
- si $m \in [-1, 1[$ alors $S = \{-1\}$,
- si $m = 1$ alors $S = [-3, +\infty[$.

4. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

- a) $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| < x-1$,
- b) $\left| \frac{5x^2 - 9x - 8}{x-1} \right| > 8-x$,
- c) $\left| 2(x+3) - |x-1| \right| \leq |x-1|$,
- d) $|x^2 + 3x - 1| \geq x^2 + x + 1$,
- e) $\frac{1-x}{2+x} \leq 1 - \left| 1 + \frac{2}{3x-4} \right|$.

a) Résolution de l'inéquation $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| < x-1$.

- Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- On utilise l'équivalence suivante :

$$\left| \frac{x-1}{x+1} \right| < x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} < x-1 & (1) \\ \text{et} \\ \frac{x-1}{x+1} > -(x-1) & (2) \end{cases}$$

- Résolution de l'inéquation (1) :

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x+1} < x-1 &\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} - (x-1) < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} - \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} < 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(x-1)[1-(x+1)]}{x+1} < 0 &\Leftrightarrow -\frac{x(x-1)}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{x+1} > 0. \end{aligned}$$

Etude du signe de la fraction rationnelle $Q_1(x) = \frac{x(x-1)}{x+1}$:

x	-1	0	1
x	-	0	+
$x-1$	-	-	0
$x+1$	-	0	+
$Q_1(x)$	-	+	0

$$Q_1(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[, \quad S_1 =]-1, 0[\cup]1, +\infty[.$$

- Résolution de l'inéquation (2) :

$$\frac{x-1}{x+1} > -(x-1) \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} + (x-1) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)[1+(x+1)]}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-1)}{x+1} > 0.$$

Etude du signe de la fraction rationnelle $Q_2(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x+1}$:

x	-2		-1	1	
$x+2$	-	0	+	+	+
$x-1$	-		-	-	0
$x+1$	-		-	0	+
$Q_2(x)$	-	0	+	-	0

$$Q_2(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2, -1[\cup]1, +\infty[, \quad S_2 =]-2, -1[\cup]1, +\infty[.$$

- Conclusion : $S = S_1 \cap S_2$,

avec $S_1 =]-1, 0[\cup]1, +\infty[$ et $S_2 =]-2, -1[\cup]1, +\infty[$.

$$S =]1, +\infty[.$$

b) Résolution de l'inéquation $\left| \frac{5x^2 - 9x - 8}{x-1} \right| > 8 - x$.

- Domaine de définition : $D_{\text{déf}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- Equivalence :

$$\left| \frac{5x^2 - 9x - 8}{x-1} \right| > 8 - x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x^2 - 9x - 8}{x-1} > 8 - x & (1) \\ \text{ou} \\ \frac{5x^2 - 9x - 8}{x-1} < -(8 - x) & (2). \end{cases}$$

- Résolution de (1):

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 - 9x - 8}{x - 1} - (8 - x) &> 0 \\ \frac{5x^2 - 9x - 8 - (8 - x)(x - 1)}{x - 1} &> 0 \\ \frac{5x^2 - 9x - 8 - (-x^2 + 9x - 8)}{x - 1} &> 0 \\ \frac{6x^2 - 18x}{x - 1} &> 0 \\ \frac{6x(x - 3)}{x - 1} &> 0. \end{aligned}$$

Par un tableau des signes, l'expression changeant de signe en $x = 0$, $x = 1$ et $x = 3$, on a

$$S_1 =]0, 1[\cup]3, +\infty[.$$

- Résolution de (2):

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 - 9x - 8}{x - 1} + (8 - x) &< 0 \\ \frac{5x^2 - 9x - 8 + (8 - x)(x - 1)}{x - 1} &< 0 \\ \frac{5x^2 - 9x - 8 + (-x^2 + 9x - 8)}{x - 1} &< 0 \\ \frac{4x^2 - 16}{x - 1} &< 0 \\ \frac{4(x + 2)(x - 2)}{x - 1} &< 0. \end{aligned}$$

Par un tableau des signes, l'expression changeant de signe en $x = -2$, $x = 1$ et $x = 2$, on a

$$S_2 =]-\infty, -2[\cup]1, 2[.$$

- Conclusion

$$S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, -2[\cup]0, 1[\cup]1, 2[\cup]3, +\infty[.$$

- c) Résolution de l'inéquation $\left| 2(x + 3) - |x - 1| \right| \leq |x - 1|$.

Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}$.

Cette inéquation est équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} 2(x + 3) - |x - 1| \leq |x - 1| \\ \text{et} \\ 2(x + 3) - |x - 1| \geq -|x - 1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 1| \geq x + 3 & (1) \\ \text{et} \\ x + 3 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq x+3 \\ \text{ou} \\ x-1 \leq -(x+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x \geq 4 \\ \text{ou} \\ x \leq -1 \end{cases}, \quad S_1 =]-\infty, -1].$$

$$(2) \Leftrightarrow x \geq -3, \quad S_2 = [-3, +\infty[.$$

En conclusion : $S = S_1 \cap S_2 = [-3, -1]$.

d) Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}$.

On utilise l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} |x^2 + 3x - 1| \geq x^2 + x + 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 1 \geq x^2 + x + 1 \\ \text{ou} \\ x^2 + 3x - 1 \leq -(x^2 + x + 1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 \geq 0 & (1) \\ \text{ou} \\ 2x^2 + 4x \leq 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

• Résolution de l'inéquation (1) :

$$2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1, \quad \mathcal{S}_1 = [1, +\infty[.$$

• Résolution de l'inéquation (2) :

$$2x^2 + 4x \leq 0 \Leftrightarrow 2x(x+2) \leq 0, \quad \mathcal{S}_2 = [-2, 0].$$

• Conclusion :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = [-2, 0] \cup [1, +\infty[.$$

e) Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{4}{3}\}$.

$$\frac{1-x}{2+x} \leq 1 - \left| 1 + \frac{2}{3x-4} \right| \Leftrightarrow \left| 1 + \frac{2}{3x-4} \right| \leq 1 - \frac{1-x}{2+x}.$$

On utilise l'équivalence suivante :

$$\left| 1 + \frac{2}{3x-4} \right| \leq 1 - \frac{1-x}{2+x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{2}{3x-4} \leq 1 - \frac{1-x}{2+x} & (1) \\ \text{et} \\ 1 + \frac{2}{3x-4} \geq -1 + \frac{1-x}{2+x} & (2) \end{cases}$$

Résolution de l'inéquation (1) :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{3x-4} \leq 1 - \frac{1-x}{2+x} &\Leftrightarrow \frac{1-x}{2+x} + \frac{2}{3x-4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(1-x)(3x-4) + 2(2+x)}{(2+x)(3x-4)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-3x^2 + 9x}{(2+x)(3x-4)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x(3-x)}{(2+x)(3x-4)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-3)}{(2+x)(3x-4)} \geq 0. \end{aligned}$$

Signe de la fraction rationnelle $Q_1(x) = \frac{x(x-3)}{(2+x)(3x-4)}$.

x	$-\infty$	-2	0	$\frac{4}{3}$	3	$+\infty$	
x	-	-	0	+	+	+	
$x - 3$	-	-	-	-	0	+	
$3x - 4$	-	-	-	0	+	+	
$2 + x$	-	0	+	+	+	+	
$Q_1(x)$	+	-	0	+	-	0	+

On en déduit l'ensemble solution :

$$Q_1(x) \geq 0 \iff x \in]-\infty, -2[\cup \left[0, \frac{4}{3}\right[\cup [3, +\infty[.$$

$$S_1 =]-\infty, -2[\cup \left[0, \frac{4}{3}\right[\cup [3, +\infty[.$$

Résolution de l'inéquation (2) :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{3x-4} &\geq -1 + \frac{1-x}{2+x} \iff \frac{2}{3x-4} + \frac{x-1}{2+x} + 2 \geq 0 \\ \iff \frac{2(2+x) + (x-1)(3x-4) + 2(3x-4)(2+x)}{(3x-4)(2+x)} &\geq 0 \\ \iff \frac{9x^2 - x - 8}{(3x-4)(2+x)} \geq 0 &\iff \frac{(9x+8)(x-1)}{(3x-4)(2+x)} \geq 0 \end{aligned}$$

Signe de la fraction rationnelle $Q_2(x) = \frac{(9x+8)(x-1)}{(3x-4)(2+x)}$.

x		-2	$-\frac{8}{9}$	1	$\frac{4}{3}$		
$9x + 8$	-	-	0	+	+	+	
$x - 1$	-	-	-	0	+	+	
$3x - 4$	-	-	-	-	0	+	
$x + 2$	-	0	+	+	+	+	
$Q_2(x)$	+	-	0	+	0	-	+

$$Q_2(x) \geq 0 \iff x \in]-\infty, -2[\cup \left[-\frac{8}{9}, 1\right] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right[.$$

$$S_2 =]-\infty, -2[\cup \left[-\frac{8}{9}, 1\right] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right[.$$

Conclusion :

$$S = S_1 \cap S_2 =] -\infty, -2[\cup [0, 1] \cup [3, +\infty[.$$

5. Résoudre l'inéquation suivante par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}$ et en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$|2x - 1| < m.$$

Domaine de définition : $D_{\text{déf}} = \mathbb{R}$.

Pour $x \in D_{\text{déf}}$, on a l'équivalence

$$|2x - 1| < m \iff \begin{cases} 2x - 1 < m & (1) \\ \text{et} \\ 2x - 1 > -m & (2) \end{cases}$$

Résolution de l'inéquation (1) :

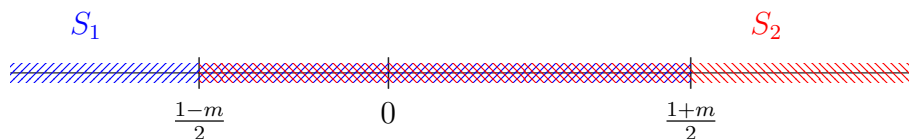
$$2x - 1 < m \iff x < \frac{m + 1}{2}, \quad S_1 =] -\infty, \frac{1 + m}{2} [.$$

Résolution de l'inéquation (2) :

$$2x - 1 > -m \iff x > \frac{1 - m}{2}, \quad S_2 =] \frac{1 - m}{2}, +\infty [.$$

L'expression de l'ensemble solution $S = S_1 \cap S_2$ dépend de m :

- Si $m = 0$, alors $S =] -\infty, \frac{1}{2} [\cap] \frac{1}{2}, +\infty [= \emptyset$.
- Si $m > 0$, alors $\frac{1 - m}{2} < \frac{1 + m}{2}$ et $S =] -\infty, \frac{1 + m}{2} [\cap] \frac{1 - m}{2}, +\infty [=] \frac{1 - m}{2}, \frac{1 + m}{2} [$.



- Si $m < 0$, alors $\frac{1 - m}{2} > \frac{1 + m}{2}$ et $S =] -\infty, \frac{1 + m}{2} [\cap] \frac{1 - m}{2}, +\infty [= \emptyset$.



Résumé :

- si $m \leq 0$, $S = \emptyset$,
 - si $m > 0$, $S =] \frac{1 - m}{2}, \frac{1 + m}{2} [$.
-