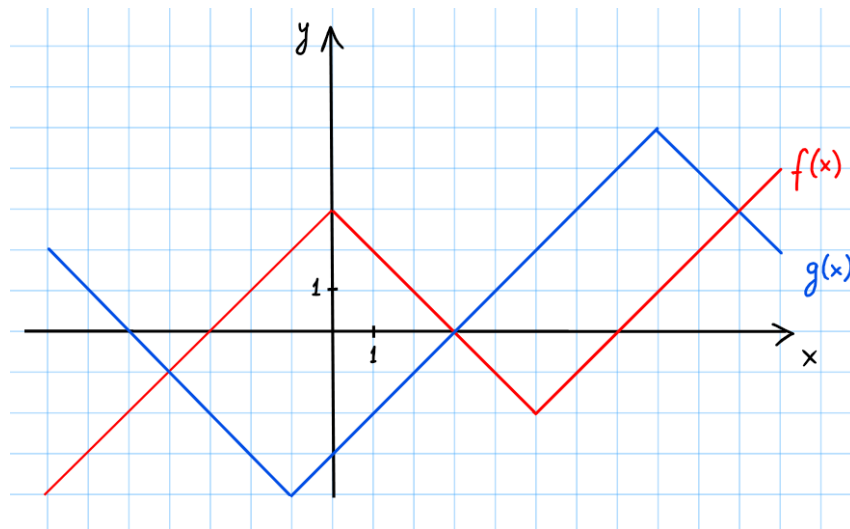


## Corrigé 2

1. Soient  $f, g : [-7, 11] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions données par leurs graphes ci-dessous.



Donner les tableaux de signes des fonctions  $f(x)$ ,  $g(x)$  et  $f(x) - g(x)$ .

$x$	-3	3	7				
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$x$	-5	3			
$g(x)$	+	0	-	0	+

Pour trouver le signe de  $f(x) - g(x)$ , on utilise l'équivalence

$$f(x) - g(x) > 0 \iff f(x) > g(x).$$

Ainsi, on a

$x$	-4	3	10				
$f(x) - g(x)$	-	0	+	0	-	0	+

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les trois inéquations suivantes :

a)  $\frac{11}{4}x + \frac{1}{5}(2 - 3x) \leq \frac{1}{3}(7x - 1),$       c)  $\frac{1-x}{2+x} \leq -\frac{2}{3x-4}.$

b)  $\frac{x+2}{2x-4} \leq \frac{5-2x}{x-2} + 3,$

a) L'inéquation  $\frac{11}{4}x + \frac{1}{5}(2 - 3x) \leq \frac{1}{3}(7x - 1)$  est définie sur tout  $\mathbb{R}$ .

On cherche à se ramener à une inéquation de la forme  $ax \leq b$  :

$$\begin{aligned} \frac{11}{4}x + \frac{1}{5}(2 - 3x) \leq \frac{1}{3}(7x - 1) &\Leftrightarrow \frac{11}{4}x + \frac{2}{5} - \frac{3}{5}x \leq \frac{7}{3}x - \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{11}{4}x - \frac{3}{5}x - \frac{7}{3}x \leq -\frac{1}{3} - \frac{2}{5} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{11}{4} - \frac{3}{5} - \frac{7}{3}\right)x \leq -\frac{1}{3} - \frac{2}{5} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{11 \cdot 5 \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot 3 - 7 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 5 \cdot 3}\right)x \leq \frac{-5 - 2 \cdot 3}{3 \cdot 5} \\ &\Leftrightarrow \frac{165 - 36 - 140}{60}x \leq -\frac{11}{15} \\ &\Leftrightarrow -\frac{11}{60}x \leq -\frac{11}{15} \\ &\Leftrightarrow x \geq \left(-\frac{11}{15}\right) \cdot \left(-\frac{60}{11}\right) \\ &\Leftrightarrow x \geq 4. \end{aligned}$$

Soit  $S$  l'ensemble solution,  $S = [4, +\infty[$ .

b) Définition du référentiel :  $D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

Résoudre une inéquation rationnelle revient à étudier le signe d'une fraction rationnelle. On se ramène donc à une comparaison à 0 :

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{2x-4} - \frac{5-2x}{x-2} - 3 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x+2 - 2(5-2x) - 3(2x-4)}{2x-4} &\leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x+4}{2x-4} \leq 0. \end{aligned}$$

On étudie le signe de cette fraction rationnelle  $Q$  à l'aide d'un tableau de signe :

$x$		2		4	
$-x+4$	+		+	0	-
$2x-4$	-	0	+		+
$Q$	-		+	0	-

$$Q \leq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; 2[ \cup [4; +\infty[; \quad S = ]-\infty; 2[ \cup [4; +\infty[.$$

c) • Domaine de définition

$$D_{\text{déf}} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2+x \neq 0 \text{ et } 3x-4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{4}{3}\right\}.$$

• Comparaison à 0

$$\begin{aligned} \frac{1-x}{2+x} \leq -\frac{2}{3x-4} &\Leftrightarrow \frac{1-x}{2+x} + \frac{2}{3x-4} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(1-x)(3x-4) + 2(2+x)}{(2+x)(3x-4)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-3x^2 + 9x}{(2+x)(3x-4)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(-3x)(x-3)}{(2+x)(3x-4)} \leq 0. \end{aligned}$$

• Etude de signe

$x$		-2		0		4/3		3	
$-3x$	+		+	0	-		-		-
$x-3$	-		-		-		-	0	+
$2+x$	-	0	+		+		+		+
$3x-4$	-		-		-	0	+		+
$Q$	-		+	0	-		+	0	-

$$Q \leq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -2[ \cup [0, \frac{4}{3}[ \cup [3, +\infty[.$$

$$S = ]-\infty, -2[ \cup [0, \frac{4}{3}[ \cup [3, +\infty[.$$

3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes.

a)  $(x+2)^2 > 4,$

b)  $(x+3)^3 < 8.$

a) On se sert des identités remarquables pour factoriser cette différence de deux carrés :

$$(x+2)^2 > 4 \Leftrightarrow (x+2)^2 - 2^2 > 0 \Leftrightarrow [(x+2)-2][(x+2)+2] > 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+4) > 0, \quad S = ]-\infty, -4[ \cup ]0, +\infty[.$$

- b) De même, on se sert des identités remarquables pour factoriser cette différence de deux cubes :

$$\begin{aligned} (x+3)^3 < 8 &\Leftrightarrow (x+3)^3 - 2^3 < 0 \\ &\Leftrightarrow [(x+3) - 2] [(x+3)^2 + 2(x+3) + 4] < 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1) [(x+3)^2 + 2(x+3) + 1 + 3] < 0 \Leftrightarrow (x+1) [(x+4)^2 + 3] < 0 \\ &\Leftrightarrow x+1 < 0, \quad S = ]-\infty, -1[. \end{aligned}$$

4. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation et l'inéquation suivantes par rapport à la variable  $x$  en fonction du paramètre réel  $m$ .

$$\text{a) } mx - 4 = 2(x - m), \quad \text{b) } \frac{2}{m-1}x \leq x - \frac{1}{m-1}, \quad m \neq 1.$$

- a) Cette équation est définie pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ .

On se ramène à une équation du premier degré en  $x$  du type  $ax = b$ .

$$mx - 4 = 2(x - m) \Leftrightarrow (m - 2)x = 4 - 2m.$$

La résolution de cette équation dépend du coefficient  $m - 2$ .

- Si  $m - 2 \neq 0$ , l'équation devient

$$(m - 2)x = 4 - 2m \Leftrightarrow x = \frac{4 - 2m}{m - 2} \Leftrightarrow x = \frac{-2(m - 2)}{m - 2} \Leftrightarrow x = -2.$$

$$S = \{-2\}.$$

- Si  $m - 2 = 0$ , l'équation devient :  $0x = 0$ .

L'équation est alors toujours vérifiée :  $S = \mathbb{R}$ .

En résumé :

- Si  $m \neq 2$ , alors  $S = \{-2\}$ .
- Si  $m = 2$ , alors  $S = \mathbb{R}$ .

- b) Définition du référentiel :  $D_{\text{def}} = \mathbb{R}$ .

Il s'agit d'une inéquation du premier degré en  $x$  du type  $ax \leq b$ .

$$\left(\frac{2}{m-1} - 1\right)x \leq -\frac{1}{m-1} \Leftrightarrow \frac{3-m}{m-1}x \leq -\frac{1}{m-1}.$$

La résolution de cette inéquation dépend du signe du coefficient  $\frac{3-m}{m-1}$ .



- Si  $m = 0$ , l'inéquation devient  $\frac{x}{x} \geq 0 \iff 1 \geq 0$  et  $x \neq 0$ .
- Si  $m > 0$ , alors  $-m < 0$  et le tableau de signe nous donne

		-m		0	
x		-	-	-	0 +
x + m		-		+	+ +
$\frac{x}{x+m}$		+		-	0 +

On en déduit l'ensemble  $S$  en fonction de  $m$  :

- si  $m < 0$ , alors  $S = ] - \infty, 0 ] \cup ] - m, +\infty [$ ,
- si  $m = 0$ , alors  $S = \mathbb{R}^*$ ,
- si  $m > 0$ , alors  $S = ] - \infty, -m [ \cup [ 0, +\infty [$ .

b)  $\frac{x^2 - m^2}{x + 2m} > 0 \iff \frac{(x + m)(x - m)}{x + 2m} > 0, \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{-2m\}$ .

Le signe de cette fraction rationnelle s'étudie à l'aide d'un tableau de signe. Mais le problème est le même que dans l'exercice précédent, il faut ordonner les trois valeurs  $-2m, -m$  et  $m$ . Et cela dépend du signe de  $m$ .

- si  $m < 0$ , alors  $m < -m < -2m$  et le tableau de signe s'écrit

x		m		-m		-2m		
x + m		-	-	0	+	+	+	
x - m		-	0	+	+	+	+	
x + 2m		-	-	-	-	0	+	
Q		-	0	+	0	-		+

- si  $m = 0$ , alors l'inéquation s'écrit  $\frac{x^2}{x} > 0$ ,
- si  $m > 0$ , alors  $-2m < -m < m$  et le tableau de signe s'écrit

x		-2m		-m		m		
x + m		-	-	0	+	+	+	
x - m		-	-	-	-	0	+	
x + 2m		-	0	+	+	+	+	
Q		-		+	0	-	0	+

On en déduit l'ensemble solution  $S$  en fonction de  $m$  :

- $m < 0$  :  $S = ] m, -m [ \cup ] - 2m, +\infty [$ .
- $m = 0$  :  $S = \mathbb{R}_+^*$ ,
- $m > 0$  :  $S = ] - 2m, -m [ \cup ] m, +\infty [$ .

6. Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels strictement positifs.

On définit la moyenne arithmétique  $m_a$ , la moyenne géométrique  $m_g$  et la moyenne harmonique  $m_h$  de ces deux nombres de la façon suivante :

$$m_a = \frac{1}{2} (a + b) \qquad m_g = \sqrt{ab} \qquad \frac{1}{m_h} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

- a) Comparer la moyenne arithmétique  $m_a$  et la moyenne géométrique  $m_g$ , c'est-à-dire établir si  $m_a \leq m_g$  ou si  $m_a \geq m_g$ .
- b) Dédire de a) une comparaison entre la moyenne géométrique  $m_g$  et la moyenne harmonique  $m_h$ .
- a) Comparer deux nombres revient à étudier le signe de leur différence. Étudions le signe de  $m_a - m_g$ .

$$m_a - m_g = \frac{1}{2} (a + b) - \sqrt{ab} = \frac{1}{2} (a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b}) = \frac{1}{2} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

Donc  $m_a - m_g \geq 0$  et  $m_a \geq m_g$ .

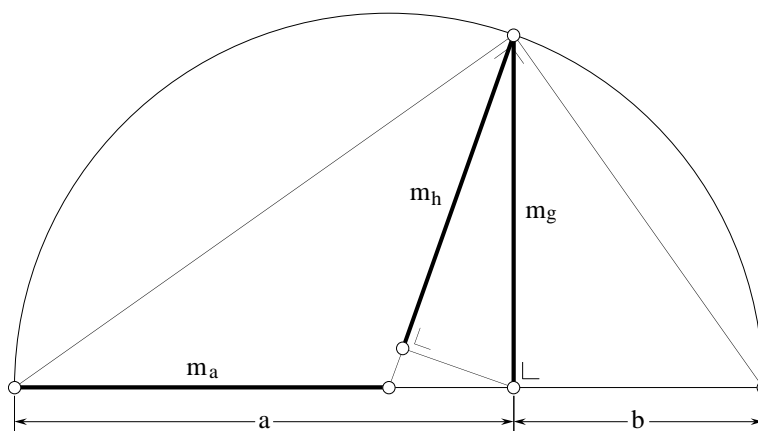
- b) Posons  $p = \frac{1}{a}$  et  $q = \frac{1}{b}$  ; d'après a) nous savons que  $\frac{1}{2} (p + q) \geq \sqrt{pq}$ .

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} \iff \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} \iff \frac{1}{m_h} \geq \frac{1}{m_g}$$

Donc  $m_g \geq m_h$  car  $m_g$  et  $m_h$  sont strictement positifs.

En résumé :  $m_a \geq m_g \geq m_h$ .

Représentation géométrique des moyennes arithmétique  $m_a$ , géométrique  $m_g$  et harmonique  $m_h$  de deux nombres réels  $a$  et  $b$  strictement positifs :



La représentation de la moyenne géométrique  $m_g$  est une conséquence du théorème de la hauteur.

La représentation de la moyenne harmonique  $m_h$  se déduit de la relation  $m_g^2 = m_a \cdot m_h$  (à vérifier) et du théorème d'Euclide.