

Corrigé 11

1. Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes, en précisant leur ensemble de définition et celui de la fonction dérivée.

$$\text{a) } a(x) = x^6 + 15\sqrt[5]{x^2} - \frac{6}{x}$$

$$\text{d) } d(x) = \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}$$

$$\text{b) } b(x) = \frac{4x - 1}{2x + 1}$$

$$\text{e) } e(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$$

$$\text{c) } c(x) = \sqrt{\frac{1 - 2x}{x + 1}}$$

$$\text{f) } f(x) = \sqrt[3]{\left(1 - \sqrt{x^3}\right)^2}$$

$$\text{g) } g(x) = (x - 1)^5(2x + 1)^5; \text{ pour quelles valeurs de } x \text{ la dérivée } g'(x) \text{ est-elle nulle ?}$$

$$\text{h) } h(x) = \sqrt[3]{(x - 1)^2(x + a)}; \text{ pour quelle valeur de } a \text{ la dérivée } h'(x) \text{ est-elle nulle en } x = -1 ?$$

$$\text{a) } a(x) = x^6 + 15\sqrt[5]{x^2} - \frac{6}{x}, \quad D_a = \mathbb{R}^*.$$

On dérive la fonction $a(x)$ terme à terme :

$$a'(x) = (x^6 + 15x^{2/5} - 6x^{-1})' = (x^6)' + (15x^{2/5})' - (6x^{-1})'$$

$$a'(x) = 6x^5 + 15 \cdot \frac{2}{5} x^{-3/5} - 6(-1)x^{-2} = 6 \left(x^5 + \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + \frac{1}{x^2} \right), \quad D_{a'} = \mathbb{R}^*.$$

$$\text{b) } b(x) = \frac{4x - 1}{2x + 1}, \quad D_b = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}.$$

- Une méthode

On dérive la fonction $b(x)$ comme un quotient :

$$b'(x) = \frac{4 \cdot (2x + 1) - (4x - 1) \cdot 2}{(2x + 1)^2} = \frac{6}{(2x + 1)^2}, \quad D_{b'} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}.$$

- Une autre méthode

En effectuant la division euclidienne de $4x - 1$ par $2x + 1$, on obtient

$$b(x) = \frac{4x - 1}{2x + 1} = \frac{(4x + 2) - 3}{2x + 1} = \frac{2(2x + 1) - 3}{2x + 1} = 2 - \frac{3}{2x + 1}.$$

Et on obtient $b'(x)$ en dérivant $\frac{1}{2x+1}$:

$$b'(x) = \left[2 - 3 \cdot \frac{1}{2x+1} \right]' = -3 \left[\frac{1}{2x+1} \right]' = -3 \left[\frac{-2}{(2x+1)^2} \right] = \frac{6}{(2x+1)^2},$$

$$D_{b'} = D_b = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}.$$

c) $c(x) = \sqrt{\frac{1-2x}{x+1}}$, $D_c =]-1; \frac{1}{2}]$. On dérive $c(x)$ comme une racine :

$$c'(x) = \left[\sqrt{\frac{1-2x}{x+1}} \right]' = \frac{\left[\frac{1-2x}{x+1} \right]'}{2 \sqrt{\frac{1-2x}{x+1}}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{1-2x}} \cdot \frac{-2(x+1) - (1-2x)}{(x+1)^2}$$

$$c'(x) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x+1)^3(1-2x)}}, \quad D_{c'} =]-1; \frac{1}{2}[.$$

d) $d(x) = \sqrt{x \sqrt{x} \sqrt{x}}$, $D_d = \mathbb{R}_+$.

On décrit $d(x)$ à l'aide d'exposants fractionnaires :

$$d(x) = \sqrt{x \sqrt{x} \sqrt{x}} = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[8]{x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = x^{\frac{7}{8}}.$$

Puis on dérive l'expression obtenue :

$$d'(x) = \frac{7}{8} \cdot x^{\frac{7}{8}-1} = \frac{7}{8} \cdot x^{-\frac{1}{8}} = \frac{7}{8 \sqrt[8]{x}}, \quad D_{d'} = \mathbb{R}_+^*.$$

e) $e(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} - x}$, $D_e = \mathbb{R}$.

- Une méthode

On dérive $e(x)$ comme un quotient :

$$\begin{aligned} e'(x) &= \left[\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} - x} \right]' \\ &= \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1 \right) \cdot (\sqrt{x^2+1} - x) - (\sqrt{x^2+1} + x) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right)}{(\sqrt{x^2+1} - x)^2} \\ &= \frac{(x + \sqrt{x^2+1}) \cdot (\sqrt{x^2+1} - x) - (\sqrt{x^2+1} + x) \cdot (x - \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1} \cdot (\sqrt{x^2+1} - x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[(x^2 + 1) - x^2] - [x^2 - (x^2 + 1)]}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)^2}{[(x^2 + 1) - x^2]^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right)^2, \quad D_{e'} = \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

- Une autre méthode

On commence par simplifier l'expression de $e(x)$ en amplifiant le dénominateur par son expression conjuguée :

$$e(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)^2}{(x^2 + 1) - x^2} = \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right)^2.$$

Puis on dérive l'expression obtenue comme un carré :

$$\begin{aligned}
e'(x) &= 2 \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right) \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right)' = 2 \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right) \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + 1 \right) \\
e'(x) &= \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right)^2, \quad D_{e'} = \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$$\text{f) } f(x) = \sqrt[3]{\left(1 - \sqrt{x^3}\right)^2}, \quad D_f = \mathbb{R}_+. \quad f(x) = \left(1 - x^{3/2}\right)^{2/3}.$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \left(1 - x^{3/2}\right)^{-1/3} \left(1 - x^{3/2}\right)' = \frac{2}{3} \left(1 - x^{3/2}\right)^{-1/3} \left(-\frac{3}{2} x^{1/2}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1 - \sqrt{x^3}}}, \quad D_{f'} = \mathbb{R}_+ - \{1\}.$$

$$\text{g) } g(x) = (x - 1)^5(2x + 1)^5, \quad D_g = \mathbb{R}.$$

- On dérive $g(x)$ comme un produit :

$$g'(x) = [5(x - 1)^4] \cdot (2x + 1)^5 + (x - 1)^5 \cdot [5(2x + 1)^4 \cdot 2],$$

puis on met en évidence les facteurs communs :

$$g'(x) = 5(x - 1)^4(2x + 1)^4 [(2x + 1) + 2(x - 1)] = 5(x - 1)^4(2x + 1)^4(4x - 1).$$

$$D_{g'} = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; 1\right\}.$$

- Ou on dérive $g(x)$ exprimé sous la forme $w^5(x)$:

$$g'(x) = \left([(x-1)(2x+1)]^5 \right)' = 5[(x-1)(2x+1)]^4 [(x-1)(2x+1)]',$$

$$g'(x) = 5(x-1)^4(2x+1)^4 [2x^2 - x - 1]' = 5(x-1)^4(2x+1)^4(4x-1).$$

$$D_{g'} = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; 1 \right\}.$$

h) $h(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2 \cdot (x+a)}, \quad D_h = \mathbb{R}, \quad h(x) = (x-1)^{2/3} \cdot (x+a)^{1/3}.$

On dérive $h(x)$ comme un produit :

$$h'(x) = \left[\frac{2}{3} \cdot (x-1)^{-1/3} \right] \cdot (x+a)^{1/3} + (x-1)^{2/3} \cdot \left[\frac{1}{3} (x+a)^{-2/3} \right],$$

$$h'(x) = \frac{2(x+a)^{1/3}}{3(x-1)^{1/3}} + \frac{(x-1)^{2/3}}{3(x+a)^{2/3}}$$

et en mettant les deux termes de cette somme au même dénominateur :

$$h'(x) = \frac{2(x+a) + (x-1)}{3 \sqrt[3]{(x-1)(x+a)^2}} = \frac{3x + 2a - 1}{3 \sqrt[3]{(x-1)(x+a)^2}}, \quad D_{h'} = \mathbb{R} \setminus \{1; -a\}.$$

$$h'(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3(-1) + 2a - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2.$$

2. Déterminer l'équation de la parabole d'équation $y = x^2 + px + q$ tangente à la droite d'équation $y - 3x - 1 = 0$ au point T d'abscisse $x_T = 1$.

Soit $f(x) = x^2 + px + q$.

La droite t d'équation $y - 3x - 1 = 0$ est tangente à la parabole Γ d'équation $y = f(x)$ au point T d'abscisse $x_T = 1$ si et seulement si

- $T \in t \quad \Leftrightarrow \quad y_T = 4, \quad T(1, 4).$
- $T \in \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad 4 = 1 + p + q \quad \Leftrightarrow \quad p + q = 3.$
- La pente de la droite t est égale à la dérivée de f en x_T .

$$f'(x_T) = 2x_T + p = 2 + p, \quad f'(x_T) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + p = 3 \quad \Leftrightarrow \quad p = 1.$$

D'où : $p = 1$ et $q = 2$, $\Gamma : y = x^2 + x + 2$.

3. Déterminer les points de tangence T des droites passant par l'origine et tangentes à la courbe Γ d'équation $y = \frac{3x+1}{x^2-x+4}$.

Soit $f(x) = \frac{3x+1}{x^2-x+4}$. L'équation de la tangente t à Γ en x_0 s'écrit :

$$t: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

La tangente t passe par l'origine O , donc les coordonnées $(0, 0)$ vérifient l'équation de t :

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow f(x_0) = x_0 \cdot f'(x_0).$$

Calcul de la fonction dérivée de f :

$$f'(x) = \frac{3(x^2 - x + 4) - (3x + 1)(2x - 1)}{(x^2 - x + 4)^2} = \frac{-3x^2 - 2x + 13}{(x^2 - x + 4)^2}.$$

Résolution de l'équation en x_0 :

$$f(x_0) = x_0 \cdot f'(x_0) \Leftrightarrow \frac{3x_0 + 1}{x_0^2 - x_0 + 4} = x_0 \cdot \frac{-3x_0^2 - 2x_0 + 13}{(x_0^2 - x_0 + 4)^2}$$

$$\Leftrightarrow (3x_0 + 1)(x_0^2 - x_0 + 4) = x_0 \cdot (-3x_0^2 - 2x_0 + 13) \Leftrightarrow 6x_0^3 - 2x_0 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 1) \underbrace{(6x_0^2 - 6x_0 + 4)}_{\Delta < 0} = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1. \quad \text{D'où : } T(-1; -\frac{1}{3}).$$

4. Soient f une fonction dérivable en $x_0 = 2$, Γ_1 la courbe d'équation $y = f(x)$ et t_1 la tangente à Γ_1 en $x_0 = 2$.

$$t_1: 3x - 2y - 4 = 0.$$

Soient g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$, Γ_2 la courbe d'équation $y = g \circ f(x)$ et t_2 la tangente à Γ_2 en $x_0 = 2$.

Déterminer l'équation cartésienne de t_2 .

L'équation cartésienne de t_2 s'écrit

$$y - g \circ f(x_0) = (g \circ f)'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

- Calcul de $g \circ f(x_0)$:
 - $(x_0, f(x_0))$ est le point de contact entre Γ_1 et t_1 , on détermine donc $f(x_0)$ comme l'ordonnée du point de t_1 d'abscisse x_0 .

$$(x_0, f(x_0)) \in t_1 \Leftrightarrow 3x_0 - 2f(x_0) - 4 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 1.$$
 - On en déduit $g \circ f(x_0)$: $g \circ f(x_0) = g[f(x_0)] = \frac{1}{x^2 + 1} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$.
- Calcul de $(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] \cdot f'(x_0)$:
 - $f'(x_0)$ est la pente de t_1 : $y = \frac{3}{2}x - 2$, d'où $f'(x_0) = \frac{3}{2}$.
 - $g'[f(x_0)] = \left[\frac{1}{x^2 + 1} \right]'_{x=1} = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \Big|_{x=1} = -\frac{1}{2}$
 - On en déduit $(g \circ f)'(x_0)$: $(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] \cdot f'(x_0) = -\frac{3}{4}$.
- L'équation cartésienne de t_2 s'écrit donc

$$y - g \circ f(x_0) = (g \circ f)'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow 3x + 4y - 8 = 0.$$

5. On donne deux arcs de parabole Γ_1 et Γ_2 définis par

$$\Gamma_1 : f_1(x) = -2x^2 + 6 \quad \text{et} \quad \Gamma_2 : f_2(x) = -(x - 1)^2.$$

Déterminer l'équation cartésienne de la tangente t commune aux courbes Γ_1 et Γ_2 , de pente négative.

Soit m_1 la pente de la tangente à Γ_1 en $T_1(x_1, y_1)$:

$$m_1 = f_1'(x_1) = -4x_1.$$

Soit m_2 la pente de la tangente à Γ_2 en $T_2(x_2, y_2)$:

$$m_2 = f_2'(x_2) = -2(x_2 - 1).$$

La tangente à Γ_1 en T_1 coïncide avec la tangente à Γ_2 en T_2 donc les pentes m_1 et m_2 sont égales.

$$m_1 = m_2 \Leftrightarrow -4x_1 = -2(x_2 - 1) \Leftrightarrow x_2 = 2x_1 + 1.$$

La tangente t commune aux deux paraboles Γ_1 et Γ_2 passe par T_1 et T_2 et a pour pente $m = m_1 = m_2$:

$$y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2) \quad \text{avec} \quad y_1 = f_1(x_1), \quad y_2 = f_2(x_2) \quad \text{et} \quad x_2 = 2x_1 + 1.$$

On exprime cette relation en fonction de x_1 (ou de x_2) uniquement :

$$\begin{aligned} f_1(x_1) - f_2(2x_1 + 1) &= -4x_1 [x_1 - (2x_1 + 1)] \\ \Leftrightarrow (-2x_1^2 + 6) - [-(2x_1)^2] &= -4x_1 [-x_1 - 1] \Leftrightarrow 2x_1^2 + 4x_1 - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 - 3 &= 0 \Leftrightarrow (x_1 + 3)(x_1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

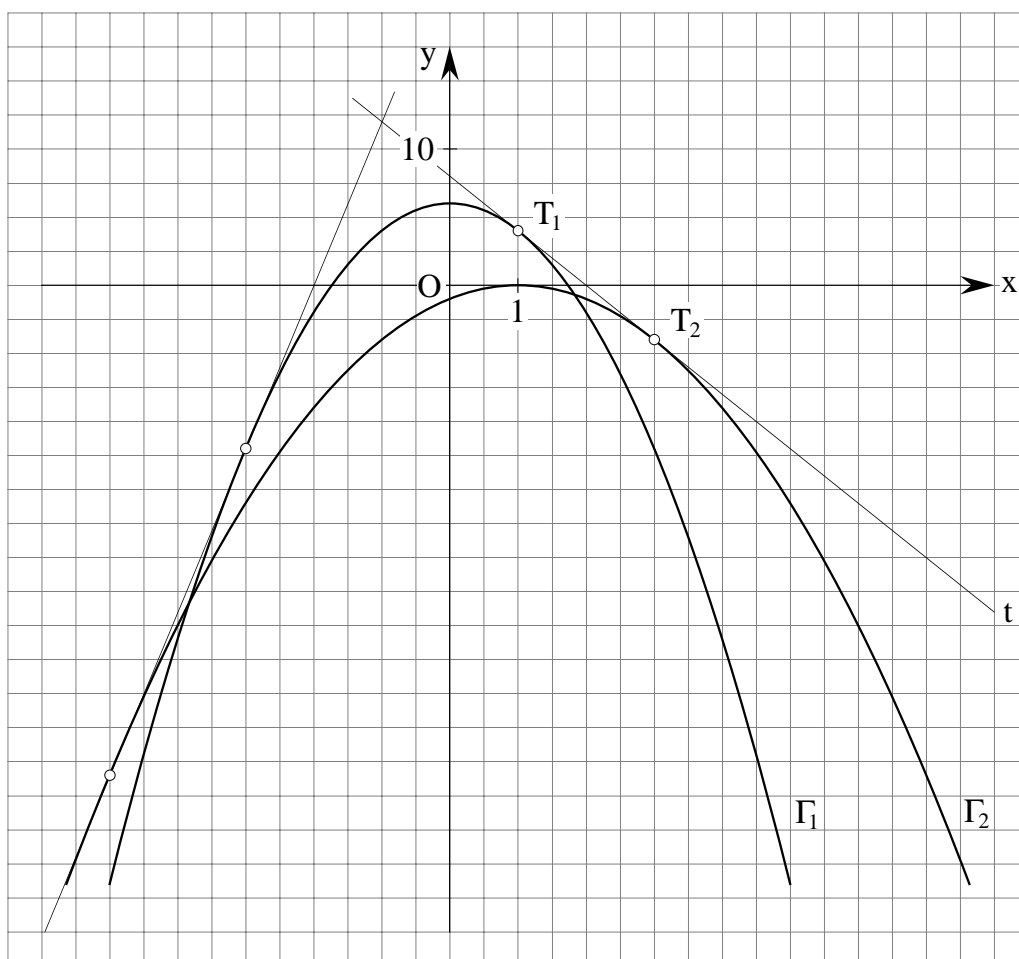
La pente de la tangente commune est négative : $-4x_1 < 0 \Leftrightarrow x_1 > 0$.

On retient donc la solution $x_1 = 1$.

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad T_1(1, 4), \quad T_2(3, -4) \quad \text{et} \quad m = -4.$$

L'équation de la tangente t commune aux deux arcs de courbes Γ_1 et Γ_2 , de pente négative, s'écrit donc :

$$t: \quad y - 4 = -4(x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad 4x + y - 8 = 0.$$



6. Montrer que les graphes des deux fonctions f et g admettent un unique point d'intersection,

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 2x + 3},$$

puis calculer l'angle φ entre les deux courbes en ce point.

- Recherche du point d'intersection

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 1}{x} - \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 2x + 3} = 0$$

$$\frac{(2x - 1)(x^2 - 2x + 3) - x(x^2 - 3x + 4)}{x(x^2 - 2x + 3)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 3}{x(x^2 - 2x + 3)} = 0$$

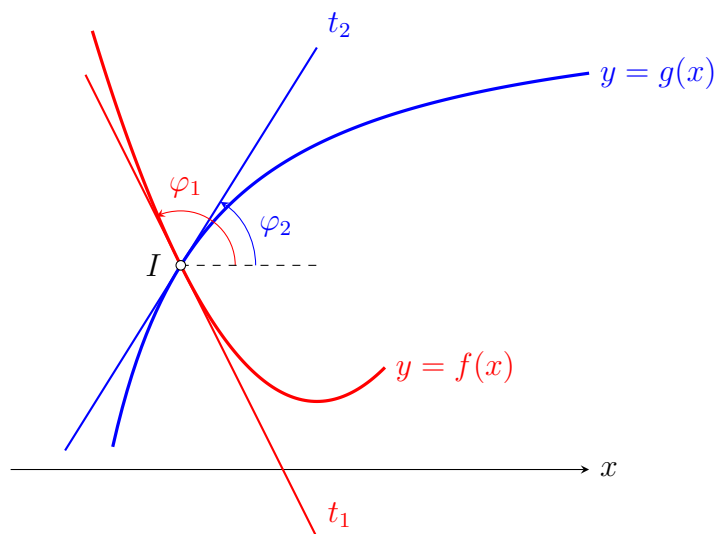
$x = 1$ est un zéro du numérateur : $x^3 - 2x^2 + 4x - 3 = (x - 1)\underbrace{(x^2 - x + 3)}_{\Delta < 0}$.

L'unique point d'intersection se trouve en $x = 1 : I(1; 1)$.

- Angle entre les deux courbes

Au point d'intersection $I(1; 1)$, l'angle entre ces deux courbes est l'angle défini par leur tangente en ce point.

Figure d'étude :



* Pente m_1 de la tangente t_1 à $y = f(x)$ au point I :

$$m_1 = f'(1) = \left[\frac{2x - 1}{x} \right]'_{x=1} = \left[2 - \frac{1}{x} \right]'_{x=1} = \left[\frac{1}{x^2} \right]'_{x=1} = 1.$$

* Pente m_2 de la tangente t_2 à $y = g(x)$ au point I :

$$m_2 = g'(1) = \left[\frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 2x + 3} \right]'_{x=1} = \left[1 + \frac{-x + 1}{x^2 - 2x + 3} \right]'_{x=1}$$

$$= \left[\frac{-(x^2 - 2x + 3) - (-x + 1)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 3)^2} \right]'_{x=1} = -\frac{1}{2}.$$

* Calcul de l'angle φ :

On détermine $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}[$ à partir de $m_1 = \tan \varphi_1$ et de $m_2 = \tan \varphi_2$.

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \tan |\varphi_1 - \varphi_2| = |\tan(\varphi_1 - \varphi_2)| = \left| \frac{\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2}{1 + \tan \varphi_1 \cdot \tan \varphi_2} \right| \\ &= \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| = \left| \frac{1 - (-\frac{1}{2})}{1 + 1 \cdot (-\frac{1}{2})} \right| = 3, \end{aligned}$$

$$\varphi = \arctan(3).$$

7. Soit \widehat{b} la fonction définie dans l'exercice 7 de la série 10 (prolongée par continuité de la fonction b donnée dans l'exercice 4 b) de la série 9) :

$$\widehat{b}(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x - 1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad \widehat{b}(0) = 1.$$

La fonction \widehat{b} est-elle continûment dérivable en $x_0 = 0$?

Dans l'exercice 7 de la série 10, nous avons montré que la fonction \widehat{b} est dérivable en $x_0 = 0$. Le nombre dérivée $\widehat{b}'(0)$ est défini par

$$\widehat{b}'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\widehat{b}(h) - \widehat{b}(0)}{h} = \frac{1}{2}.$$

La fonction \widehat{b} est continûment dérivable en $x_0 = 0$ si et seulement si la fonction \widehat{b}' est continue en $x_0 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 0} \widehat{b}'(x) = \widehat{b}'(0)$.

• Expression de la fonction dérivée $\widehat{b}'(x)$ pour $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \widehat{b}'(x) &= \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x - 1}{x} \right)' = \frac{\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} + 1 \right) x - (\sqrt{x^2 + 1} + x - 1) 1}{x^2} \\ &= \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})x - (x^2 + 1) - x\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

• Calcul de la limite de $\widehat{b}'(x)$ lorsque x tend vers 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \widehat{b}'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1 + \sqrt{x^2 + 1})(1 + \sqrt{x^2 + 1})}{x^2 \sqrt{x^2 + 1} (1 + \sqrt{x^2 + 1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 \sqrt{x^2 + 1} (1 + \sqrt{x^2 + 1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} (1 + \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

• Conclusion.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \widehat{b}'(x) = \frac{1}{2} = \widehat{b}'(0) \quad \text{donc la fonction } \widehat{b}' \text{ est continue en } x_0 = 0.$$

9. Parmi les énoncés suivants, déterminer s'ils sont vrais ou faux. S'ils sont vrais, justifier. S'ils sont faux, donner un contre-exemple.

- a) Soient f, g deux fonctions réelles telles que $h = g \circ f$ soit continue en $x_0 \in \mathbb{R}$. Si g est continue sur \mathbb{R} , alors f est continue en x_0 .
- b) Si f est dérivable en $x = 0$, alors $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h) - f(h)}{h} = 2f'(0)$.
- c) Soient f et g deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} . Si $f'(0) = 0$, alors $(f \circ g)'(0) = 0$.
- d) Si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, alors f' est continue sur I .

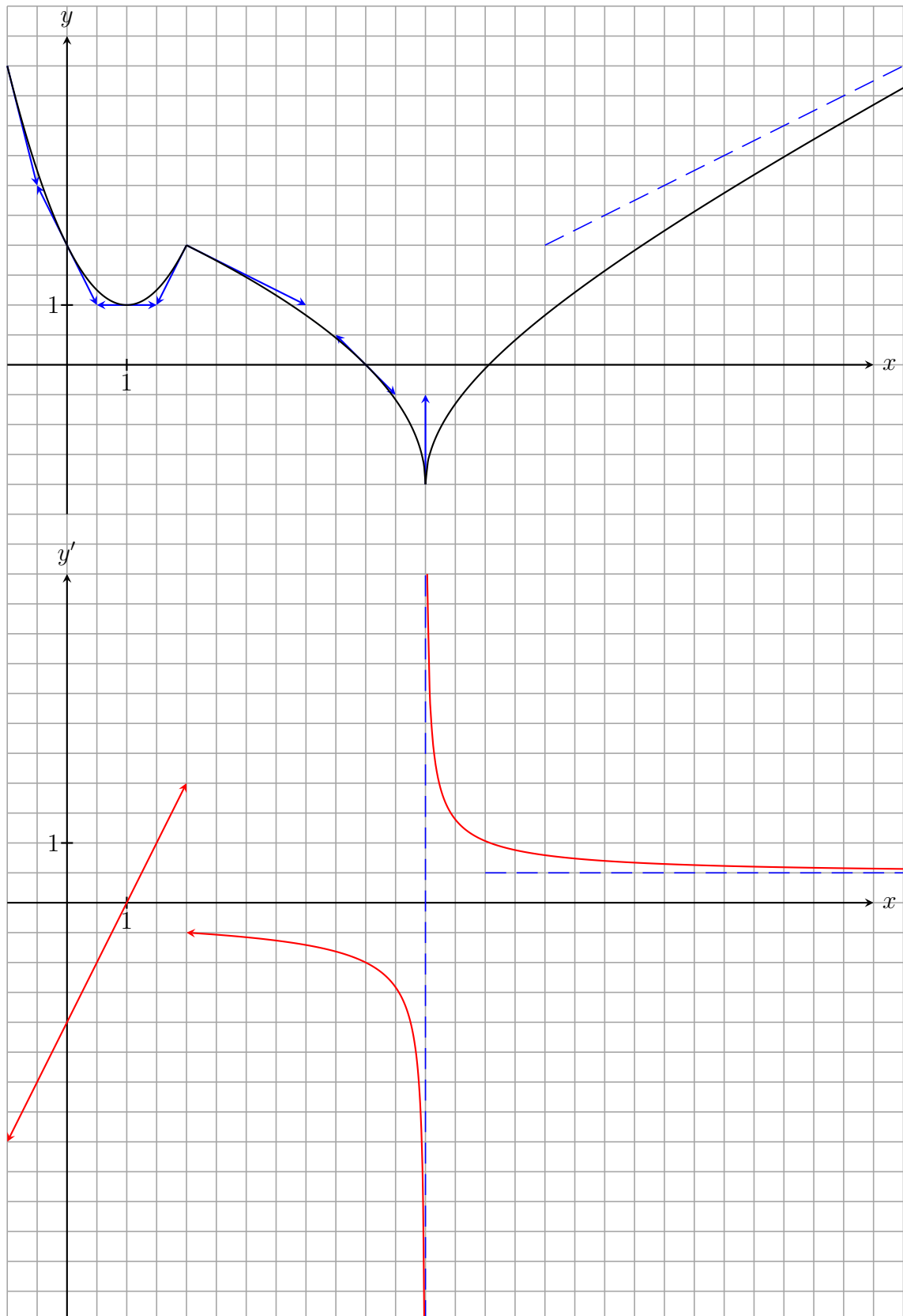
-
- a) Faux. En effet, soit g la fonction constante nulle et f donnée par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Alors $h = g \circ f = 0$ est continue en $x_0 = 0$ mais f ne l'est pas.
- b) Vrai. En effet, on calcule :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h) - f(h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h) - f(0) + f(0) - f(h)}{h} \\ &= 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h) - f(0)}{3h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 2f'(0). \end{aligned}$$

- c) Faux. En effet, la formule de dérivation est $(f \circ g)'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0)$ et non pas $f'(0) \cdot g'(0)$. Par exemple, on peut choisir $f(x) = x^3$ et $g(x) = x + 1$. On a bien $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$ mais $(f \circ g)'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0) = 3 \cdot 1^2 \cdot 1 = 3 \neq 0$.
- d) Faux. Prendre par exemple $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(0) = 0$ et $I = \mathbb{R}$. Alors $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f'(0) = 0$. Mais f' n'est pas continue en $x = 0$.

10. On donne ci-dessous la courbe Γ d'équation $y = f(x)$.

Esquisser le graphe de la fonction dérivée de f .



11. On donne ci-dessous la courbe Γ d'équation $y = f(x)$.

Esquisser le graphe de la fonction dérivée de f .

