Corrigé 10

1. Peut-on trouver des valeurs des constantes A et B de sorte que les fonctions suivantes soient continues en $x = 0$?

a) $a(x) = \dfrac{|x|(x+1)+x}{x^2(x+1)}$ si $x \neq 0$ et $a(0) = A$,

b) $b(x) = \dfrac{x\sqrt{3-4\,\cos x+\cos^2 x}}{|x|\,\sin x}$ si $x \neq 0$ et $b(0) = B$.

---

a) La fonction a est continue en $x = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} a(x) = a(0)$.

La présence de la valeur absolue nous oblige à calculer les limites à gauche et à droite de a en $x = 0$:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} a(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x\,(x+1)+x}{x^2(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x^2}{x^2(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{x+1} = -1\,,$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} a(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\,(x+1)+x}{x^2(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\,(x+2)}{x^2(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+2}{x\,(x+1)} = +\infty\,.$

La fonction a n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0, donc $\forall\, A \in \mathbb{R}$, la fonction a n'est pas continue en $x = 0$.

b) La fonction b est continue en $x = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} b(x) = b(0)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} b(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{3-4\,\cos x+\cos^2 x}}{|x|\,\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{(1-\cos x)\,(3-\cos x)}}{|x|\,\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{\frac{x^2}{2}\,(3-\cos x)}}{|x|\,x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\,|x|\,\sqrt{\frac{3-\cos x}{2}}}{|x|\,x} \\
&= \lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{3-\cos x}{2}} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

La fonction b est donc continue en $x = 0$ si et seulement si $B = 1$.

2. a) La fonction définie par $f(x) = |\tan x| \cdot \cos^3(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est-elle continue en $x = 0$?

b) Montrer que la fonction $f(x) = x - E(x^2)$ est continue à droite en $x = \sqrt{2}$.

---

a) La fonction f est continue en $x = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

$$\lim_{x \to 0} |\tan x| = 0 \quad \text{et} \quad \cos^3(\tfrac{1}{x}) \text{ est borné} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} |\tan x| \cdot \cos^3(\tfrac{1}{x}) = 0 .$$

Donc f est continue en $x = 0$.

b) La fonction f est continue à droite en $x = \sqrt{2}$ ssi $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^+} f(x) = f(\sqrt{2})$.

$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - E(2) = \sqrt{2} - 2$, calculons $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^+} f(x)$:

Sur un voisinage à droite de $x = \sqrt{2}$: $x \in \,]\sqrt{2}, \sqrt{2} + \delta[$, $(0 < \delta < \sqrt{3} - \sqrt{2})$, on a $E(x^2) = 2$ car la fonction x^2 est croissante sur ce voisinage, donc

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^+} \left[x - E(x^2) \right] = \sqrt{2} - 2 = f(\sqrt{2}) .$$

La fonction f est continue à droite en $x = \sqrt{2}$.

3. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x^2)}{\sin^2 x - \tan^2 x} .$$

La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $x = 0$?

La fonction f est prolongeable par continuité en $x = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{\sin^2 x - \tan^2 x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{\tan^2 x \, (\cos^2 x - 1)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{\tan^2 x \, (\cos x - 1)\,(\cos x + 1)} \\
&= -\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{\tan^2 x \, (1 - \cos x)\,(1 + \cos x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= -\lim_{x\to 0} \frac{\frac{(x^2)^2}{2}}{x^2\,\left(\frac{x^2}{2}\right)\,(1+\cos x)}\\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\\ &= -\frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

La fonction f est donc prolongeable par continuité en $x=0$.

Et la fonction prolongée s'écrit :

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x\neq 0\\ -\frac{1}{2} & \text{si} \quad x=0\,.\end{cases}$$

Par construction, cette fonction $\widehat{f}$ est continue en $x=0$.

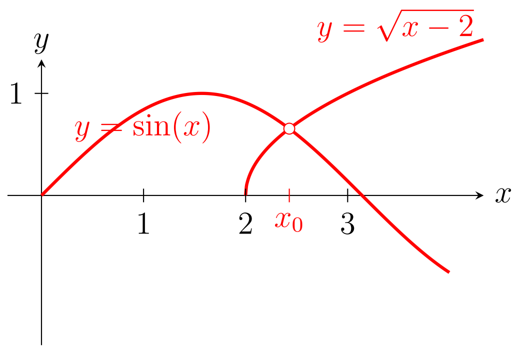
4. Montrer que les deux courbes Γ_1 et Γ_2 admettent un point d'intersection, puis localiser son abscisse sur un intervalle de longueur Δ :

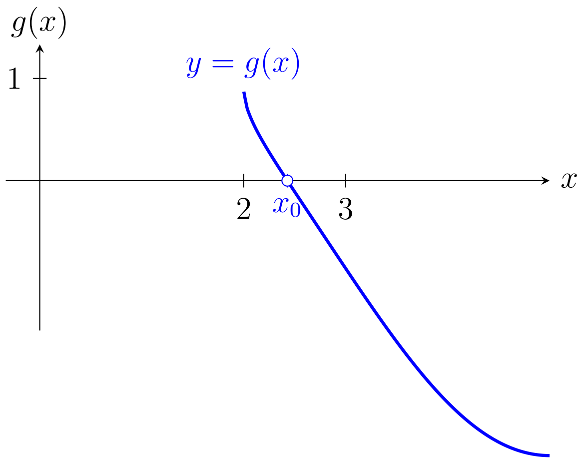
a) $\Gamma_1:\ y=\sin(x)\,,\qquad \Gamma_2:\ y=\sqrt{x-2}\,,\qquad \Delta=1\,.$

b) $\Gamma_1:\ y=\cos(x)\,,\qquad \Gamma_2:\ y=x^3\,,\qquad \Delta=\frac{\pi}{12}\,.$

---

a) On cherche à montrer que la fonction différence $g(x)=\sin(x)-\sqrt{x-2}$ admet un zéro.





La fonction différence $g(x)=\sin(x)-\sqrt{x-2}$ est continue sur $[\,2\,,\,+\infty\,[$. On peut donc lui appliquer le théorème de la valeur intermédiaire.

- $g(2) = \sin(2) > 0$ et $g(\pi) = -\sqrt{\pi - 2} < 0\,,$

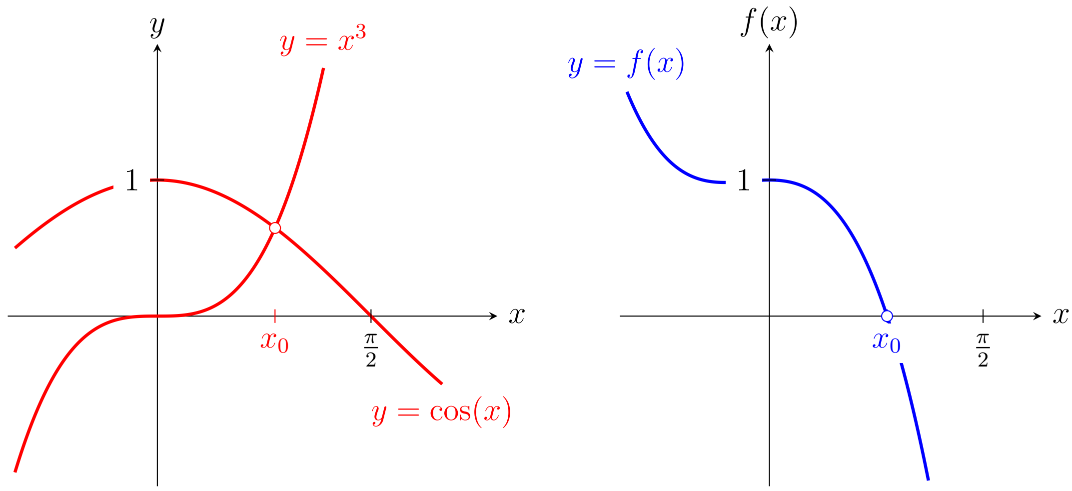
  donc $\exists\, x_0 \in \,]\,2\,,\,\pi\,[$ tel que $g(x_0) = 0\,.$

- Plus précisément, comme $\sin(3) < \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, on a en fait

  $$g(3) = \sin(3) - \sqrt{1} < 0\,,$$

  donc $\exists\, x_0 \in \,]\,2\,,\,3\,[$ tel que $g(x_0) = 0\,,$ d'où $\sin(x_0) = \sqrt{x_0 - 2}\,.$

b) On cherche à montrer que la fonction différence $f(x) = \cos(x) - x^3$ admet un zéro.



La fonction différence $f(x) = \cos(x) - x^3$ est continue sur $\mathbb{R}$. On peut donc lui appliquer le théorème de la valeur intermédiaire.

- $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 > 0$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{\pi}{3}\right)^3 < 0\,,$

  donc $\exists\, x_0 \in \,]\,\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{3}\,[$ tel que $f(x_0) = 0\,.$

- Mais l'intervalle $]\,\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{3}\,[$ est trop grand, on évalue f, par exemple en $x = \frac{\pi}{4}$:

  $$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 > 0\,,$$

  donc $\exists\, x_0 \in \,]\,\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{3}\,[$ tel que $f(x_0) = 0\,,$ d'où $\cos(x_0) = x_0^3\,.$

5. Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en $x = 0$?

a) $a(x) = \tan|x|$

b) $b(x) = x\,\sin|x|$

c) $c(x) = \sin(x)\,\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $c(0) = 0$

d) $d(x) = \sin^2(x)\,\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $d(0) = 0\,.$

---

a) La fonction a est dérivable en $x = 0$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{a(0+h) - a(0)}{h}$ existe.

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\tan|0+h| - \tan 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\tan(-h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} -\frac{\tan h}{h} = -1$$

$$\text{et} \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{\tan|0+h| - \tan 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\tan|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\tan h}{h} = 1\,.$$

$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{a(h)-a(0)}{h}$ n'existe pas. La fonction a n'est pas dérivable en $x=0$.

b) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{b(h)-b(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\,\sin|h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \sin|h| = 0\,.$

La fonction b est donc dérivable en $x=0$ et $b'(0)=0$.

c) La fonction $c(x)$ est continue en $x=0$, car

$$\lim_{x\to 0} c(x) = \lim_{x\to 0} \underbrace{\sin(x)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\cos(\tfrac{1}{x})}_{\text{borné}} = 0 = c(0)\,.$$

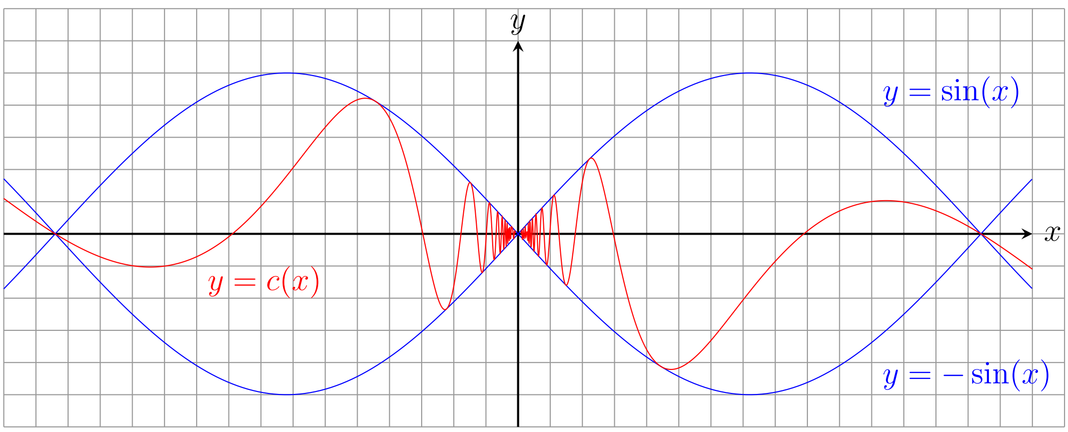
La question de la dérivabilité de $c(x)$ en $x=0$ a donc du sens.

$$\lim_{h\to 0} \frac{c(h)-c(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)\,\cos(\frac{1}{h})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \cdot \cos(\tfrac{1}{h})\,.$$

La fonction $\cos(\frac{1}{h})$ n'admet pas de limite lorsque $h\to 0$, mais elle est bornée et $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \neq 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{c(h)-c(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1\neq 0} \cdot \underbrace{\cos(\tfrac{1}{h})}_{\text{borné}}$ n'existe pas.

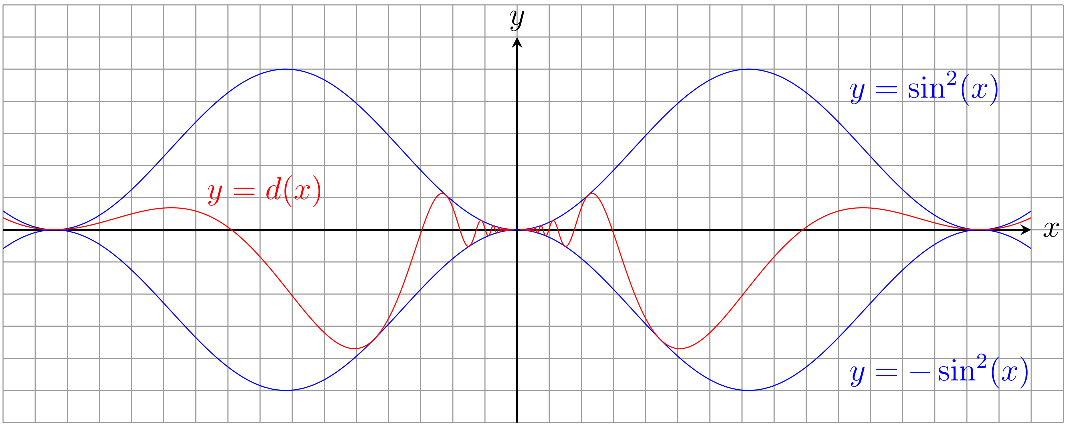
La fonction c n'est pas dérivable en $x=0$.



d) $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{d(h)-d(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin^2(h)\cdot\cos\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}\cdot\sin(h)\cdot\cos\left(\frac{1}{h}\right)$,

$\cos\left(\frac{1}{h}\right)$ est borné et n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0, mais $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}\cdot\sin(h) = 0$. Donc $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{d(h)-d(0)}{h} = 0$.

La fonction d est donc dérivable en $x=0$ et $d'(0)=0$.



6. On considère la fonction g définie dans un voisinage de $x_0 = \frac{\pi}{2}$ par

$$g(x) = \frac{\cos(2x)+\sin x}{\sin(2x)} \quad \text{si } x \neq \tfrac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad g(\tfrac{\pi}{2}) = 0\,.$$

Montrer à l'aide de la définition que la fonction g est dérivable en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

La fonction g est dérivable en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ si et seulement si $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{g(\frac{\pi}{2}+h)-g(\frac{\pi}{2})}{h}$ existe.

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(\frac{\pi}{2}+h)-g(\frac{\pi}{2})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\cos\left[2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\right]+\sin(\frac{\pi}{2}+h)}{\sin\left[2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\right]} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(\pi+2h)+\sin(\frac{\pi}{2}+h)}{h\cdot\sin(\pi+2h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-\cos 2h+\cos h}{-h\cdot\sin 2h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\cos^2 h+\cos h+1}{-h\cdot\sin 2h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1-\cos h)(1+2\cos h)}{-h\cdot\sin 2h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\frac{h^2}{2})\cdot(1+2\cos h)}{-h\cdot(2h)} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{4}\,(1+2\cos h) = -\frac{3}{4}\,.$$

La fonction g est donc dérivable en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ et $g'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{3}{4}$.

7. Montrer que la fonction $b(x)$ de l'exercice **4.** b) de la série 9 peut être prolongée par continuité en $x_0 = 0$.

Est-elle alors dérivable en $x_0 = 0$? $\qquad b(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x}$.

Nous avons montré dans la série 9 que $\lim\limits_{x\to 0} b(x) = 1$.

On peut donc prolonger la fonction b par continuité en $x = 0$ en posant $\widehat{b}(0) = \lim\limits_{x\to 0} b(x) = 1$.

$$\widehat{b}(x) = \begin{cases} b(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction $\widehat{b}$ est dérivable en $x = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\widehat{b}(h)-\widehat{b}(0)}{h}$ existe.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\widehat{b}(h)-\widehat{b}(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sqrt{h^2+1}+h-1}{h}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2+1}-1}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h^2\left(\sqrt{h^2+1}+1\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h^2+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

La fonction $\widehat{b}$ est donc dérivable en $x = 0$ et $\widehat{b}\,'(0) = \dfrac{1}{2}$.

8. Sans utiliser les règles de dérivation, déterminer l'équation de la tangente t au graphe de f en x_0 :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x_0 = 2.$$

La tangente t est la droite passant par le point de tangence $(x_0\,,\, f(x_0))$ et ayant pour pente le nombre dérivé $f'(x_0)$.

Son équation cartésienne s'écrit donc : $y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$.

- Calcul du nombre dérivé

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(2+h)^2}-\frac{1}{(2)^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2)^2-(2+h)^2}{h\,(2)^2\,(2+h)^2}$$

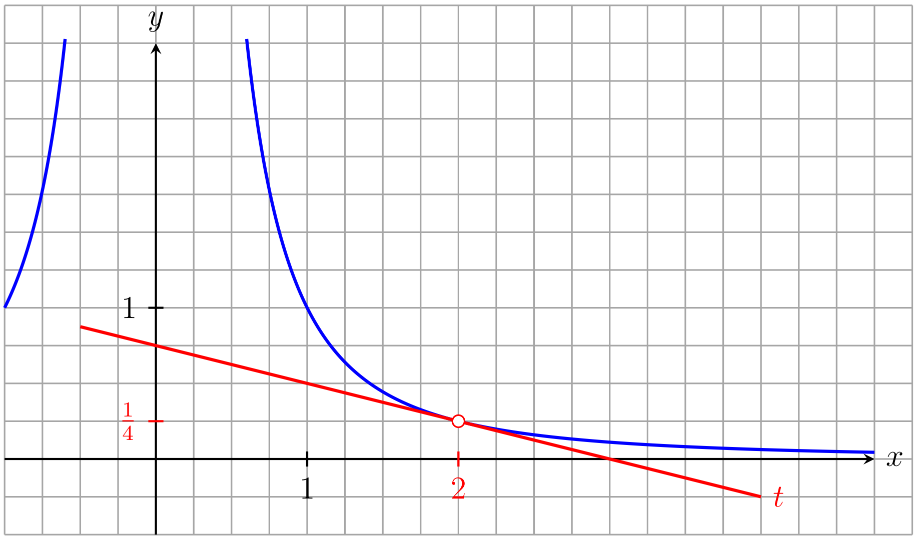
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-4h-h^2}{4h\,(2+h)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-4-h}{4\,(2+h)^2} = -\frac{1}{4}.$$

- Conclusion

$$x_0 = 2\,, \qquad f(x_0) = \frac{1}{4}\,, \qquad f'(x_0) = -\frac{1}{4}\,.$$

La tangente t a pour équation :

$$t: \quad y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\,(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad x + 4y - 3 = 0\,.$$



9. Exercice facultatif.

Soit f une fonction définie sur un voisinage pointé de x_0.

On dit que f admet une dérivée symétrique en x_0 si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ existe. On note alors cette limite $f'_s(x_0)$.

$*$ Montrer que si f est dérivable en x_0, alors $f'_s(x_0)$ existe.

$*$ Vérifier que la réciproque est fausse.

$*$ On cherche à exprimer $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ à l'aide du rapport de Newton de f en x_0.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right]$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} &= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta}\\
&= \frac{1}{2}\,f'(x_0)+\frac{1}{2}\,f'(x_0)\,,\quad \text{car } f \text{ est dérivable en } x_0\,,\\
&= f'(x_0)\,.
\end{aligned}$$

Donc si f est dérivable en x_0, la dérivée symétrique en x_0 existe et elle coïncide avec le nombre dérivé.

∗ On montre que la réciproque est fausse en exhibant un contre-exemple.

Soient $f(x)=|x|$ et $x_0=0$.

f n'est pas dérivable en $x=0$, mais par contre, elle admet une dérivée symétrique en ce point :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0-h|}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|h|}{2h}=0\,.$$

$f'_s(0)=0$, mais $f'(0)$ n'existe pas.

De façon plus générale, toute fonction paire définie sur un voisinage épointé de $x_0=0$ admet une dérivée symétrique nulle en $x_0=0$.