Série 9

Exercice 1. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (x + 5y, x - 3y).$$

a. Calculer le rang de f. En déduire son image et son noyau.

b. L'application f est-elle bijective ? Si oui, en donner l'application réciproque f^{-1}.

Solution: La matrice de f dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Calculons le déterminant de A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 5 \cdot 1 = -8$$

Comme celui-ci est non nul, on peut conclure que A est de rang 2 (cela peut aussi se déduire du fait que les colonnes de A - ou ses lignes - ne sont pas proportionnelles). On sait alors que :

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} f = \{(0, 0)\}.$$

b. Comme f est de rang 2, on sait qu'elle est bijective et que l'application réciproque f^{-1} est linéaire, de matrice :

$$A^{-1} = \tfrac{1}{-8} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Elle est donc décrite par la formule :

$$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to \tfrac{1}{8}(3x + 5y, x - y).$$

Exercice 2. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{2}y, 2x + 3y).$$

a. Quel est le rang de f ? Donner des équations cartésiennes de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

b. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, décrire l'ensemble $f^{-1}(\{(a, b)\})$ des antécédents de (a, b) par f.

Solution:

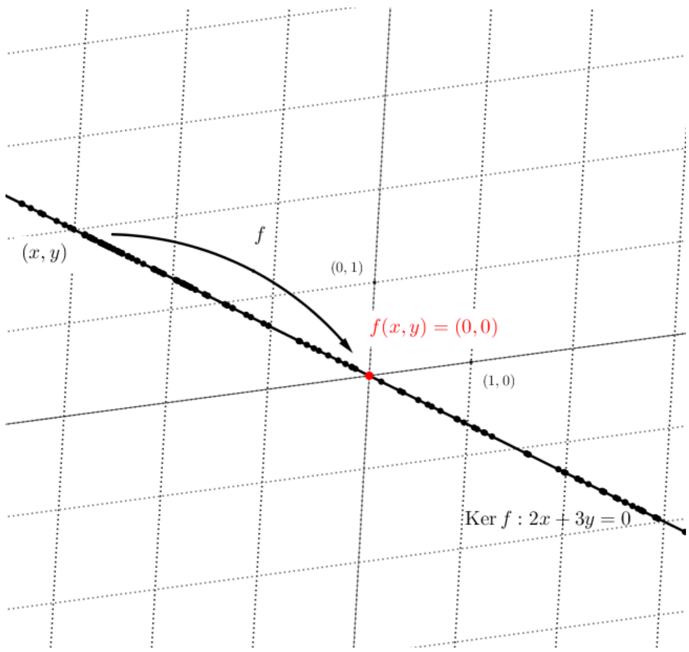
a. La matrice de f dans la base canonique est :

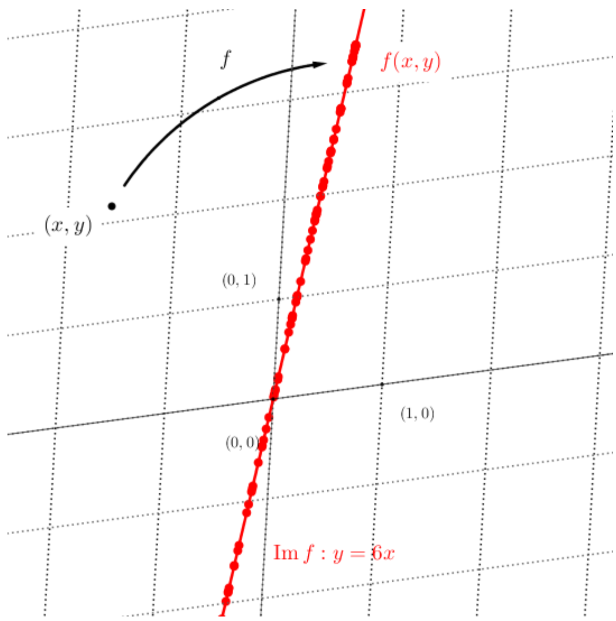
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

L'application f est de rang 1 et on peut la réécrire sous la forme :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{2}y)(1, 6).$$

On voit que le noyau de f est la droite vectorielle d'équation $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 0$ (ou encore $2x + 3y = 0$) et que l'image de f est la droite vectorielle engendrée par $(1, 6)$, qui a pour équation $y = 6x$.





b. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a :

$$(x,y)\in f^{-1}(\{(a,b)\}) \quad\Leftrightarrow\quad f(x,y)=(a,b) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=a\\ 2x+3y=b\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=a\\ b-6a=0.\end{cases}$$

Si $b\neq 6a$, ou autrement dit si (a,b) n'appartient pas à $\operatorname{Im} f$, alors (a,b) ne possède aucun antécédent par f, c'est-à-dire :

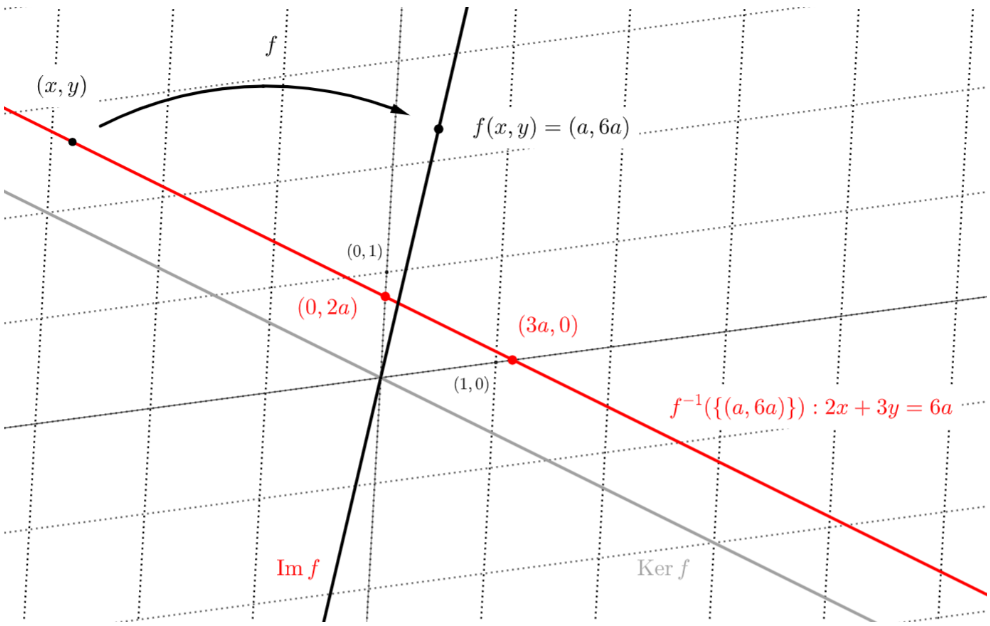
$$f^{-1}(\{(a,b)\})=\varnothing.$$

Supposons à présent que $b=6a$. On a alors :

$$(x,y)\in f^{-1}(\{(a,b)\}) \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{2}y=a \quad\Leftrightarrow\quad 2x+3y=6a.$$

L'ensemble des antécédents de (a,b) est dans ce cas la droite parallèle à $\operatorname{Ker} f$ passant par :

$$(0,2a),(3a,0),(a,\tfrac{4}{3}a),\ldots$$



Exercice 3. On donne l'application linéaire :

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ (x,y)\to(5x-2y,2x-y)\ \text{ ainsi que }\ \mathcal{B}=(1,2),(3,5).$$

a. Donner la matrice de f en base canonique.

b. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_{\text{can}}$ à $\mathcal{B}$.

c. Pour tout $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $[v]_{\mathcal{B}}$ et écrire la décomposition correspondante de v dans la base $\mathcal{B}$.

d. Calculer de deux façons différentes la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ représentant f dans la base $\mathcal{B}$.

Solution:

a. La matrice de f dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

b. $(1, 2)$ et $(3, 5)$ ne sont pas proportionnels, si bien que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de passage de $\mathcal{B}_{\text{can}}$ à $\mathcal{B}$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

c. On sait que :

$$[v]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[v]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x + 3y \\ 2x - y \end{pmatrix}.$$

La décomposition demandée est donc :

$$v = \underbrace{(-5x + 3y)(1, 2) + (2x - y)(3, 5)}_{(x,y)}.$$

d. Une première méthode consiste à utiliser la formule :

$$[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP.$$

Par un calcul direct, on trouve alors :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -22 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Pour une deuxième méthode, commençons par calculer les images par f des deux éléments de $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire la famille $f(\mathcal{B})$) :

$$f(1, 2) = (5 \cdot 1 - 2 \cdot 2, 2 \cdot 1 - 2) = (1, 0) \ \text{ et } \ f(3, 5) = (5 \cdot 3 - 2 \cdot 5, 2 \cdot 3 - 5) = (5, 1)$$

et utilisons le fait que les colonnes de $[f]_{\mathcal{B}}$ sont les coordonnées en base $\mathcal{B}$ de ces deux éléments. D'après le c. on trouve :

$$[f(1, 2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ [f(3, 5)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5 \cdot 5 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 9 \end{pmatrix}$$

ce qui redonne bien sûr la même matrice que ci-dessus.

Exercice 4. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \to (3x - 9y, x - 3y).$$

a. Quel est le rang de f ? Déterminer aussi son image et son noyau.

b. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indication : si l'on note $\mathcal{B} = v_1, v_2$, commencer par écrire $f(v_1)$ et $f(v_2)$ en fonction de v_1 et v_2.

c. Pour la base $\mathcal{B}$ que vous avez trouvée au b., vérifier, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, la validité de la formule :

$$[f(v)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}$$

Solution:

a. Notons :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Elle est de rang 1, et on a :

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

On sait alors que :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((3,1)) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} f : x - 3y = 0.$$

On peut observer que ces deux droites vectorielles sont en fait égales.

b. Notons $\mathcal{B} = v_1, v_2$. On a alors :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(v_1) = 0v_1 + 0v_2 = (0,0) \\ f(v_2) = 2v_1 + 0v_2 = 2v_1. \end{cases}$$

Dans le système que l'on vient d'écrire, la première condition signifie exactement que v_1 appartient au noyau de f. D'après le a. on peut alors poser $v_1 = (3,1)$. En notant $v_2 = (\lambda, \mu)$, la deuxième condition ci-dessus devient :

$$f(v_2) = 2v_1 \Leftrightarrow (3\lambda - 9\mu, \lambda - 3\mu) = (6,2) \Leftrightarrow \lambda = 3\mu + 2.$$

En faisant le choix de $\mu = 0$ on voit alors que la base $\mathcal{B} = (3,1), (2,0)$ de $\mathbb{R}^2$ convient, puisque les relations sont bien vérifiées :

$$\begin{cases} f(3,1) = (0,0) = 0(3,1) + 0(2,0) \\ f(2,0) = (6,2) = 2(3,1) + 0(2,0). \end{cases}$$

c. On travaille donc avec la base $\mathcal{B} = (3,1), (2,0)$ de $\mathbb{R}^2$. La matrice de passage de $\mathcal{B}_{\text{can}}$ à $\mathcal{B}$ est égale à :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et a pour inverse} \quad P^{-1} = \tfrac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Donnons-nous alors $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et calculons les coordonnées de v et celles de $f(v)$ en base $\mathcal{B}$. On trouve, d'une part :

$$[v]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[v]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \frac{x-3y}{2} \end{pmatrix}$$

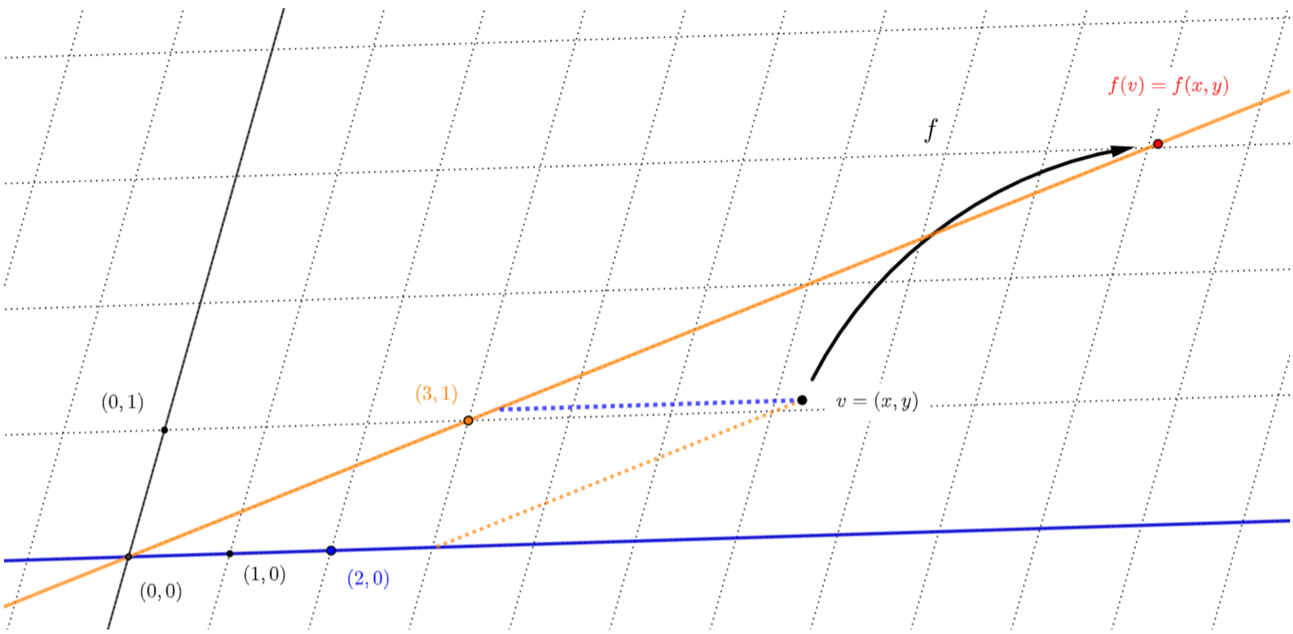
et, d'autre part :

$$[f(v)]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[f(v)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x - 9y \\ x - 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La relation donnée est donc effectivement vérifiée :

$$[f]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \frac{x-3y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y \\ 0 \end{pmatrix} = [f(v)]_{\mathcal{B}}.$$

Ce n'est pas demandé, mais terminons par un dessin qui illustre géométriquement cette relation.



Pour le v représenté ici, on a (en lisant sur les axes représentés en orange et bleu) :

$$[v]_{\mathcal{B}} \simeq \begin{pmatrix} 1,1 \\ 1,5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [f(v)]_{\mathcal{B}} \simeq \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1,1 \\ 1,5 \end{smallmatrix}\right)}.$$

Observons pour finir que peu importe où se trouve v, la deuxième coordonnée de $f(v)$ en base $\mathcal{B}$ est toujours nulle, ce qui correspond au fait que $f(v)$ se trouve toujours sur l'axe orange (qui n'est autre que $\operatorname{Im} f$!).

Exercice 5. On donne, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to ((5-\alpha)x + (16-5\alpha)y, (5-3\alpha)x - 2y).$$

Trouver α sachant que $(2, -4)$ n'a pas d'antécédent par f.

Solution: L'application linéaire étudiée a pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5-\alpha & 16-5\alpha \\ 5-3\alpha & -2 \end{pmatrix}$$

en base canonique. Son déterminant vaut donc :

$$\det A = (5-\alpha)\cdot(-2) - (16-5\alpha)(5-3\alpha) = -15\alpha^2 + 75\alpha - 90 = -15(\alpha^2 - 5\alpha + 6) = -15(\alpha-2)(\alpha-3).$$

On en déduit déjà que pour tout $\alpha \neq 2, 3$, la matrice A est inversible. Par conséquent, l'application linéaire f est bijective : tout élément de $\mathbb{R}^2$ possède un unique antécédent par f. En particulier, $(2, -4)$ possède un antécédent. Ces valeurs de α sont donc à rejeter pour le problème qui nous intéresse. Autrement dit, s'il y a une solution au problème posé, c'est soit $\alpha = 2$, soit $\alpha = 3$. Pour $\alpha = 2$, on a :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (3x + 6y, -x - 2y) = (x + 2y)(3, -1),$$

si bien que :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((3, -1)).$$

En particulier, le couple $(2, -4)$ n'est pas dans l'image de f et n'a donc aucun antécédent par f. Cette valeur de α convient bien. Examinons enfin le cas $\alpha = 3$, pour lequel on a :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (2x + y, -4x - 2y) = (2x + y)(1, -2).$$

L'image de f est ici la droite vectorielle engendrée par $(1, -2)$. Par conséquent, $(2, -4)$ possède (au moins) un antécédent par f (en fait une infinité, à savoir la droite d'équation $2x + y = 2$), si bien que cette valeur de α est à rejeter. En résumé, il y a une seule valeur de α qui convient, à savoir $\alpha = 2$.

Exercice 6. On sait que l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vérifie :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \mathcal{B} = (1 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}), (2 + 3\sqrt{2}, 1 + 7\sqrt{2}).$$

On ne demande pas de montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

a. Quel est le rang de f ? Donner alors les dimensions du noyau et de l'image de f.
b. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$. *Indication : commencer par écrire la relation qui existe entre* $[f(v)]_{\mathcal{B}}$ *et* $[v]_{\mathcal{B}}$.
c. Calculer une équation de $\operatorname{Im} f$.
d. Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle f a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Solution:

a. Le rang de f est égal à celui de toute matrice qui la représente, donc en particulier de la matrice :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On voit donc que f est de rang 1. Le noyau et l'image de f sont tous deux des droites vectorielles.

b. D'après le a., il suffit d'identifier un élément non nul dans le noyau de f, c'est-à-dire un $v \in \mathbb{R}^2$ qui vérifie $f(v) = (0,0)$. Or on sait que :

$$[f(v)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}.$$

Si l'on note $[v]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)$, on a donc :

$$[f(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = (2s + 3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On voit donc que l'élément de coordonnées $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ en base $\mathcal{B}$ convient (car pour le choix de $s = 3$ et $t = -2$ on trouve $2s + 3t = 0$). Autrement dit, le noyau de f est la droite vectorielle engendrée par :

$$3(1 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}) - 2(2 + 3\sqrt{2}, 1 + 7\sqrt{2}) = (-1 - 9\sqrt{2}, 7 - 11\sqrt{2}).$$

c. D'après le travail effectué au b., on voit que les $f(v)$, où v parcourt $\mathbb{R}^2$ sont tous les éléments dont les coordonnées en base $\mathcal{B}$ sont multiples scalaires de $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$. Autrement dit, l'image de f est la droite vectorielle engendrée par :

$$(1 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}) + 3(2 + 3\sqrt{2}, 1 + 7\sqrt{2}) = (7 + 8\sqrt{2}, 6 + 22\sqrt{2}).$$

Elle a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x & 7 + 8\sqrt{2} \\ y & 6 + 22\sqrt{2} \end{vmatrix} = 0 = (6 + 22\sqrt{2})x - (7 + 8\sqrt{2})y.$$

d. Une telle base n'existe pas. En effet, on sait que la trace de la matrice de f est indépendante de la base choisie. Or pour le choix de la base $\mathcal{B}$ on voit que cette trace est égale à 11 :

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr}[f]_{\mathcal{B}} = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = 11.$$

Comme la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est de trace 1 on voit qu'elle ne peut représenter f dans aucune base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7. Dans chacun des cas suivants, déterminer si possible une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vérifiant les propriétés données. Si ce n'est pas possible, expliquer pourquoi.

a. $(1,2) \in \operatorname{Ker} f$ et $(4,2) \in \operatorname{Im} f$ b. $\{(1,-1), (-2,1)\} \subset f^{-1}(\{(1,1)\})$ c. $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ et $(4,-3) \in \operatorname{Ker} f$.

Indication : quel est le rang de f ?

Solution:

a. Si une telle application f existe, elle est nécessairement de rang 1, car son noyau et son image son non nuls. Par conséquent :

$$\operatorname{Ker} f : 2x - y = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((2,1)).$$

La matrice de f en base canonique est donc égale à :

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

pour un certain réel α non nul. Autrement dit, f est décrite par les formules :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to \alpha(2x - y)(2,1) = \alpha(4x - 2y, 2x - y).$$

b. Supposons tout d'abord qu'une telle application f existe. L'élément $(1,1)$ possède (au moins) un antécédent par f, ce qui montre que f n'est pas de rang 0. De plus, il en possède au moins 2, ce qui montre que f n'est pas de rang 2. En définitive, f est de rang 1. L'image de f est donc une droite vectorielle, et comme $(1,1)$ possède des antécédents par f, on peut donc affirmer que :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((1,1)).$$

Par ailleurs, d'après nos connaissance sur les applications de rang 1, on sait que l'ensemble des antécédents de $(1,1)$ est une droite parallèle à $\operatorname{Ker} f$. Comme d'après l'énoncé, $(1,-1)$ et $(-2,1)$ sont sur cette droite, on voit que :

$$(1,-1) - (-2,1) = (3,-2)$$

appartient à $\operatorname{Ker} f$. Par conséquent, le noyau de f est la droite vectorielle :

$$\operatorname{Ker} f : 2x + 3y = 0.$$

La matrice de f en base canonique est donc égale à :

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

pour un certain réel α non nul. L'application f est donc de la forme :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to \alpha(2x + 3y)(1, 1) = \alpha(2x + 3y, 2x + 3y).$$

Comme $(1, -1)$ a pour image $(1, 1)$ par f, on trouve que α doit vérifier :

$$\underbrace{f(1, -1)}_{(1,1)} = \alpha(-1)(1, 1) \text{ autrement dit } \alpha = -1.$$

Pour cette valeur de α, on trouve par un calcul direct que l'image de $(-2, 1)$ est aussi égale à $(1, 1)$. On a donc montré qu'il y a une unique application satisfaisant la condition requise, à savoir :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to -(2x + 3y)(1, 1) = (-2x - 3y, -2x - 3y).$$

c. Une telle application linéaire f ne peut exister : en effet, la première condition impose que f est de rang 2. Par conséquent, son noyau doit être nul, ce qui contredit la deuxième condition. Il est donc impossible de satisfaire les deux conditions en même temps.

Exercice 8. On considère une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$[f]_{\mathcal{B}} \text{ indépendante de la base } \mathcal{B} \text{ de } \mathbb{R}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha \in \mathbb{R},\ f = \alpha\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} .$$

Indication : on pourra s'inspirer de l'exercice 5 de la série 7.

Solution: Commençons par analyser au niveau matriciel ce que les deux propriétés figurant dans l'équivalence signifient. Pour cela, notons :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

la matrice de f (dans la base canonique). La propriété que $[f]_{\mathcal{B}}$ est indépendante du choix de $\mathcal{B}$ se traduit matriciellement par le fait que, pour toute matrice inversible $P \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$P^{-1}AP = A, \text{ ou encore } AP = PA.$$

Autrement dit, A commute (pour le produit matriciel) avec toute matrice inversible. Par ailleurs, la propriété que f est un multiple scalaire de $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ signifie exactement que A est un multiple scalaire de I_2, c'est-à-dire une matrice scalaire, du type αI_2. Passons à la preuve de l'équivalence demandée, en raisonnant au niveau des matrices.

"$\Rightarrow$" On peut raisonner comme à l'exercice 5 de la série 7, en faisant attention toutefois au fait que la matrice A n'est supposée commuter qu'aux matrices inversibles (et non à toutes les matrices, comme c'est le cas dans cet exercice). Exprimons par exemple que A et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ commutent. On trouve :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors que $\beta = \gamma = 0$. Ensuite, exprimons que A et $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ commutent. On trouve :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \delta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit donc que $\alpha = \delta$, ce qui montre bien finalement que $A = \alpha I_2$.

"$\Leftarrow$" Si $A = \alpha I_2$ pour un certain réel α, alors pour toute matrice inversible P il est clair qu'on a $PA = AP = \alpha P$.