

Série 7

Exercice 1. Dans chacun des cas, effectuer le calcul proposé dans $M_2(\mathbb{R})$:

a. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b. $2 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

c. ${}^t \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Solution:

a. Par définition de l'addition matricielle, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

b. Par définition de l'addition et de la multiplication scalaire sur les matrices, on trouve :

$$2 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -12 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

c. Par définition de la transposée :

$${}^t \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Dans chacun des cas ci-dessous, calculer si possible le produit proposé :

a. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution:

a. Le produit proposé est bien défini. Le résultat est une matrice 2×2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 & 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

b. Le produit proposé est bien défini. Le résultat est une matrice 1×1 :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 \cdot 5 + (-1) \cdot 3) = (7).$$

c. Le produit proposé est bien défini. Le résultat est une matrice 2×2 :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

d. Le produit proposé n'est pas défini car le nombre de colonne de la matrice de gauche n'est pas égal au nombre de ligne de la matrice de droite. En effet, la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ possède deux colonnes et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ une seule ligne.

Exercice 3. Dans $M_2(\mathbb{R})$, on donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer le déterminant, le rang et la trace de A .
- La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

Solution:

- Par définition du déterminant et de la trace, on trouve :

$$\det(A) = (-5) \cdot 1 - (-4) \cdot 2 = 3 \quad \text{et} \quad \text{tr}(A) = -5 + 1 = -4.$$

Comme le déterminant de A est non nul, cette matrice est de rang 2.

- D'après les résultats trouvés au a. on voit que la matrice A est inversible. Appliquons alors la formule pour l'inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Vérifions notre résultat en calculant par exemple le produit suivant :

$$A^{-1}A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Exercice 4. Dans $M_2(\mathbb{R})$, on donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

- Calculer le déterminant, le rang et la trace de A .
- Décomposer A comme produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne.

Solution:

- Par définition du déterminant et de la trace, on trouve :

$$\det(A) = 3 \cdot \frac{2}{3} - (-1) \cdot (-2) = 0 \quad \text{et} \quad \text{tr}(A) = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}.$$

La matrice A est non nulle mais son déterminant est nul : elle est donc de rang 1.

- Le fait que A soit de rang 1 traduit l'existence d'une relation de proportionnalité entre ses deux lignes et entre ses deux colonnes. C'est en exploitant de telles relations que l'on peut écrire A comme produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne. Par exemple, on peut constater que la première ligne de A est obtenue en multipliant la deuxième ligne par -3 :

$$-3 \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = A.$$

Attention au fait qu'une telle décomposition n'est pas unique. Par exemple, en exprimant que la deuxième ligne de A est égale à $-\frac{1}{3}$ fois la première ligne on trouve cette fois :

$$-\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = A.$$

Si l'on exprime que la deuxième colonne de A est obtenue en multipliant la première par $-\frac{2}{3}$ on obtient :

$$-\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = A \quad \dots$$

Exercice 5. Dans cet exercice, on souhaite identifier le *centre* de $M_2(\mathbb{R})$ qui est par définition l'ensemble :

$$Z(M_2(\mathbb{R})) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \forall B \in M_2(\mathbb{R}), AB = BA\}.$$

Comme le produit matriciel n'est pas commutatif, on sait déjà que $Z(M_2(\mathbb{R})) \neq M_2(\mathbb{R})$.

- On appelle *matrice scalaire* une matrice du type αI_2 , où $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'une matrice scalaire appartient à $Z(M_2(\mathbb{R}))$.
- Réciproquement, soit $A \in Z(M_2(\mathbb{R}))$. Calculer AB et BA , avec :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En déduire que certains coefficients de la matrice A sont nuls. Utiliser ensuite d'autres cas particuliers pour B afin de montrer que A est une matrice scalaire.

Solution:

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $B \in M_2(\mathbb{R})$. Par un calcul direct, on trouve que :

$$(\alpha I_2)B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} B = \alpha B \quad \text{et} \quad B(\alpha I_2) = B \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha B.$$

Ces deux matrices étant égales pour tout choix de B , on voit que la matrice scalaire αI_2 appartient au centre de $M_2(\mathbb{R})$.

- Notons :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

On trouve alors, d'une part :

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

et, d'autre part :

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $AB = BA$, on voit donc que $\beta = \gamma$. Autrement dit, A est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

(on dit que A est *diagonale*). Utilisons maintenant pour B la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors, d'une part :

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$$

et, d'autre part :

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors que $\alpha = \delta$. Autrement dit, A est bien une matrice scalaire :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_2.$$

Exercice 6. Montrer que pour toutes matrices A et B dans $M_2(\mathbb{R})$, on a les égalités :

a. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

b. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

c. ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.

Solution: Notons :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \rho & \sigma \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha\lambda + \beta\rho & \alpha\mu + \beta\sigma \\ \gamma\lambda + \delta\rho & \gamma\mu + \delta\sigma \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} \alpha\lambda + \gamma\mu & \beta\lambda + \delta\mu \\ \alpha\rho + \gamma\sigma & \beta\rho + \delta\sigma \end{pmatrix}.$$

a. On trouve alors d'une part :

$$\det(AB) = (\alpha\lambda + \beta\rho)(\gamma\mu + \delta\sigma) - (\gamma\lambda + \delta\rho)(\alpha\mu + \beta\sigma) = \alpha\delta\lambda\sigma + \beta\gamma\mu\rho - \beta\gamma\lambda\sigma - \alpha\delta\mu\rho.$$

Et, d'autre part :

$$\det(A) \det(B) = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\lambda\sigma - \mu\rho) = \alpha\delta\lambda\sigma + \beta\gamma\mu\rho - \beta\gamma\lambda\sigma - \alpha\delta\mu\rho.$$

On en déduit donc bien que $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

b. On obtient :

$$\text{tr}(AB) = (\alpha\lambda + \beta\rho) + (\gamma\mu + \delta\sigma) = (\alpha\lambda + \gamma\mu) + (\beta\rho + \delta\sigma) = \text{tr}(BA).$$

Remarque : le résultat que l'on vient de montrer **ne dit pas** que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(A) \text{tr}(B)$.

c. On trouve, d'une part :

$${}^t(AB) = \begin{pmatrix} \alpha\lambda + \beta\rho & \alpha\mu + \beta\sigma \\ \gamma\lambda + \delta\rho & \gamma\mu + \delta\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\lambda + \beta\rho & \gamma\lambda + \delta\rho \\ \alpha\mu + \beta\sigma & \gamma\mu + \delta\sigma \end{pmatrix}$$

et, d'autre part :

$${}^tB {}^tA = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \rho & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \rho \\ \mu & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\lambda + \beta\rho & \gamma\lambda + \delta\rho \\ \alpha\mu + \beta\sigma & \gamma\mu + \delta\sigma \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc bien que ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.

Remarque : attention à l'ordre des facteurs dans le produit. Comme le produit matriciel n'est pas commutatif, le résultat que l'on vient de montrer **ne dit pas** que ${}^t(AB) = {}^tA {}^tB$.

Exercice 7. On donne une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer alors que :

$$\det(A) = \text{tr}(A) = 0 \iff A^2 = 0.$$

Indication : on pourra raisonner par double implication.

Solution: Notons :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Commençons par établir " \Rightarrow ". On suppose donc que :

$$\det(A) = \alpha\delta - \beta\gamma = 0 \quad (\text{autrement dit } \alpha\delta = \beta\gamma) \quad \text{et} \quad \text{tr}(A) = \alpha + \delta = 0,$$

et on souhaite montrer que A est de carré nul. Or un calcul direct donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta + \beta\delta \\ \gamma\alpha + \delta\gamma & \beta\gamma + \delta^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha^2 + \alpha\delta & \alpha\beta + \beta\delta \\ \gamma\alpha + \delta\gamma & \alpha\delta + \delta^2 \end{pmatrix}}_{\text{car } \beta\gamma = \alpha\delta} = (\alpha + \delta) \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}_{\text{car } \alpha + \delta = 0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Passons à la preuve de la réciproque " \Leftarrow ". Pour cela, supposons que :

$$A^2 = 0$$

et cherchons à voir que A est de déterminant nul et de trace nulle. Tout d'abord, appliquons le déterminant des deux côtés de l'égalité ci-dessus. On trouve (puisque le déterminant d'un produit est le produit des déterminants) :

$$\det(\underbrace{A^2}_{A \cdot A}) = (\det(A))^2 = \det(0) = 0, \text{ ce qui entraîne } \det(A) = 0 \text{ (autrement dit } \alpha\delta = \beta\gamma).$$

Le calcul effectué lors de la preuve de "⇒" montre alors que :

$$A^2 = (\alpha + \delta) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \text{tr}(A)A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui impose que la trace de A est nulle (en effet, soit la matrice A est nulle et donc de trace nulle, soit elle est non nulle et l'égalité ci-dessus montre que $\text{tr}(A) = 0$).

Pour finir, donnons quelques exemples de matrices 2×2 de carré nul :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \dots$$

Pour construire de tels exemples, on peut d'abord imposer à la matrice d'être de trace nulle (les coefficients sur la diagonale se "compensent", c'est-à-dire qu'ils sont opposés), puis d'avoir un déterminant nul (ce qui donne une relation entre les deux coefficients hors de la diagonale). Ces éléments de carré nul dans $M_2(\mathbb{R})$ sont une nouveauté par rapport au cas du calcul algébrique dans les réels : dans \mathbb{R} , le seul élément de carré nul est 0 lui-même.

Exercice 8. Montrer que, pour toutes matrices A, B et C dans $M_2(\mathbb{R})$, on a les égalités :

a. $(A + B) + C = A + (B + C)$

b. $(A + B)C = AC + BC$

c. $(AB)C = A(BC)$.

Solution: Notons :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \rho & \sigma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} \omega & \theta \\ \xi & \zeta \end{pmatrix}.$$

a. On trouve, d'une part :

$$(A + B) + C = \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \rho & \sigma \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \omega & \theta \\ \xi & \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \lambda & \beta + \mu \\ \gamma + \rho & \delta + \sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega & \theta \\ \xi & \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \lambda + \omega & \beta + \mu + \theta \\ \gamma + \rho + \xi & \delta + \sigma + \zeta \end{pmatrix}$$

et, d'autre part :

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \rho & \sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega & \theta \\ \xi & \zeta \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda + \omega & \mu + \theta \\ \rho + \xi & \sigma + \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \lambda + \omega & \beta + \mu + \theta \\ \gamma + \rho + \xi & \delta + \sigma + \zeta \end{pmatrix}.$$

La propriété étudiée ici (appelée *associativité de l'addition matricielle*) est donc bien vérifiée. En fait, comme l'addition matricielle s'effectue coefficient-à-coefficient cette propriété est directement héritée de la propriété correspondante dans les réels.

b. On trouve, d'une part :

$$(A + B)C = \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \rho & \sigma \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \omega & \theta \\ \xi & \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \lambda & \beta + \mu \\ \gamma + \rho & \delta + \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & \theta \\ \xi & \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\omega + \lambda\omega + \beta\xi + \mu\xi & \alpha\theta + \lambda\theta + \beta\zeta + \mu\zeta \\ \gamma\omega + \rho\omega + \delta\xi + \sigma\xi & \gamma\theta + \rho\theta + \delta\zeta + \sigma\zeta \end{pmatrix}$$

et, d'autre part :

$$\begin{aligned} AC + BC &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & \theta \\ \xi & \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \rho & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & \theta \\ \xi & \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\omega + \beta\xi & \alpha\theta + \beta\zeta \\ \gamma\omega + \delta\xi & \gamma\theta + \delta\zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda\omega + \mu\xi & \lambda\theta + \mu\zeta \\ \rho\omega + \delta\xi & \rho\theta + \sigma\zeta \end{pmatrix} = \dots \\ &= \begin{pmatrix} \alpha\omega + \lambda\omega + \beta\xi + \mu\xi & \alpha\theta + \lambda\theta + \beta\zeta + \mu\zeta \\ \gamma\omega + \rho\omega + \delta\xi + \sigma\xi & \gamma\theta + \rho\theta + \delta\zeta + \sigma\zeta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La propriété étudiée ici (appelée *distributivité à droite du produit matriciel sur l'addition*) est donc bien vérifiée. Son analogue à gauche l'est aussi, comme on le montre par un raisonnement similaire.

c. On trouve, d'une part :

$$\begin{aligned} (AB)C &= \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \rho & \sigma \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \omega & \theta \\ \xi & \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\lambda + \beta\rho & \alpha\mu + \beta\sigma \\ \gamma\lambda + \delta\rho & \gamma\mu + \delta\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & \theta \\ \xi & \zeta \end{pmatrix} = \dots \\ &= \begin{pmatrix} \alpha\lambda\omega + \beta\rho\omega + \alpha\mu\xi + \beta\sigma\xi & \alpha\lambda\theta + \beta\rho\theta + \alpha\mu\zeta + \beta\sigma\zeta \\ \gamma\lambda\omega + \delta\rho\omega + \gamma\mu\xi + \delta\sigma\xi & \gamma\lambda\theta + \delta\rho\theta + \gamma\mu\zeta + \delta\sigma\zeta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et, d'autre part :

$$\begin{aligned} A(BC) &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \rho & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & \theta \\ \xi & \zeta \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda\omega + \mu\xi & \lambda\theta + \mu\zeta \\ \rho\omega + \delta\xi & \rho\theta + \sigma\zeta \end{pmatrix} = \dots \\ &\dots = \begin{pmatrix} \alpha\lambda\omega + \beta\rho\omega + \alpha\mu\xi + \beta\sigma\xi & \alpha\lambda\theta + \beta\rho\theta + \alpha\mu\zeta + \beta\sigma\zeta \\ \gamma\lambda\omega + \delta\rho\omega + \gamma\mu\xi + \delta\sigma\xi & \gamma\lambda\theta + \delta\rho\theta + \gamma\mu\zeta + \delta\sigma\zeta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La propriété étudiée ici (appelée *associativité du produit matriciel*) est donc bien vérifiée.