Série 3

Exercice 1. Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la valeur de l'entier proposé :

a. $5!$ b. $7!$ c. $\binom{5}{3}$ d. $\binom{11}{7}$.

Solution:

a. Par définition, on a :

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

b. De la même façon, on a :

$$7! = \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}_{5!} \times 6 \times 7 = 120 \times 42 = 5040.$$

c. On trouve :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{4 \times 5}{2} = 10.$$

d. On obtient :

$$\binom{11}{7} = \frac{11!}{4!\,7!} = \frac{8 \times 9 \times 10 \times 11}{2 \times 3 \times 4} = 330.$$

Remarque : au c. et au d. il est bien sûr aussi possible d'utiliser le triangle de Pascal pour trouver le coefficient demandé.

Exercice 2. Déterminer le coefficient de x^9 dans le développement de :

a. $(x+1)^{12}$ b. $(2-x)^{12}$ c. $(x+x^3)^5$.

Solution:

a. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$(x+1)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} x^k$$

Dans cette expression, le coefficient de x^9 est donc :

$$\binom{12}{9} = \frac{12!}{9!\,3!} = \frac{10 \times 11 \times 12}{1 \times 2 \times 3} = 220\,.$$

b. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$(2-x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} 2^k (-x)^{12-k}$$

Dans cette expression, on trouve le coefficient de x^9 pour la valeur $k = 3$. Il vaut donc :

$$\binom{12}{3} 2^3 (-1)^3 = -8\binom{12}{3} = -8\binom{12}{9} = -8 \times 220 = -1760\,.$$

c. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$(x+x^3)^5 = x^5(1+x^2)^5 = x^5 \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^{2k}\,.$$

Dans cette expression, on trouve le coefficient de x^9 pour la valeur $k = 2$. Il vaut donc :

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{4 \times 5}{1 \times 2} = 10\,.$$

Exercice 3. On donne l'ensemble :

$$E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa\}.$$

a. Combien E contient-il de sous-ensembles $A \subset E$ possédant 4 éléments ?

b. Parmi ces sous-ensembles, combien vérifient de plus la condition $A \cap \{\beta, \delta\} = \varnothing$?

Solution:

a. Le nombre recherché est ici :

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{6!\,4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210.$$

b. La condition donnée ici revient juste à dire que A est contenu dans $\complement_E(\{\beta, \delta\})$, c'est-à-dire que :

$$A \subset \{\alpha, \gamma, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa\}.$$

Comme A a pour cardinal 4, on trouve :

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

possibilités.

Exercice 4. On donne l'ensemble $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota\}$ et on s'intéresse aux sous-ensembles A de E tels que :

$$\mathrm{Card}(A) = 5 \quad \text{et} \quad \mathrm{Card}(A \cap \{\alpha, \gamma, \theta\}) = 1.$$

a. Si A vérifie les conditions données, que pouvez-vous dire du sous-ensemble $A \cap \{\beta, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \iota\}$?

b. Combien de sous-ensembles A de E vérifient les conditions données ?

Solution:

a. Si A vérifie les conditions données, alors exactement l'un de ses éléments se trouve dans $\{\alpha, \gamma, \theta\}$. Comme il possède en tout 5 éléments, on voit donc qu'exactement 4 de ses éléments se trouvent dans :

$$\complement_E(\{\alpha, \gamma, \theta\}) = \{\beta, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \iota\}.$$

Autrement dit, on a :

$$\mathrm{Card}(A \cap \{\beta, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \iota\}) = 4.$$

b. D'après l'observation faite au a., on peut se représenter un sous-ensemble A de E vérifiant les conditions données comme formé de deux bouts de la manière suivante :

$$A = \underbrace{B}_{B \subset \{\alpha,\gamma,\theta\} \text{ et } \mathrm{Card}(B)=1} \cup \underbrace{C}_{C \subset \{\beta,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta,\iota\} \text{ et } \mathrm{Card}(C)=4}.$$

Il y a trois possibilités pour B et $\binom{6}{4} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$ pour C. On voit donc qu'exactement $3 \cdot 15 = 45$ sous-ensembles de E possèdent les conditions requises.

Exercice 5. Déterminer la valeur de $n \in \mathbb{N}^*$ sachant que :

$$\sum_{k=1}^{3} \binom{3n}{k} = 115n\,.$$

Solution: Il s'agit de résoudre l'équation :

$$\binom{3n}{1} + \binom{3n}{2} + \binom{3n}{3} = 115n\,.$$

En utilisant une des formules vues au cours pour les coefficients binomiaux on obtient :

$$\frac{(3n)!}{1!\,(3n-1)!} + \frac{(3n)!}{2!\,(3n-2)!} + \frac{(3n)!}{3!\,(3n-3)!} = 115n$$

ou encore, après simplification des factorielles :

$$3n + \frac{3n(3n-1)}{2} + \frac{3n(3n-1)(3n-2)}{6} = 115n\,.$$

En multipliant par 2 et en divisant par n des deux côtés on trouve maintenant :

$$6 + 3(3n-1) + (3n-1)(3n-2) = 230\,.$$

Développons alors l'expression de gauche :

$$\underbrace{6 + 9n - 3 + 9n^2 - 9n + 2}_{9n^2+5} = 230\,.$$

Finalement, l'équation devient :

$$9n^2 = 225 \quad \text{ou encore} \quad n^2 = 25\,.$$

On voit donc que $n = 5$ est la seule et unique solution.

Exercice 6. On donne un ensemble E fini de cardinal $n \geqslant 2$ ainsi qu'un entier k vérifiant :

$$1 \leqslant k \leqslant n-1\,.$$

On considère aussi un élément particulier α de E qui est fixé dans la suite de l'exercice.

a. Parmi les sous-ensembles à k éléments de E, combien ne contiennent pas α ? *Indication : penser à* $\complement_E(\{\alpha\})$.

b. De la même manière, parmi les sous-ensembles à k éléments de E, combien contiennent α ?

c. En déduire la formule suivante vue au cours :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\,.$$

Solution:

a. Etant donné un sous-ensemble A de E possédant k éléments, on a :

$$\alpha \notin A \quad \Leftrightarrow \quad A \subset \complement_E(\{\alpha\})\,.$$

Les sous-ensembles à k éléments de E ne contenant pas α sont donc exactement les sous-ensembles à k élément de $\complement_E(\{\alpha\})$. Comme ce dernier ensemble possède $n-1$ éléments, on voit que le nombre recherché ici est :

$$\binom{n-1}{k}\,.$$

b. Un sous-ensemble A de E possédant k éléments contient α si et seulement s'il s'écrit sous la forme :

$$A = \{\alpha\} \cup B$$

où B est un sous-ensemble à $k-1$ éléments de $\complement_E(\{\alpha\})$. Le nombre recherché ici est donc :

$$\binom{n-1}{k-1}\,.$$

c. Au total, E possède :

$$\binom{n}{k}$$

sous-ensembles à k éléments (c'est d'ailleurs la définition que l'on a donnée de ce coefficient binomial). Et pour chacun de ces sous-ensembles il n'y a que deux options : soit il contient α (et il est comptabilisé à la question b.), soit il ne contient pas α (et il est alors comptabilisé à la question a.). En utilisant les résultats trouvés au a. et b. on trouve alors bien la formule :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\,.$$

Exercice 7. Dans cet exercice, on souhaite montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

a. Comment cette égalité se voit-elle sur le triangle de Pascal ? Contrôler qu'elle est vraie pour $n \leqslant 5$.

b. Etablir le résultat voulu en utilisant la formule du binôme de Newton.

c. Montrer la formule en comptant de deux manières différentes le nombre $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E))$, où E est un ensemble à n éléments.

Solution:

a. Réécrivons la formule que l'on souhaite montrer sous la forme :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n\,.$$

Elle dit donc que la somme des coefficients binomiaux se trouvant sur la ligne n du triangle de Pascal est égale à 2^n.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Construisons alors explicitement le triangle de Pascal afin de contrôler que la formule est vraie pour $n \leqslant 5$. On obtient :

$$\begin{array}{l}
1 = 2^0 \\
1 + 1 = 2 = 2^1 \\
1 + 2 + 1 = 4 = 2^2 \\
1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3 \\
1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4 \\
1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5
\end{array}$$

b. La formule du binôme de Newton donne :

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\,,$$

ce qui montre la formule souhaitée.

c. Il s'agit de compter le nombre de sous-ensembles de E. Pour notre première méthode, imaginons la construction d'un sous-ensemble A de E comme le fait de distribuer à chacun des éléments de E un statut (ou une étiquette) "sélectionné" ou "non sélectionné". Comme il y a deux statuts possibles et qu'il y a n éléments dans E, on trouve que le nombre total de sous-ensemble de E vaut :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ fois}} = 2^n.$$

Pour notre deuxième méthode, comptons les sous-ensembles de E en les rangeant selon leur nombre d'éléments : $\binom{n}{0} = 1$ sous-ensemble à 0 élément (à savoir le sous-ensemble vide), $\binom{n}{1} = n$ sous-ensembles à 1 élément, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ sous-ensembles à 2 éléments, etc. Comme le nombre d'élément d'un sous-ensemble de E est compris entre 0 et n, on voit qu'il y a au total :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

sous-ensembles dans E. En comparant nos deux méthodes, on obtient bien l'égalité recherchée.

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$$

et on souhaite montrer que $A_n = B_n = 2^{2n-1}$.

a. Comment ces égalités se voient-elles sur le triangle de Pascal ? Contrôler qu'elles sont vraies pour $n \leqslant 3$.

b. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $A_n - B_n = 0$. *Indication : développer* $(-1+1)^{2n}$.

c. En déduire le résultat voulu. *Indication : on pourra chercher à calculer* $A_n + B_n$.

Solution:

a. Réécrivons A_n et B_n sous la forme :

$$A_n = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \cdots + \binom{2n}{2n-2} + \binom{2n}{2n} \quad \text{et} \quad B_n = \binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \cdots + \binom{2n}{2n-3} + \binom{2n}{2n-1}.$$

Ces nombres s'obtiennent donc en "sommant un coefficient sur deux" sur la ligne $2n$ du triangle de Pascal, comme indiqué sur le schéma ci-dessous (A_n en rouge et B_n en bleu) :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&& \binom{0}{0} &&&&&& \\
&&&&& \binom{1}{0} && \binom{1}{1} &&&&& \\
&&&& \binom{2}{0} && \binom{2}{1} && \binom{2}{2} &&&& \\
&&& \binom{3}{0} && \binom{3}{1} && \binom{3}{2} && \binom{3}{3} &&& \\
&& \binom{4}{0} && \binom{4}{1} && \binom{4}{2} && \binom{4}{3} && \binom{4}{4} && \\
& \binom{5}{0} && \binom{5}{1} && \binom{5}{2} && \binom{5}{3} && \binom{5}{4} && \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} && \binom{6}{1} && \binom{6}{2} && \binom{6}{3} && \binom{6}{4} && \binom{6}{5} && \binom{6}{6}
\end{array}$$

Construisons alors explicitement le triangle de Pascal afin de contrôler que les égalités proposées sont vraies pour $n \leqslant 3$. On obtient :

$$\begin{array}{ccccccccccccc|l}
&&&&&& 1 &&&&&& & \\
&&&&& 1 && 1 &&&&& & \\
&&&& 1 && 2 && 1 &&&& & 2 = 2 = 2^{2-1} \\
&&& 1 && 3 && 3 && 1 &&& & \\
&& 1 && 4 && 6 && 4 && 1 && & 8 = 8 = 2^{4-1} \\
& 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 & & \\
1 && 6 && 15 && 20 && 15 && 6 && 1 & 32 = 32 = 2^{6-1}
\end{array}$$

b. En utilisant les formules écrites au a., on trouve :

$$A_n - B_n = \binom{2n}{0} - \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} - \binom{2n}{3} + \cdots + \binom{2n}{2n-2} - \binom{2n}{2n-1} + \binom{2n}{2n}.$$

Sous forme condensée :

$$A_n - B_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k.$$

D'après la formule du binôme de Newton, on reconnait maintenant le développement de $(-1+1)^{2n}$:

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k = (-1+1)^{2n} = 0.$$

On a donc bien montré que :

$$A_n - B_n = 0.$$

c. On a montré au b. que les sommes A_n et B_n sont égales. Il reste à voir que leur valeur commune est 2^{2n-1}. Pour cela, calculons :

$$A_n + B_n = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \binom{2n}{3} + \cdots + \binom{2n}{2n-2} + \binom{2n}{2n-1} + \binom{2n}{2n}.$$

Sous forme condensée :

$$A_n + B_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}.$$

En utilisant le résultat de l'exercice précédent on trouve donc :

$$\underbrace{A_n + B_n}_{=2A_n=2B_n} = 2^{2n}.$$

Finalement :

$$A_n = B_n = 2^{2n-1}.$$