Radiative Pressure

Radiative Pressure

The temperature at the surface of a star such as the sun is $\sim 5800K$

Depending on the stellar mass, it can go from $\sim 2500K$ to $\sim 50\,000K$

Nuclear reactions in the steller nuclei can rise T up to $> 10^6 K$

Therefore there is a negative gradient from the center to the outer boundary of the stars.

Temperature is the signature of motions in the different internal regions of the star, motion that give rise to pressure. [F/S]

1. Pressure from (gaseous) matter (nuclei, ions, electrons)

2. Pressure from photons (transfer of momentum of a surface)

The sum of the pressures conteracts gravity

= Hydrostatic equilibrium

Pour introduire la pression de radiation, nous allons raisonner et calculer en plusieurs étapes.

1. Prendre le cas général d'une particule (atome, molécule) qui se heurte à une paroi

2. Interpréter les équations dans le cas non relativiste, puis relativiste

3. Prendre le cas des photons (relativiste)

4. Introduire l'intensité spécifique dans les relations.
   = faire le lien avec la partie précédente.

cf illustrations

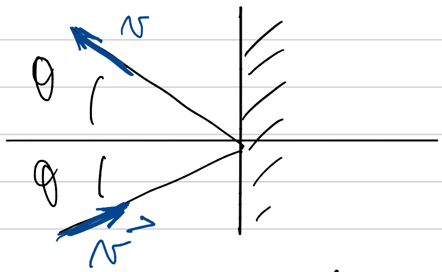
Pression de radiation

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Queues de comètes} \\ \text{Voile solaire} \end{array} \right.$

Etoiles Wolf-Rayet.

Collision élastique d'atomes avec une paroi

Elastique = l'énergie cinétique se conserve.



$$P = \frac{F_\perp}{S} = \frac{\Delta m v}{S}$$

Considérons le système {paroi + atomes}

Avant le choc $\vec{p}_i = \vec{p}^{\,i}_{paroi} + \vec{p}^{\,i}_{atomes}$

Après le choc $\vec{p}_f = \vec{p}^{\,f}_{paroi} + \vec{p}^{\,f}_{atomes}$

on a $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow \Delta\vec{p}_{paroi} = \vec{p}^{\,i}_{atomes} - \vec{p}^{\,f}_{atomes}$

(choc "encaissé" par la paroi)

$$\left.\begin{aligned} \|p^i\| &= mv\cos\theta \\ \|p^f\| &= -mv\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \|\Delta p_{paroi}\| = 2mv\cos\theta$$

$$\|\Delta p_{paroi}\| = 2p\cos\theta$$

La pression sur la paroi sera connue une fois également connu le nombre de particules qui entrent en collision avec la paroi par unité de temps et de surface.

• Considirons un bombardement $D(\theta, \varphi, p)$ sur une surface.

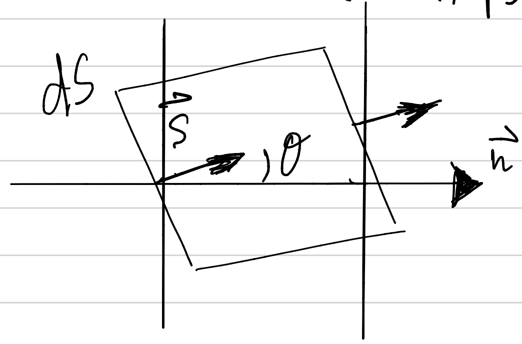
nombre de particules entre p et $p + dp$
par unité de surface
avec un angle d'incidence entre θ et $\theta + d\theta$
φ et $\varphi + d\varphi$.

$$dN = D(\theta, \varphi, p)\, d\Omega\, dp.$$

La pression totale est $\quad \underline{P = 2 \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p \cos\theta\, D(\theta, \varphi, p)\, d\Omega\, dp}$

• Considirons un nombre de particules par unité de volume $n(\theta, \varphi, p)$

$$D(\theta, \varphi, p)\, d\Omega = n(\theta, \varphi, p)\, d\Omega\, \underbrace{v \cos\theta}_{3^e \text{ dimension.}}$$



Il vient $\quad \underline{P = 2 \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v p \cos^2\theta\, n(\theta, \varphi, p)\, d\Omega\, dp}$

Simplifions, cas isotrope (direction des vitesses)

$$n(\theta,\varphi,p)\,d\Omega = \frac{n(p)}{4\pi}\,d\Omega \quad \text{(on prend la moyenne)}$$

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} p\,v\,\cos^2\theta\; n(p)\,d\Omega\,dp$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} v\,p\,n(p)\,dp\;\underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}$$

$\mu = \cos\theta \qquad d\mu = -\sin\theta\,d\theta$.

$$2\pi\int_0^1 \mu^2\,d\mu = \frac{2\pi}{3}$$

$$\boxed{P = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} v\,p\,n(p)\,dp}$$

$n(p)$ = densité volumique.

Cas non relativiste

On ne considère que le mouvement de translation $E_{cin} = \dfrac{p^2}{2m}$ $\quad v = \dfrac{p}{m}$

$$P = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} \frac{p^2}{m}\,n(p)\,dp.$$

$$\boxed{P = \frac{2}{3}\,u_{cin}}\;;\quad u_{cin} = \text{densité d'énergie cinétique de l'ensemble des particules}$$

Cas relativiste

$$E_{tot} = E_p + E_c$$

$$\gamma mc^2 = mc^2 + E_c \Rightarrow E_c = (\gamma - 1)mc^2$$

et $p = \gamma m v$

Facteur de Lorentz : $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$$\Rightarrow \quad \gamma^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$$

on reprend $P = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^\infty n(p)\, p v \, dp$

$$P = \frac{1}{3}\int_0^\infty n(p)\, \gamma m v^2 \, dp \qquad (\text{remplace } p)$$

$$P = \frac{1}{3}\int_0^\infty n(p)\, \gamma m c^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) dp \qquad (\text{remplace } v^2)$$

$$P = \frac{1}{3}\int_0^\infty n(p)\, \gamma m c^2 \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}\right) dp \qquad (\text{on réarrange})$$

$$\gamma^2 - 1 = (\gamma + 1)(\gamma - 1) \longrightarrow (\text{introduit } E_c)$$

$$\gamma = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} n(p)\, \frac{1}{\gamma} E_{cin} (1+\gamma)\, dp$$

- Si $\gamma \to 1$ $(v \ll c)$ on retrouve le cas ~~NR~~ relativiste

$$\frac{2}{3} \int_0^{\infty} n(p)\, E_{cin}\, dp = \frac{2}{3} u_{cin}$$

- Si $\gamma \gg 1$ $P = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} n(p)\, E_{cin}\, dp = \frac{1}{3} u_{cin}$

En général, on a un mélange de particules R et NR

$$\frac{1}{3} \leq \frac{P}{u_{cin}} \leq \frac{2}{3}$$

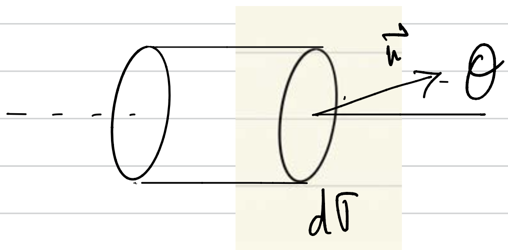
Pression de rayonnement.

Soit un rayonnement isotrope, d'intensité I_0

On a vu la densité d'énergie de rayonnement.

= énergie qui a traversé une surface $d\sigma$ dans le temps dt

$$\frac{dU}{d\nu \, d\Omega} = I_\nu \cos\theta \, d\sigma \, dt$$



rayonnement contenu dans le volume $c\,dt\,d\sigma\cos\theta$

$$\underline{\text{Densité volumique}} = \frac{dU}{d\nu\, d\Omega\, c\,dt\, d\sigma \cos\theta} = \frac{I_\nu}{c}$$

Densité dans toutes les directions : $u_\nu = \frac{1}{c}\int_\Omega I_\nu \, d\Omega$.

Reprenons un rayonnement isotrope : $u_\nu = \frac{4\pi}{c} I_0$

$\left(P_{rad} = \frac{1}{3} u_{cin} \right)$ et $P_{rad} = \frac{1}{3}\frac{4\pi}{c} I_0$ (relativiste)

Moins charmant, plus général, quand le rayonnement n'est pas isotrope.

$$P = 2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} n(\theta, \varphi, p)\, p\, v \cos^2\theta \, d\Omega \, dp$$

Dans le cas de photons : $v = c$; $p = \frac{h\nu}{c}$

avec $h = 6.62\ 10^{-34}$ J.s

donc on peut écrire $n(\theta, \varphi, p)$ en $n(\theta, \varphi, \nu)$

Notons que densité de photons $= \dfrac{\text{densité d'énergie}}{\text{énergie d'un photon}}$

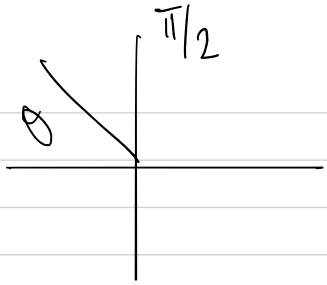
$$du_\nu = h\nu \; n(\theta, \varphi, p) \, d\Omega \, d\nu$$

$$\Rightarrow n(\theta, \varphi, p) = \frac{1}{h\nu} \frac{du_\nu}{d\Omega \, d\nu}$$

$$n(\theta, \varphi, p) \, d\Omega \, d\nu = \frac{1}{h\nu} \frac{du_\nu}{d\Omega \, d\nu} d\Omega \, d\nu = \frac{I_\nu}{c h\nu} d\Omega \, d\nu$$

$$\Rightarrow P_{rad} = 2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{I_\nu}{c \cancel{h\nu}} \frac{\cancel{h\nu}}{\cancel{c}} \cancel{c} \cos^2\theta \, d\Omega \, d\nu$$

$$P_{rad} = \frac{2}{c} \int I_\nu \, d\nu \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\Omega = \frac{2}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I \cos^2\theta \, d\Omega$$



si symétrie par rapport à $\theta = \frac{\pi}{2}$ = paroi

$$P_{rad} = \frac{1}{c}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} I \cos^2\theta \, d\Omega$$

Question : Est-ce que la symétrie existe ?

Dans les intérieurs stellaires, l'écart à l'isotropie est faible.

Dans les atmosphères, elle n'est pas négligeable.

mais ici on utilise $P_{rad} = \frac{1}{c}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} I \cos^2\theta \, d\Omega$
comme une sorte de moyenne des pressions dues à l'intensité entrante et sortante.

$$\int_0^{\pi/2} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

Moments

Définition du flux $dF_\nu = \frac{dU_\nu}{d\sigma \, dt \, d\nu}$ $\quad F_\nu = \int_\Omega I_\nu \cos\theta \, d\Omega$

on peut définir le moment d'ordre n de l'intensité spécifique.

$$M_n(I) = \int_\Omega I \cos^n\theta \, d\Omega$$

$n=1 \rightarrow$ Flux ; $n=0$ $\int_\Omega I \, d\Omega = c\,u$; $n=2$ $\int_\Omega I \cos^2\theta \, d\Omega = c\,P_{rad}$

Rayonnement du corps noir

cf les illustrations - diapositives -

$$I_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Aux basses énergies $\quad \frac{h\nu}{kT} \ll 1$

On utilise $e^x - 1 \simeq x$ quand x est petit.

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^n)$$

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\frac{h\nu}{kT}} = 2\frac{\nu^2 kT}{c^2}$$

Loi de Rayleigh. Jeans

utilisée en radioastronomie pour déterminer la température d'antenne.

Aux hautes énergies $\quad \frac{h\nu}{kT} \gg 1$

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT}$$

Loi de Wien

Loi de déplacement de Wien

permet de connaître rapidement la longueur d'onde du maximum de $B_\lambda(T)$

$$I_\lambda = B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

On pose $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ $\qquad \frac{dB_\lambda}{d\lambda} = \frac{dB_\lambda}{dx} \frac{dx}{d\lambda}$

$$\frac{dx}{d\lambda} = -\frac{hc}{\lambda^2 kT} \neq 0$$

il suffit donc d'annuler $\frac{dB_\lambda}{dx}$ $\Rightarrow x_{max} = \frac{hc}{\lambda_{max} kT} = 4.9651$

$$\Rightarrow \lambda_{max} \cdot T = \frac{hc}{4.9651 k}$$

Conséquences

les ✱ chaudes émettent dans l'UV
froides l'IR
poussières l'IR lointain

Démonstration loi de Wien

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

chgt de variable

$$x = \frac{hc}{kT\lambda}$$

$$B = \frac{2k^5T^5}{h^4c^3} \frac{x^5}{e^x - 1}$$

$$\frac{dB}{dx} = \frac{2(kT)^5}{h^4c^3} \frac{5x^4(e^x-1) - x^5e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$\frac{dB}{dx} = 0 \quad \text{si} \quad 5x^4(e^x - 1) - x^5e^x = 0$$

$$x \in]0, +\infty[\Rightarrow \quad 5 - 5e^{-x} = x$$

$$e^{-x} + 0.2x - 1 = 0$$

Grandeurs bolométriques

$$I = B(T) = \int_0^\infty \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{d\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

on pose $x = \frac{h\nu}{kT} \Rightarrow dx = \frac{h}{kT} d\nu$

$$I = \frac{2h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)\left(\frac{kT}{h}\right)^3 \underbrace{\int_0^\infty x^3 \frac{dx}{e^x - 1}}_{} = \frac{\pi^4}{15}$$

$$B = I = \frac{2h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \frac{\pi^4}{15}$$

que l'on écrit aussi $I = B(T) = \frac{\sigma}{\pi} T^4$

avec $\frac{\sigma}{\pi} = \frac{2h}{15c^2}\left(\frac{k\pi}{h}\right)^4$ $\sigma = 5.67\ 10^{-5}\ erg/cm^2K^4s$

constante de Stefan-Boltzmann.

- $F^+ = \pi B = \sigma T^4 = F^-$ (corps noir)
- u = densité d'énergie $= \frac{4\pi}{c} B = \frac{4\pi\sigma T^4}{c} = aT^4$ (isotropie)

$a = 7.565\ 10^{-15}\ erg/cm^3K^4$

- $P_{rad} = \frac{1}{3} u = \frac{a}{3} T^4$ (relativiste)

Pour le Soleil $\odot$, au centre, $T \sim 1.8\ 10^6 K$

$P_{rad} = 1.57\ 10^{13}\ N.m^{-2}$

$P_{gaz} = 2.50\ 10^{16}\ N.m^{-2}$

$\frac{P_{rad}}{P_{gaz}} \sim 0.6\ 10^{-3}$

$(1N = 1 kg.m/s^2)$

Température effective.

Température d'une étoile si elle rayonnait comme un corps noir.

$$L_* = 4\pi R^2 F^+$$

$$L_{CN} = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$$

$$\Rightarrow \quad T_{eff} = \left(\frac{L_*}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{1/4}$$

Utilité

Si on connait la distance d'un objet, par ex $\odot$

$$E_\nu = \frac{\pi R^2}{D^2} \langle I_\nu \rangle \quad ; \quad L_\nu = 4\pi R^2 F_\nu^+ \quad ; \quad F^+ = \pi \langle I_\nu \rangle$$

$$\Rightarrow \quad E_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi D^2} \quad \Rightarrow \text{ on peut calculer } T_{eff}$$

Si α Diamètre angulaire : $\quad E_\odot = \frac{\pi}{4} \alpha^2 \langle I \rangle = \frac{\alpha^2}{4} \sigma T^4$

Entropie de rayonnement.

Pour former des structures, il faut pouvoir évacuer de l'entropie

→ le 2^e principe de la thermodynamique nous dit qu'un système isolé ne peut qu'augmenter son entropie

En astrophysique, le meilleur moyen d'évacuer de l'entropie est par rayonnement

Que vaut l'entropie de rayonnement ?

1ère loi de la thermodynamique

$$dQ = dU + PdV$$

dQ : Variation de la quantité de chaleur

dU : variation d'énergie interne

PdV → travail fourni par le système

2^e loi de la thermodynamique

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \iff \delta Q = TdS$$

$$TdS = dU + PdV$$

Sous la condition d'isotropie et de rayonnement du corps noir

$$U = u\,dV \quad \text{avec} \quad u = aT^4$$

$$P = \frac{1}{3}u = \frac{1}{3}aT^4$$

$$T dS = d(aT^4 V) + \frac{1}{3} aT^4 \, dV$$

$$= aT^4 dV + 4aVT^3 dT + \frac{1}{3} aT^4 dV$$

$$= \frac{4}{3} aT^4 dV + 4aVT^3 dT$$

$$\Rightarrow \quad dS = \frac{4}{3} aT^3 dV + 4aVT^2 dT = d\left(\frac{4}{3} aT^3 V\right)$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{4}{3} aT^3 V + \text{cste.}$$

$$s = \frac{S}{V} \approx \frac{4}{3} a T^3 \qquad \text{entropie par unité de volume.}$$

Densité de photons ?

$$\text{Densité de photons} = \frac{\text{densité d'énergie radiante}}{\text{énergie d'un photon}}$$

Corps noir = $u_\nu = \dfrac{1}{c} \displaystyle\int I_\nu \, d\Omega = \dfrac{4\pi}{c} B_\nu(T)$

et $u = \displaystyle\int_0^\infty u_\nu \, d\nu$

$$n_\gamma = \int_0^\infty \frac{u_\nu}{h\nu}\,d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^2\,d\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

$$x = \frac{h\nu}{kT} \implies n_\gamma = \frac{8\pi}{c^3}\left(\frac{k}{h}\right)^3 T^3 \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{e^x-1}}_{\Gamma(3)\cdot\zeta(3)}$$

Aparte ....

$\rightarrow$ $$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt$$

$$\Gamma(3) = \int_0^\infty t^2 e^{-t}\,dt = 2 \qquad \Gamma(1) = 1 \text{ et } \Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$$

$\rightarrow$ $$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \implies \zeta(3) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots$$

$$n_\gamma = \text{cte} \cdot T^3 \implies S = \text{Const}' \cdot n_\gamma$$

Dans un volume donné, l'entropie est proportionnelle au nombre de photons qu'il contient. (dans la limite de l'approximation du corps noir)

Les étoiles évacuent de l'entropie en rayonnant, mais l'entropie à l'intérieur de l'étoile tend généralement à diminuer au cours de leur évolution. L'entropie des étoiles est négligeable par rapport à celle du CMB. Par conséquent $S_{univers}$ = cste par unité de volume au cours de l'expansion.