

Chapitre 4

Fonctions de Green

Les fonctions de Green interviennent dans la résolution de certaines équations différentielles. Nous considérons ici le cas, particulièrement important pour la physique, d'équations différentielles du 2ème ordre, et nous commençons par des équations différentielles aux dérivées ordinaires du type Sturm-Liouville.

4.1 Fonctions de Green en une dimension

Soit (a, b) un intervalle fini, $q : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle raisonnable (par exemple bornée et continue). On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{L}f)(x) \equiv -f''(x) + q(x)f(x) = h(x) \quad (4.1)$$

où h est une fonction donnée (que nous supposons continue par morceaux) et

$$\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \quad (4.2)$$

est l'opérateur différentiel (du type Sturm-Liouville). Le terme "opérateur différentiel" veut dire que \mathcal{L} agit sur des fonctions de x (il associe à chaque fonction deux fois différentiable une nouvelle fonction $\mathcal{L}f$), et son action fait intervenir des dérivées. Dans cette terminologie, l'équation différentielle (4.1) peut être écrite comme $\mathcal{L}f = h$.

La solution f de l'équation (4.1) est soumise à des conditions aux limites homogènes (c'est-à-dire des conditions aux limites qui sont satisfaites par toutes les combinaisons linéaires de f_1 et f_2 si elles sont satisfaites par f_1 et par f_2). Nous considérons surtout des conditions aux limites homogènes séparées (c'est-à-dire une condition au point $x = a$ et une condition au point $x = b$) :

$$\alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0, \quad (4.3)$$

$$\alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0, \quad (4.4)$$

où α_j, β_j sont des constantes données. Des cas particulièrement simples sont ceux où $\alpha_j = 0$ (conditions de Neumann) ou $\beta_j = 0$ (conditions de Dirichlet).

La méthode de la fonction de Green consiste à résoudre, pour chaque $y \in (a, b)$ fixé, l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\left[-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right]G(x, y) = \delta(x - y),} \quad (4.5)$$

où la fonction de Green G doit satisfaire (en tant que fonction de x !) les mêmes conditions aux limites en $x = a$ et en $x = b$ que la solution f de (4.1). Si G est trouvé, on peut obtenir la solution f de (4.1) simplement par (voir l'Exercice 1)

$$f(x) = \int_a^b G(x, y)h(y)dy. \quad (4.6)$$

L'équation (4.5) doit être interprétée au sens des distributions (le membre de droite est une distribution). On peut écrire $\mathcal{L}_x G = \delta(x - y)$. Donc a priori G est une distribution. Mais dans la plupart des situations cette distribution est en fait une fonction, d'où le nom "fonction de Green"; en effet nous avons vu au Chapitre 3 (Exercice 9) que la distribution de Dirac δ apparaît comme (première ou deuxième) dérivée de certaines fonctions.

Exercice 1 (Fonction de Green et solutions de l'équation différentielle) :

Soit G la fonction de Green pour l'opérateur (4.2) et les conditions aux limites (4.3-4.4). Montrer par un calcul formel (passer les dérivées sous l'intégrale) que la fonction f définie par (4.6) est solution de l'équation différentielle (4.1) et satisfait aux conditions aux limites (4.3-4.4).

Remarque : Une démonstration plus correcte sera donnée dans le corrigé. On peut également montrer que, si f est solution de (4.1) et (4.3-4.4), alors f peut être représentée sous la forme (4.6).

4.2 Détermination de la fonction de Green

Pour $y \in (a, b)$ fixé, on détermine la fonction de Green $G(x, y)$, en tant que fonction de x , en imposant les conditions suivantes :

- (i) elle doit satisfaire l'équation différentielle $\mathcal{L}_x G = 0$ sur (a, y) et sur (y, b) ,
 - (ii) elle doit satisfaire les conditions aux limites (4.3-4.4) en $x = a$ et en $x = b$,
 - (iii) elle doit être continue en $x = y$,
 - (iv) sa dérivée doit avoir une discontinuité de -1 au point $x = y$
- (la dernière condition assure que la deuxième dérivée de G au point $x = y$ est égale à $-\delta(x - y)$, selon l'Exercice 9 du Chapitre 3).

Plus explicitement, désignons par g_a une solution de $\mathcal{L}g = 0$ satisfaisant la condition (4.3) (donc g_a est déterminée à un coefficient multiplicatif près) et de même g_b solution de $\mathcal{L}g = 0$ avec la condition (4.4). On suppose que l'on peut choisir g_a et g_b linéairement indépendantes sur (a, b) : $\lambda g_a + \mu g_b = 0 \rightarrow \lambda = \mu = 0$ (c.-à-d. g_a n'est pas proportionnelle à g_b). Alors, pour y fixé, il existe des constantes γ, κ (qui peuvent dépendre de y) telles que

$$G(x, y) = \begin{cases} \gamma g_a(x) & \text{si } x < y, \\ \kappa g_b(x) & \text{si } x > y. \end{cases} \quad (4.7)$$

Les "constantes" γ et κ s'obtiennent facilement à partir des conditions de raccordement (iii) et (iv) au point $x = y$. On trouve que

$$G(x, y) = -\frac{1}{W(y)} \begin{cases} g_a(x)g_b(y) & \text{si } x < y, \\ g_a(y)g_b(x) & \text{si } x > y, \end{cases} \quad (4.8)$$

où $W(y) = g_a(y)g_b'(y) - g_a'(y)g_b(y)$ est le Wronskien de g_a, g_b .

Exercice 2 (Vérification de la formule (4.8)) :

(a) Vérifier que la fonction (4.8) satisfait les conditions de raccordement (iii) et (iv) :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [G(y + \varepsilon, y) - G(y - \varepsilon, y)] = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [G'(y + \varepsilon, y) - G'(y - \varepsilon, y)] = -1$$

(b) Montrer que

$$\frac{d}{dy}[W(y)] = 0.$$

Ainsi le dénominateur dans (4.8) est une constante, et on voit que $G(x, y) = G(y, x)$. Donc la fonction de Green est symétrique dans ses deux arguments.

Exercice 3 (Applications de la formule (4.8)) :

Soit $(a, b) = (0, \pi/2)$ et $\nu > 0$ une constante. Déterminer la fonction de Green de l'opérateur $\mathcal{L} = -d^2/dx^2 - \nu$ pour les conditions aux limites $f(0) = f(\pi/2) = 0$. Considérer en particulier le cas $\nu = 1$, et calculer la solution $f(x)$ explicite pour :

- (i) $h(y) = \delta(y - \pi/4)$, dessiner $f(x)$ et $f'(x)$ et comparer avec l'exercice 9(d) du chapitre précédent.
- (ii) $h(y) = \sin(y)$, et vérifier que $-f''(x) - f(x) = \sin(x)$.

Exercice 4 (Fonctions de Green pour un intervalle infini) :

L'équation (4.1) sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$ ou $(0, \infty)$ est souvent rencontrée en mécanique quantique en relation avec l'équation de Schrödinger.

Soit à nouveau $\mathcal{L} = -d^2/dx^2 + \nu$ et $(a, b) = (0, \infty)$. Chercher la fonction de Green dans les cas suivants :

- (i) $\nu > 0$, $f(0) = f(\infty) = 0$
- (ii) $\nu < 0$, $f(0) = 0$, $G(x, y) \sim \cos(\sqrt{|\nu|x})$ lorsque $x \rightarrow \infty$.

Exercice 5 (Méthode de Fourier) :

Il est possible de calculer certains fonctions de Green par une transformation de Fourier. C'est la *solution fondamentale*, ce qui est la solution au sens des distributions de l'équation formelle

$$(\mathcal{L}G)(x) = \delta(x). \quad (4.9)$$

Les conditions aux limites doivent alors être satisfaites en ajoutant une solution H de l'équation homogène $(\mathcal{L}H)(x) = 0$.

(a) Démontrer formellement que la distribution

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{k^2 + \nu} \right) \quad (4.10)$$

est la solution fondamentale pour l'opérateur \mathcal{L} de l'exercice 4. (\mathcal{F} dénote la transformée de Fourier et \mathcal{F}^{-1} son inverse.) Indication : se rappeler que $\widehat{\partial_x f}(k) = ik\hat{f}(k)$.

(b) Calculer explicitement la solution fondamentale (4.10) en utilisant une intégration dans le plan complexe (théorème des résidus) pour $\nu > 0$. Appliquer explicitement \mathcal{L} à cette solution pour vérifier Eq. (4.9). Construire la fonction de Green $G(x, y)$ qui résout $\mathcal{L}(x)G(x, y) = \delta(x - y)$ et avec $G(\pm\infty, y) = 0$.

(c) Trouver les (deux) solutions homogènes indépendantes de \mathcal{L} et vérifier que la fonction de Green pour l'exercice 4.i peut être écrite comme somme de la solution fondamentale et des solutions homogènes.

4.3 Fonction de Green en trois dimensions

Un problème en trois dimensions analogue à celui traité jusqu'ici est de considérer l'équation différentielle

$$-\Delta f(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) - zf(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) \quad (4.11)$$

où \mathbf{x} varie sur une partie bornée Ω de \mathbb{R}^3 ou sur \mathbb{R}^3 tout entier et z est une constante (réelle ou complexe). Dans le premier cas on imposera des conditions sur le bord $\partial\Omega$ de Ω , dans le deuxième cas pour $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Comme auparavant, la fonction de Green est définie comme une solution (au sens des distributions) de

$$[-\Delta_{\mathbf{x}} + q(\mathbf{x}) - z]G_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.12)$$

et satisfaisant les conditions aux limites (sur $\partial\Omega$ ou pour $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ respectivement). z est considéré comme un paramètre, la fonction de Green dépendra de ce paramètre. La notation $\Delta_{\mathbf{x}}$ signifie que les dérivées apparaissant dans le Laplacien sont par rapport à la variable \mathbf{x} :

$$\Delta_{\mathbf{x}}G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

En termes de la fonction de Green, la solution de (4.11) est donnée par

$$f(\mathbf{x}) = \int G_z(\mathbf{x}, \mathbf{y})h(\mathbf{y})d^3y. \quad (4.13)$$

Exercice 6 (La fonction de Green du Laplacien) :

On considère l'équation (4.12) avec $q(\mathbf{x}) \equiv 0$ et $z = 0$, c'est-à-dire

$$-\Delta_{\mathbf{x}}G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.14)$$

(a) Prendre d'abord $\Omega = \mathbb{R}^3$. Montrer que la solution s'annulant à l'infini (c'est-à-dire pour $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$) est

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}.$$

Indication : D'abord, vérifiez que $\Delta_{\mathbf{x}}G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ pour $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Ensuite, évaluez le Laplacien de $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dans le sens des distributions en prenant $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq \epsilon > 0$, puis $\epsilon \rightarrow 0$. On rappelle la formule de Green-Ostrogradski (généralisation de l'intégration par parties)

$$\int_U [g(\mathbf{x})\Delta f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\Delta g(\mathbf{x})]d\mathbf{x} = \int_{\partial U} [g(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\nabla g(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})dS$$

où f et g sont deux fonctions continûment différentiables $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, et U un ouvert à bord lisse ∂U , muni de la normale extérieure $\mathbf{N}(\mathbf{x})$.

(b) Prendre $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq R\}$, c'est-à-dire la boule de rayon R centrée à l'origine. Résoudre (4.14) avec la condition à la limite $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ si $|\mathbf{x}| = R$ (c'est-à-dire $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ s'annule sur le bord de Ω).

Indication : On a $\Delta_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{w}|} = 0$ si $|\mathbf{x}| < R$ et $|\mathbf{w}| > R$. Chercher $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de la forme

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{a(\mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{w}|},$$

où $a(\mathbf{y})$ est un nombre qui peut dépendre de \mathbf{y} , et \mathbf{w} est un vecteur qui peut dépendre de \mathbf{y} (prendre $\mathbf{w} = b(\mathbf{y})\mathbf{y}$ [pourquoi ?], où $b(\mathbf{y})$ est un nombre qui peut dépendre de \mathbf{y}) et qui satisfait $|\mathbf{w}| > R$.

Application : Le potentiel électrostatique V en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ dû à une distribution de charge de densité $\rho(\mathbf{x})$ est déterminé par l'équation de Poisson

$$-\Delta V(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})/\varepsilon_0.$$

Le résultat de (a) permet de donner la solution par

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y.$$

On voit que la fonction de Green joue le rôle d'une fonction d'influence : $\frac{1}{\varepsilon_0}G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ détermine le potentiel au point \mathbf{x} dû à une unité de charge ponctuelle placée au point \mathbf{y} .

Similairement, le résultat de (b) permet de calculer le potentiel V à l'intérieur de la boule $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq R\}$ produit par une distribution de charge dans cette boule, la surface de la boule étant mise à terre ($V(\mathbf{x}) = 0$ si $|\mathbf{x}| = R$).

Comment peut-on interpréter le résultat de l'Exercice 6 (b) en termes électrostatiques ? (La méthode des charges images).

Dans l'exercice suivant nous discutons la fonction de Green de l'opérateur $-\Delta - z$ dans $\Omega = \mathbb{R}^3$. Nous trouverons une solution particulière qui a la propriété de s'annuler à l'infini ; la solution générale s'obtient en lui rajoutant des solutions de l'équation homogène $(-\Delta_{\mathbf{x}} - z)f(\mathbf{x}) = 0$ (où f peut dépendre de z et \mathbf{y}).

Exercice 7 (Fonction de Green de l'équation de Schrödinger stationnaire (ou l'équation de Helmholtz)) :

Soit z un nombre complexe. Considérer l'équation suivante dans \mathbb{R}^3 :

$$(-\Delta_{\mathbf{x}} - z)G_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.15)$$

(a) Montrer que

$$G_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\sqrt{z}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (4.16)$$

est une solution pour chacune des deux valeurs de \sqrt{z} .

Indication : Utiliser la règle de Leibniz ($|\mathbf{w}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$)

$$\Delta \frac{e^{i\sqrt{z}|\mathbf{w}|}}{|\mathbf{w}|} = e^{i\sqrt{z}|\mathbf{w}|} \Delta \frac{1}{|\mathbf{w}|} + \frac{1}{|\mathbf{w}|} \Delta e^{i\sqrt{z}|\mathbf{w}|} + 2\nabla \frac{1}{|\mathbf{w}|} \cdot \nabla e^{i\sqrt{z}|\mathbf{w}|}$$

et les relations

$$\nabla |\mathbf{w}| = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} \quad \nabla \frac{1}{|\mathbf{w}|} = -\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^3}.$$

(b) Déterminer le comportement de la solution (4.16) à l'infini pour z réel (c'est-à-dire $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ est fixé et $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$). Distinguer entre le cas où $z > 0$ et celui où $z < 0$; poser $k = |\sqrt{z}|$ dans le premier cas et $\kappa = |\sqrt{-z}|$ dans le deuxième cas et tenir compte des deux signes possibles de la racine dans (4.16).

Exercice 8 (Fonction de Green de l'équation du transport de la chaleur) :

Dans cet exercice nous utilisons comme dans l'exercice 5 la méthode Fourier pour calculer la solution fondamentale. Cette fois-ci c'est un problème de transport, c'est-à-dire une équation différentielle qui contient des dérivées spatiales et temporelles.

(a) Résoudre l'équation suivante en appliquant la transformation de Fourier par rapport aux coordonnées spatiales.

$$(\kappa \partial_t - \Delta)G(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}, t). \quad (\kappa > 0) \quad (4.17)$$

Indication : Montrer que la transformée de Fourier de l'équation (4.17) est résolue par

$$\hat{G}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{\kappa(2\pi)^{3/2}} e^{-|\mathbf{p}|^2 t / \kappa} H(t) \quad (4.18)$$

Ici $H(t)$ dénote la fonction de Heaviside. Calculer la transformée de Fourier inverse de \hat{G} .

(b) Déterminer la solution formelle de

$$(\kappa \partial_t - \Delta)T(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) \quad (4.19)$$

pour une fonction u telle que $G * u$ existe, par exemple une fonction avec support borné.

(c) Choisir $u(\mathbf{x}, t) = A\delta(\mathbf{x}, t)$. Quel est la signification physique de cette source si T est considéré comme distribution de température ? Quelle est la solution $T(\mathbf{x}, t)$? (Commenter aussi sur la solution pour $t < 0$.) Pourquoi cette équation est appelée une équation de diffusion ?

(d) Quel est le profil de la température $T(\mathbf{x}, t)$ pour un profil initial $T_0(\mathbf{x}) = A \exp\{-|\mathbf{x}|^2 / (2\sigma^2)\}$ (tel que $u(\mathbf{x}, t) = \kappa T_0(\mathbf{x})\delta(t)$) ?

(e) Quel est le profil de la température $T(\mathbf{x})$ pour une source ponctuelle à l'origine qui est toujours allumée, i.e. $u(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x})$?

Références

R. Courant et D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Volume 1, Chapitre V, Paragraphes 14 et 15.

G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Chapitre 16.

S. Hassani, *Mathematical Physics*, Chapitre VI.

Chapitre 5

Intégration complexe et applications aux intégrales réelles

5.1 Intégration Complexe

Dans cette partie du cours nous allons revisiter l'intégration complexe, mais sans présenter toutes les démonstrations mathématiques. Vous trouverez celles-ci dans le cours d'analyse. Le but ici est plutôt de se concentrer sur l'application du théorème des résidus au calcul d'intégrales impropres réelles. Pour cette raison nous allons négliger beaucoup de résultats importants et fascinants sur la structure des fonctions complexes.

5.1.1 Fonctions d'une variable complexe

On peut écrire la valeur d'une fonction complexe $f(z)$ au point $z = x + iy$ comme un nombre complexe,

$$u + iv = f(z) \tag{5.1}$$

tel que u et v sont des fonctions réelles des deux variables x et y , $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Exemple 1 : Si $f(z) = z^2$ alors

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \tag{5.2}$$

et donc $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = 2xy$.

La dérivée d'une fonction complexe est définie comme dans le cas réel :

Définition : Soit f une fonction dont le domaine de définition contient le voisinage du point z_0 . La *dérivée* de f en z_0 , notée $f'(z_0)$, est définie par la formule

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{5.3}$$

à condition que cette limite existe. La fonction f est dite *différentiable* en z_0 quand la limite existe.

Une fonction complexe d'une variable complexe est appelée *holomorphe* si elle possède une dérivée en tout point où elle est définie. Nous allons utiliser le terme *analytique* de manière synonyme. Une fonction est holomorphe au point z si elle est dérivable en z ainsi que dans son voisinage. Une fonction est appelée *entière* si elle est holomorphe dans tout le plan complexe. Les polynômes sont des exemples de fonctions entières.

5.1.2 Les conditions de Cauchy-Riemann

Il y a une différence importante entre la différentiabilité réelle et complexe : dans le cas complexe, la limite peut être prise de plusieurs directions dans le plan complexe, et la valeur limite doit toujours être la même. Ceci impose des contraintes fortes sur les fonctions complexes différentiables.

Nous pouvons réécrire l'équation (5.3) sous la forme

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (5.4)$$

où $h = s + it$ est un nombre complexe. En prenant $h = s$ réel, la dérivée devient une dérivée partielle par rapport à x ,

$$f'(z) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x+s+iy) - f(x+iy)}{s} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5.5)$$

De même, si $h = it$ est purement imaginaire, on a

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+i(y+t)) - f(x+iy)}{it} = -i \frac{\partial f}{\partial y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (5.6)$$

Si $f'(z)$ existe, cette expression doit avoir une valeur unique, et donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5.8)$$

Ces équations s'appellent les *conditions de Cauchy-Riemann*. Elles sont nécessaires et suffisantes pour que f soit dérivable au point z .

Exemple 2 : Nous avons vu dans l'exemple 1 que pour la fonction $f(z) = z^2$ on a $u = x^2 - y^2$ et $v = 2xy$. Alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5.9)$$

La fonction est donc dérivable à tout point z , et est alors une fonction entière.

Exemple 3 : Pour une fonction réelle d'une variable complexe on a $v = 0$. Ainsi cette fonction est soit constante, soit non-dérivable. Par exemple, la fonction $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ ne vérifie pas les conditions de Cauchy-Riemann car $\partial u/\partial x = 2x \neq \partial v/\partial y = 0$.

5.1.3 Développements en séries

La formule de Taylor de l'analyse réelle peut être étendue aux fonctions d'une variable complexe : chaque fonction qui est analytique dans un cercle $|z - a| < R$ peut être représentée par sa série de Taylor

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (z - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n + \dots \quad (5.10)$$

La série converge vers $f(z)$ pour tout z intérieur à ce cercle.

Si une fonction f n'est pas analytique au point a on ne peut pas appliquer le théorème de Taylor en ce point. Dans ce cas, il existe parfois une généralisation en une série faisant intervenir à la fois des puissances positives et négatives de $(z - a)$. De telles séries sont appelées des *séries de Laurent*.

Théorème 1 : (Théorème de Laurent) Soient C_0 et C_1 deux cercles orientés positivement centrés au point a et f une fonction analytique sur C_0 , C_1 et dans la couronne comprise entre ces deux cercles, alors en chaque point z de la couronne f est représenté par le développement

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n. \quad (5.11)$$

5.1.4 Intégrales d'une fonction complexe

Définition : (Intégrale d'une fonction complexe d'une variable réelle) Soit $w(t) = u(t) + iv(t)$ une fonction complexe de la variable réelle t . Soient les fonctions $u(t)$ et $v(t)$ définies sur l'intervalle fermé et borné $a \leq t \leq b$, et continues par morceaux. On définit alors l'intégrale de w par

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt. \quad (5.12)$$

Nous allons utiliser cette définition pour introduire une intégrale le long d'un contour dans le plan complexe. La variable t deviendra un paramètre qui décrit ce chemin. Pour ceci il faut d'abord définir la notion de contour :

Définition : (Arc) Un arc C dans le plan complexe est un ensemble de points $z = (x, y)$ tels que

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b \quad (5.13)$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions continues du paramètre réel t . Si $z(a) = z(b)$ alors l'arc est *fermé*. Si les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ existent alors la dérivée de l'arc est

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t). \quad (5.14)$$

L'arc est *différentiable* si les dérivées existent et sont continues.

Nous pouvons introduire la longueur d'un arc différentiable par

$$L = \int_a^b |z'(t)| dt \quad (5.15)$$

où

$$|z'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}. \quad (5.16)$$

La longueur L est invariante sous des changements de paramétrisation de l'arc C .

Définition : (Contour) Un contour est un ensemble d'arcs différentiables joints bout à bout.

Si $z(t)$ est une fonction qui décrit un contour, alors $z(t)$ est continue, et sa dérivée $z'(t)$ est continue par morceaux. La longueur d'un contour est la somme des longueurs des arcs différentiables qui le forment. Si $a \leq t \leq b$ et $z(a) = z(b)$ alors le contour est *fermé*.

Nous pouvons maintenant définir l'intégrale de $f(z)$ le long d'un contour C :

Définition : Supposons que C est un contour représenté par l'équation $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$. Si la fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est continue par morceaux sur C on définit l'intégrale de contour de f le long de C comme :

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt. \quad (5.17)$$

Plus explicitement, on a donc

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b (ux' - vy')dt + i \int_a^b (vx' + uy')dt. \quad (5.18)$$

5.1.5 Théorème de Cauchy et théorème des résidus

Théorème 2 : (Théorème de Cauchy) Si une fonction $f(z)$ est analytique dans un domaine simplement connexe D , alors son intégrale prise le long de tout contour fermé C appartenant à D est nulle :

$$\oint_C f(z)dz = 0. \quad (5.19)$$

Ce théorème implique que la valeur d'une intégrale de a à b dans le domaine D est unique et ne dépend pas du choix de chemin C entre a et b .

Exercice 1 :

Soit $\sigma, k \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Vérifier que l'intégrand est une fonction entière et utiliser le théorème de Cauchy pour calculer

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{ikx} dx \quad (5.20)$$

ce qui est la transformée de Fourier d'une Gaussienne de largeur σ .

Indications : Suivre par exemple les pas suivants :

- Considérer l'intégrand comme une fonction complexe en mettant $x \rightarrow z = x + iy$. Vérifier que les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfait.
- Il existe un y_* tel que la partie imaginaire de l'exposant disparaît. Résoudre l'intégrale pour $y = y_*$.
- Pour utiliser le théorème de Cauchy, il faut fermer le contour d'intégration. Le faire de $(x, y) = (-L, y_*)$ à $(-L, 0)$ et de $(L, 0)$ à (L, y_*) , et prendre ensuite la limite $L \rightarrow \infty$.

Nous pouvons utiliser le théorème de Cauchy aussi dans la situation suivante : Supposons qu'une fonction $f(z)$ soit analytique dans un domaine qui consiste en un cercle de rayon $R > 0$ autour d'un point a , mais que la fonction est singulière au point a . Dans ce cas, la fonction $f(z)$ a une représentation en série de Laurent,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n. \quad (5.21)$$

Certains de c_n peuvent être nuls.

Exercice 2 :

Démontrer que pour le cercle de rayon R , $C = \{x, |x| = R\}$, que

$$\oint_C z^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n = -1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (5.22)$$

par intégration directe le long de C .

Appliquant ce résultat à la représentation de la fonction f en terme de série de Laurent, en intégrant sur le cercle unité C' , orienté de manière positive, autour de a , nous trouvons

$$\oint_{C'} f(z)dz = 2\pi i c_{-1}. \quad (5.23)$$

Le théorème de Cauchy nous dit alors que nous aurions pu choisir n'importe quel contour qui enferme le point a et est dans le domaine analytique parce qu'il est toujours possible de connecter ce contour avec le cercle par deux lignes si près qu'ils ne contribuent pas à l'intégrale. Alors l'intégrale le long du contour combiné disparaît ce qui implique que l'intégrale le long du contour vaut moins l'intégrale le long du cercle. Il est important ici que le point singulier a est isolé tel qu'il y a un domaine analytique autour de lui, d'une taille quelconque.

Le nombre complexe c_{-1} , qui est le coefficient devant $1/(z - a)$ dans le développement (5.21), est appelé le *résidu* de f au point singulier isolé a , et désigné $\text{Res}(f, a)$.

Théorème 3 : (Théorème des résidus) Considérons un contour simple fermé C , orienté positivement, à l'intérieur duquel et sur lequel une fonction f est analytique excepté en un nombre fini de points singuliers z_1, z_2, \dots, z_n intérieurs à C . Alors

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) \quad (5.24)$$

où $\text{Res}(f, z_j)$ désigne le résidu de f au point z_j .

Pour démontrer ce théorème, on considère un petit cercle C_j autour de chaque point singulier isolée z_j (en prenant soin que les cercles sont suffisamment petits pour ne contenir qu'un seul point singulier). Alors

$$\oint_{C_j} f(z)dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_j). \quad (5.25)$$

En combinant C avec les cercles C_j on construit la frontière d'un région dans laquelle f est analytique. Par le théorème de Cauchy on a alors que

$$\oint_C f(z)dz - \sum_j \oint_{C_j} f(z)dz = 0, \quad (5.26)$$

d'où le résultat.

5.1.6 Calculs des résidus

Le théorème des résidus nous permet alors de calculer facilement des intégrales de contours dans le plan complexe, si on connaît les résidus. Par définition, le résidu est le coefficient du terme $1/(z-a)$ de la série de Laurent de $f(z)$ dans le domaine autour de a .

Exemple 4 : Soit la fonction $f(z) = (e^z - 1)/z$. Comme $e^z = \sum_{j=0}^{\infty} z^j/j!$ nous avons que

$$f(z) = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots \quad (5.27)$$

Par conséquent le point $z = 0$ est un point singulier éliminable, et f est analytique dans tout le plan complexe (une fonction *entière*). Alors toute intégrale de $f(z)$ le long d'un contour fermé est nulle (même si le contour inclut $z = 0$).

Exercice 3 :

Calculer le résidu de

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} \quad (5.28)$$

au point $z = 0$.

Exercice 4 :

Soit la fonction $f(z) = (z^2 - 2z + 3)/(z - 2)$.

(a) Déterminez la série de Laurent de $f(z)$ au point $z = 2$.

(b) Utilisez le théorème des résidus pour déterminer $\int_C f(z)dz$ pour C le cercle de rayon 1 autour $z = 2$.

Normalement la série de Laurent n'est pas facile à construire. Dans ce cas nous pouvons extraire le coefficient c_{-1} au moins en principe comme suit :

Définition : La fonction $f(z)$ a un pôle (un point singulier) d'ordre m en $z = a$ si $(z - a)^{m+1}f(z)$ est nulle en $z = a$ mais $(z - a)^m f(z)$ ne s'annule pas.

Ceci implique pour la série de Laurent au point $z = a$ que $c_j = 0$ pour $j < -m$.

Si $f(z)$ a un pôle simple (un pôle d'ordre 1) en $z = a$ alors

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z). \quad (5.29)$$

Si le pôle est d'ordre 2, une multiplication avec $(z - a)^2$ fait que la série de Laurent commence avec un terme constant qui multiplie c_{-2} et après le terme $(z - a)c_1$, tel que

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d}{dz} (z - a)^2 f(z). \quad (5.30)$$

Ceci se généralise comme suit : Si $f(z)$ possède un pôle d'ordre m au point $z = a$ alors le résidu de f en ce point est

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - a)^m f(z). \quad (5.31)$$

Exercice 5 :

Soit

$$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{x^4(1-2x)}. \quad (5.32)$$

Y a-t-il un pôle en $x = 0$, et si oui, quel est son ordre, et quel est le résidu ?

Exercice 6 :

Trouver les pôles de

$$\frac{1}{(1+z^2)^n} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (5.33)$$

et calculer les résidus.

5.2 Applications au calcul d'intégrales réelles

Une application typique du théorème des résidus est le calcul d'intégrales sur tout l'axe réel. Pour ceci nous avons encore besoin du *Lemme de Jordan* : En intégrant le long d'un arc de cercle Γ de rayon R , centré sur z_0 on a que

$$\text{Si } \lim_{R \rightarrow 0} R \max_{z \in \Gamma} |f(z)| = 0 \Rightarrow \lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad (5.34)$$

$$\text{Si } \lim_{R \rightarrow \infty} R \max_{z \in \Gamma} |f(z)| = 0 \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad (5.35)$$

Démonstration : Si M est une constante positive tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \Gamma$ on a que

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f[z(t)]z'(t)| dt \leq M \int_a^b |z'(t)| dt = ML. \quad (5.36)$$

ou L est la longueur de l'arc du cercle. Si l'angle d'ouverture de l'arc est $\Omega \leq 2\pi$ alors $L = R\Omega$ et le Lemme de Jordan suit. Nous pouvons aussi voir que les conditions mentionnées ci-dessus sont suffisants mais pas nécessaires.

Remarque : Il y a d'autres formes du Lemme de Jordan, qui reviennent plus au moins au même. Le but est toujours de pouvoir fermer le contour d'intégration et de démontrer que la valeur de l'intégrale ne change pas.

Avec ce lemme nous pouvons compléter une intégrale sur l'axe réel avec un demi-cercle. Si l'intégrale le long du dernier tend vers zéro pour $R \rightarrow \infty$ alors la valeur de l'intégrale réelle est donnée par la somme des résidus à l'intérieur de ce contour, multipliée par $2\pi i$.

Exemple 5 : Calculer $\int_{-\infty}^{\infty} dx/(1+x^2)$. D'abord nous vérifions que nous pouvons appliquer le Lemme de Jordan pour fermer le contour par un demi-cercle. Pour ceci nous notons que l'intégrant tend suffisamment vite vers zéro :

$$R|f(z)| = \frac{R}{|1 + R^2 e^{2i\phi}|} = \frac{R}{\sqrt{1 + 2R^2 \cos(2\phi) + R^4}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (5.37)$$

Il suffit donc d'évaluer le résidu aux pôles $a = \pm i$. Ce sont des pôles simples, alors

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i)}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}. \quad (5.38)$$

Alors nous avons, avec le théorème des résidus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_C \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \text{Res}(f, i) = \pi. \quad (5.39)$$

Exercice 7 :

Calculer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad (5.40)$$

avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 8 :

Calculer

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}. \quad (5.41)$$

Exercice 9 :

Dans le chapitre sur les fonctions de Green, nous avons reconstruit l'intégrale suivante pour trouver une fonction de Green :

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{k^2 + \nu} \right). \quad (5.42)$$

Ici \mathcal{F}^{-1} est la transformée de Fourier inverse, et $\nu > 0$. Calculez $G(x)$ en utilisant le calcul des résidus.

Exercice 10 :

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\Re \alpha > 0$, et soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}(k)$ de

$$f(x) = \frac{1}{(ix - \alpha)^{n+1}}. \quad (5.43)$$

Exercice 11 :

(Fonction Green de l'oscillateur harmonique) L'équation de l'oscillateur harmonique est $y''(t) + \omega_0^2 y(t) = f(t)$ où $\omega_0 > 0$ est un paramètre réel fixe et $f(t)$ décrit une excitation externe. Une approche pour construire la fonction Green passe par la solution fondamentale $G(t)$ pour $f(t) = \delta(t)$ (voir exercice 5 du chapitre sur les fonctions de Green). Une transformée de Fourier de l'équation $G''(t) + \omega_0^2 G(t) = \delta(t)$ mène à

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)\hat{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (5.44)$$

Si nous essayons de calculer la transformée inverse,

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega, \quad (5.45)$$

nous nous rendons compte qu'il y a deux pôles sur l'axe réel, à $\omega = \pm\omega_0$. Pour contourner (littéralement) ce problème, on peut remplacer $\hat{G}(\omega)$ par

$$\hat{G}^{(\text{ret})}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\omega_0} \left[\frac{1}{\omega + \omega_0 - i\epsilon} - \frac{1}{\omega - \omega_0 - i\epsilon} \right], \quad (5.46)$$

$$\hat{G}^{(\text{adv})}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\omega_0} \left[\frac{1}{\omega + \omega_0 + i\epsilon} - \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\epsilon} \right]. \quad (5.47)$$

Ceci correspond à deux chemins d'intégration qui contournent les pôles de manière différents.

- Déssiner les chemins d'intégration.
- Renfermer les chemins par des demi-cercles à l'infini et calculer les intégrales par le théorème des résidus.
- Interpréter les fonctions de Green comme la réponse d'un oscillateur harmonique à une excitation courte au temps $t = 0$. Quelle est la différence entre la fonction de Green *retardée* $G^{(\text{ret})}(t)$ et la fonction de Green *avancée* $G^{(\text{adv})}(t)$? Laquelle des deux allez vous utiliser pour calculer l'effet d'une excitation $f(t)$ sur un oscillateur harmonique initialement au repos, par $y = G * f$?

Exercice 12 :

(Fonctions de Green pour équations d'onde, de Poisson et de Helmholtz) La solution fondamentale $G(\mathbf{x}, t)$ (cf exercice 5 du chapitre sur les fonctions de Green) de l'équation d'onde est la solution de l'équation suivante¹ :

$$\left(-\Delta + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) G(\mathbf{x}, t) = \sqrt{2\pi} \delta(x, t). \quad (5.48)$$

Nous pouvons simplifier cette équation en faisant d'abord une transformation de Fourier par rapport au temps, $t \rightarrow \omega$, ce qui mène à l'équation

$$\left(-\Delta - \frac{\omega^2}{c^2} \right) G_\omega(\mathbf{x}) = \delta(x), \quad (5.49)$$

ce qui rend explicite le lien avec l'exercice 7, équation de Helmholtz, du chapitre sur les fonctions de Green. La constante dans la première équation à été choisie pour que le membre de droite de la deuxième ne soit que $\delta(x)$. En faisant aussi une transformation de Fourier sur $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}$, nous trouvons l'équation élémentaire

$$\left(\mathbf{p}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \hat{G}_\omega(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (5.50)$$

1. Il s'agit de la solution obtenue par transformation de Fourier. Elle reproduit la discontinuité de la dérivée mais doit en général être superposée à une combinaison linéaire de solutions homogènes pour satisfaire les conditions aux limites du problème.

- a) Soit $\omega^2 < 0$. Poser $z = \omega^2/c^2$ puis calculer $G_z(\mathbf{x})$ par intégration dans le plan complexe. Comparer avec l'exercice 7 du chapitre sur les fonctions de Green.
- b) Prendre la limite $z \rightarrow 0$ de la solution trouvée en (a), et comparer avec la fonction de Green du Laplacien, exercice 6 du chapitre sur les fonctions de Green.
- c) Soit $\omega^2 > 0$. Si on veut calculer $G_\omega(\mathbf{x})$ on trouve que les pôles de l'intégrand dans la transformation de Fourier se trouvent sur l'axe réelle, comme dans l'exercice précédent. Comme dans cet exercice il faut contourner les pôles en les déplaçant de $\pm i\epsilon$, ce qui mène à des fonctions de Green différents. Calculez-les, et comparez-les avec l'interprétation en termes d'ondes sphériques de l'exercice 7b du chapitre sur les fonctions de Green.
- d) Calculer pour le cas (c) $G(\mathbf{x}, t)$ en faisant une transformation de Fourier inverse sur les fréquences, $\omega \rightarrow t$. Interpréter les résultats en termes de fonctions de Green avancées et retardées. Montrer alors qu'une source $S(\mathbf{x}, t)$ localisée dans le temps et dans l'espace donne lieu à une onde (une solution de l'équation d'onde avec $S(\mathbf{x}, t)$ au second membre)

$$u(\mathbf{x}, t) = \int \frac{[S(\mathbf{x}', t')]_{\text{ret}}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (5.51)$$

où $[\dots]_{\text{ret}}$ signifie que le temps t' est évalué au temps retardé, $t' = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$.

Exercice 13 :

Utiliser l'intégration par contour pour évaluer la somme

$$S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + a^2}, \quad a > 0. \quad (5.52)$$

- a) Montrer que S correspond à la somme des résidus en des pôles sur l'axe réel de

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2} \pi \cot(\pi z). \quad (5.53)$$

La somme peut donc être représentée comme la somme d'intégrales sur des petits cercles autour de ces pôles.

- b) Considérer un contour qui résulte si on agrandit les petits cercles de la partie (a) jusqu'à ce qu'ils forment un seul contour long et mince proche de l'axe réel. Dessiner ce contour pour N termes de la somme S et puis considérer la limite $N \rightarrow \infty$. Dans cette limite le contour se coupe en deux intégrales le long de $x \pm i\epsilon$. Vérifier par le Lemme de Jordan que vous pouvez fermer le contour par des grands demi-cercles, et en déduire que la somme S est égale à l'opposé de la somme des résidus en des pôles non-réels de $f(z)$.
- c) Utiliser le calcul des résidus pour trouver S .

5.3 Méthode du Col

Souvent il n'est pas possible de résoudre une intégrale de manière exacte. Pour certaines classes d'intégrales il est possible de trouver des solutions approximatives avec bonne précision, par exemple pour des intégrands du type $e^{Mf(x)}$ pour M grand. Dans cette section nous commençons en regardant des intégrales réelles avant de discuter une extension de la méthode dans le plan complexe, en utilisant le théorème de Cauchy.

5.3.1 Méthode de Laplace

La méthode de Laplace est très simple : pour une intégrale du type $\int_a^b dx \exp(Mf(x))$ nous développons $f(x)$ en série de Taylor autour du maximum global (supposé à $x = x_0$ et $x_0 \neq a, b$:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \mathcal{O}((x - x_0)^3). \quad (5.54)$$

Si M est suffisamment grand, nous pouvons négliger les termes d'ordre supérieur, et en plus nous pouvons intégrer de $-\infty$ à ∞ puisque l'intégrand décroît très vite loin de x_0 . Alors

$$\int_a^b dx e^{Mf(x)} \approx e^{Mf(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}M|f''(x_0)|(x-x_0)^2} = e^{Mf(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{M|f''(x_0)|}}. \quad (5.55)$$

Exemple 6 : Dérivons la formule de Stirling, $N! \approx \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}$. Pour ce faire, nous notons que $N! = \Gamma(N+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^N dx$. Le changement de variable, $x = Nz$ tel que $dx = Ndz$ conduit à

$$N! = \int_0^{\infty} e^{-Nz} (Nz)^N N dz = N^{N+1} \int_0^{\infty} e^{-Nz} e^{N \ln z} dz = N^{N+1} \int_0^{\infty} e^{N(\ln z - z)} dz. \quad (5.56)$$

C'est une intégrale de la bonne forme, avec $f(x) = \ln x - x$. La première dérivée est $1/x - 1$ et alors $f(x)$ atteint son maximum en $x_0 = 1$. La seconde dérivée est $f''(x) = -1/x^2$. En utilisant la méthode de Laplace nous avons donc

$$N! \approx N^{N+1} e^{-N} \sqrt{\frac{2\pi}{N}} \quad (5.57)$$

qui n'est autre que la formule de Stirling.

Exercice 14 :

Un télescope équipé d'un compteur de photons observe une étoile lointaine pendant une minute pour mesurer le taux d'arrivée de photons par minute, λ . Supposons que le nombre r de photons détectés suit une distribution de Poisson de paramètre λ ,

$$P(r|\lambda) = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}. \quad (5.58)$$

En utilisant une distribution à priori $P(\lambda) = 1/\lambda$, calculer une approximation de la distribution postérieure pour λ , $P(\lambda|r) \propto P(r|\lambda)P(\lambda)$ en faisant une approximation de Laplace

- en λ
- en $\log \lambda$ (utiliser alors une distribution à priori $P(\log \lambda) = \text{constant}$).

Donner le mode (pic de la distribution), la largeur et la normalisation (l'inverse de la valeur de l'intégrale sur λ) en utilisant cet approximation. Comparer ensuite la normalisation avec la normalisation exacte.

5.3.2 Méthode du Col

Si la fonction f est une fonction complexe, alors la méthode de Laplace ne suffit pas, parce que la phase complexe peut varier rapidement dans la région où la partie réelle de f est maximale. Ceci peut supprimer fortement la valeur de l'intégrale dans cette région.

Mais il est possible de déformer le chemin d'intégration dans le plan complexe aussi longtemps qu'on reste dans un domaine d'analyticité de f . Le but est alors de trouver un chemin sur lequel la phase y est constante. Pour cette raison la méthode du col s'appelle aussi *méthode de la phase stationnaire*. En plus, comme nous allons voir, c'est aussi le chemin avec la décroissance la plus rapide de la partie réelle, et la méthode est souvent appelée *method of steepest descent* en Anglais.

En général, pour une intégrale $I = \int_{\gamma} e^{f(z)} dz$ nous cherchons un chemin continûment déformé γ_{α} (de manière qu'on ne passe par aucune singularité de f pendant cette déformation) tel que

- (a) Le long de γ_α la phase $\Im m f$ est constante.
- (b) Il existe un point $z_\alpha \in \gamma_\alpha$ tel que $(df/dz)(z_\alpha) = 0$.
- (c) La partie réelle de f passe par un maximum local à $z = z_\alpha$.

Un point vérifiant les conditions (b) et (c) est appelé un *col* associé à $f(z)$. C'est parce que les conditions the Cauchy-Riemann, éqs. (5.7) et (5.8), impliquent que

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (5.59)$$

et de même pour $v(x, y)$. Alors si $df(z)/dz = 0$ mais les deuxièmes dérivées partielles sont non-nulles, ils doivent avoir le signe opposé et ce n'est pas un maximum ou un minimum mais un col. Considérons aussi les lignes de u constant qui sont perpendiculaire au vecteur $\nabla u = (\partial u/\partial x, \partial u/\partial y)$ qui pointe dans la direction de croissance maximale. Nous trouvons que

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5.60)$$

La condition pour qu'une fonction complexe soit analytique impose donc des contraintes fortes sur cette fonction.

Pour nous, le fait que les gradients de u et v sont perpendiculaire implique que la direction le long de laquelle la phase est constante (la condition (a)) est aussi la direction de la décroissance la plus rapide de la partie réelle de la fonction.

La condition que la phase reste stationnaire nous fournit l'équation de courbe γ_α . Le long de cette courbe la phase est donc constante et on se ramène à une méthode du col réel. Alors, grâce aux propriétés des fonctions analytiques, le chemin sur lequel les oscillations de e^{f_α} sont nulles est aussi le chemin sur lequel $\Re e f_\alpha$ présente un maximum local le plus accentué possible.

Pour évaluer l'intégrale sur le chemin γ_α nous introduisons comme dans la section 5.1.4 un paramètre réel t qui paramétrise le chemin à travers le col, normalisé tel que

$$f(z) = f(z_\alpha) - \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}((z - z_\alpha)^3). \quad (5.61)$$

En comparant cette expression avec la formule de Taylor autour de z_α , cf éq. (5.10),

$$f(z) = f(z_\alpha) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f(z_\alpha)}{dz^2} (z - z_\alpha)^2 + \mathcal{O}((z - z_\alpha)^3) \quad (5.62)$$

nous trouvons que

$$t = (z - z_\alpha) \sqrt{-\frac{d^2 f(z_\alpha)}{dz^2}}. \quad (5.63)$$

Comme dans le cas de la méthode de Laplace nous remplaçons la vraie intégrale le long de γ_α par son approximation Gaussienne autour de z_α . Par la formule d'intégration complexe, (5.17), nous avons que

$$I_\alpha \approx e^{f(z_\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} z'(t) dt \approx e^{f(z_\alpha)} \left\{ \frac{2\pi}{-d^2 f(z_\alpha)/dz^2} \right\}^{1/2} \quad (5.64)$$

Pour le deuxième pas nous avons supposé que $z'(t) = (d^2 f(z)/dz^2)^{-1/2}$ peut être considéré comme constant à l'échelle du terme Gaussien, ce qui nous permet d'évaluer l'intégrale Gaussienne résultante. Nous pouvons constater que la formule correspond à celle de la méthode de Laplace, (5.55), sauf qu'elle est à évaluer au col z_α du chemin d'intégration déformée γ_α . En effet, si on a affaire à une fonction réelle, la phase est déjà stationnaire le long de l'axe réel et la méthode du col coïncide avec la méthode de Laplace.

Exemple 7 : Essayons de calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iax^2} dx, \quad a > 0. \quad (5.65)$$

Sans le facteur i ce serait une intégrale Gaussienne, mais maintenant c'est une fonction qui oscille rapidement. Pour trouver sa valeur, nous suivons la recette de la phase stationnaire. Considéré dans le plan complexe, l'intégrant est

$$-iaz^2 = 2axy - ia(x^2 - y^2). \quad (5.66)$$

Pour garder la phase stationnaire nous pouvons donc faire une rotation de 45 degrés sur la ligne $x = -y$. Sur cette ligne on a bien que $xy \leq 0$ et égale à zéro à l'origine. On a aussi que $df/dz = -2iaz$ est nulle à l'origine et alors la partie réelle $2axy$ passe bien par un maximum en ce point. Alors $z_\alpha = 0$, $d^2 f(z_\alpha)/dz^2 = -2ai$ et alors

$$I = \sqrt{\frac{2\pi}{2ai}} = \sqrt{\frac{\pi}{ai}}. \quad (5.67)$$

Dans ce cas le résultat est exact parce que les corrections d'ordre supérieures disparaissent. C'est aussi le résultat qu'on aurait obtenu naïvement en remplaçant $a \rightarrow ia$ pour se ramener au cas d'une intégrale Gaussienne simple, mais le passage par le plan complexe est nécessaire pour s'assurer que la solution est correcte. En effet il est encore nécessaire de vérifier que la rotation du chemin d'intégration ne change pas la valeur de l'intégrale. Nous notons que la condition du lemme de Jordan n'est pas satisfaite : pour z sur l'axe réel nous avons que $|f(z)| = 1$ pour n'importe quel distance L de l'origine. Le lemme de Jordan étant suffisant mais pas nécessaire, il est quand même permis de faire la rotation : La contribution à l'intégrale qui vient d'un ligne verticale de $(x, y) = (L, 0)$ à (L, L) qui relie les deux chemins d'intégration est

$$\left| \int_{(L,0)}^{(L,L)} f(z) dz \right| \leq \int_{(L,0)}^{(L,L)} |f(z)| dz = \int_0^L e^{2aLy} dy < \int_0^\infty e^{2aLy} dy = \frac{1}{2aL}. \quad (5.68)$$

Dans la limite $L \rightarrow \infty$ ceci tend vers zéro.

Exercice 15 :

Utiliser la méthode du col pour calculer (une approximation de) l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 + ikx} dx. \quad (5.69)$$

- Trouver les points z_α pour lesquels $df(z_\alpha)/dz = 0$.
- Déterminer un chemin pour lequel la phase est constante et qui passe par z_α . Est-ce un minimum où un maximum de la partie réelle de f ?
- Appliquer la formule de la méthode du col.

Comparer avec le résultat de l'exercice 1.

Exercice 16 :

La fonction Airy peut être écrite comme

$$\text{Ai}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\rho t + \frac{t^3}{3}\right)} dt. \quad (5.70)$$

Dériver l'approximation suivante pour $\rho > 0$ avec la méthode du col :

$$\text{Ai}(\rho) \approx \frac{e^{-\frac{2}{3}\rho^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}\rho^{1/4}}. \quad (5.71)$$

Exercice 17 :

Évaluer par la méthode du col la fonction de Bessel modifiée

$$I_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta e^{i\nu\theta} e^{x \cos \theta}, \quad (5.72)$$

(= $J_\nu(ix)$) avec $\nu > 0$ entier, pour x réel tendant vers $+\infty$.

Exercice 18 :

Évaluer par la méthode du col la fonction de Bessel

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta e^{ix \cos \theta}, \quad (5.73)$$

pour x réel tendant vers $+\infty$.

Quelques références :

- [1] W. APPEL, "Mathématiques pour la physique", H & K Editions.
- [2] M.J. ABLOWITZ & A.S. FOKAS, "Complex Variables", Cambridge Texts in Applied Mathematics.