

## Modèle du noyau composé (2)

- Réactions inverses l'une de l'autre

- $a_i + A_i \rightarrow a_j + A_j$ , de section efficace  $\sigma_{i \rightarrow j}$ 
  - $k_i$  = nombre d'onde du projectile  $a_i$  par rapport à la cible  $A_i$
- $a_j + A_j \rightarrow a_i + A_i$ , de section efficace  $\sigma_{j \rightarrow i}$ 
  - $k_j$  = nombre d'onde du projectile  $a_j$  par rapport à la cible  $A_j$

- Théorème (démontrable en mécanique quantique)

- pour une même énergie totale  $E$  dans le centre de masse:  $k_i^2 \sigma_{i \rightarrow j} = k_j^2 \sigma_{j \rightarrow i}$  relation du bilan détaillé

- On a ainsi

$$k_i^2 \sigma_i F_j = k_j^2 \sigma_j F_i \Rightarrow \frac{k_i^2 \sigma_i}{F_i} = \frac{k_j^2 \sigma_j}{F_j} = C(E) = \text{fonction de } E \text{ indépendante de } i \text{ ou } j$$

$$\sigma_{i \rightarrow j}(E) = \sigma_i(E) F_j = \frac{C(E) F_i}{k_i^2(E)} F_j = \frac{1}{k_i^2(E)} \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{\Gamma^2} C(E)$$

- Cas d'une résonance dans l'onde  $\ell$  avec un seul mode de désintégration (donc d'une diffusion élastique avec  $F_i=1$ ,  $\Gamma_i=\Gamma$ ,  $k_i=k$ ):

$$\sigma_{i \rightarrow i}^{(\ell)}(E) = \sigma_{el}^{(\ell)}(E) = \frac{1}{k^2} C(E) \Rightarrow C(E) = \pi(2\ell + 1) \frac{\Gamma^2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

## Modèle du noyau composé (3)

- Pour une résonance formée dans l'onde  $\ell$

$$\sigma_{i \rightarrow j}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k_i^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

 $a_i + A_i \rightarrow X^* \rightarrow a_j + A_j$

- valable dans le cas particulier d'une résonance de spin  $\ell$  formée dans le canal  $i$  à l'aide d'un projectile de spin 0 sur une cible de spin 0 et se désintégrant dans le canal  $j$

- Cas plus général tenant compte des spins

$$\sigma_{i \rightarrow j}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k_i^2} \frac{(2J+1)}{(2s_i+1)(2S_i+1)} \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

où  $\vec{J} = \vec{s}_i + \vec{S}_i + \vec{\ell}$  
 $\vec{J}$  = spin de la résonance  $X^*$   
 $\vec{s}_i$  = spin du projectile  $a_i$   
 $\vec{S}_i$  = spin de la cible  $A_i$

- valable dans le cas où les particules de l'état initial ne sont pas polarisées et où on ne mesure pas l'état de spin dans l'état final

# Modèle du noyau composé (4)

- Pour une réaction  $a+A$  donnant un état final quelconque ayant passé par une résonance dans l'onde  $\ell$

$$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_a^2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

$$\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_a (\Gamma - \Gamma_a)}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

$$\sigma_{\text{tot}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_a \Gamma}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

en remplaçant  $(2\ell+1)$  par le facteur de spin donné à la page précédente

$\Gamma_a$  = largeur partielle de la résonance dans le canal  $a+A$

$\Gamma$  = largeur totale de la résonance

$E_0$  = énergie centrale de la résonance

$E$  = énergie totale de la collision dans le centre de masse

$k = k(E)$  = nombre d'onde du projectile  $a$  par rapport à la cible  $A$

$\Gamma = \hbar/\tau$ , où  $\tau$  est la durée de vie moyenne de la résonance

# Diagramme d'Argand (1)

$$T_\ell = \frac{-\Gamma_a/2}{(E - E_0) + i\Gamma/2}$$

de sorte que

$$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) |T_\ell|^2 = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_a^2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

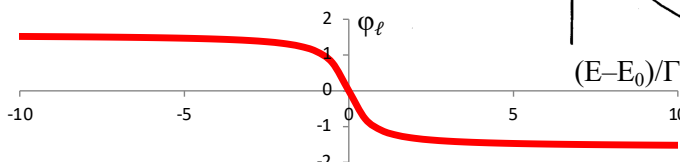
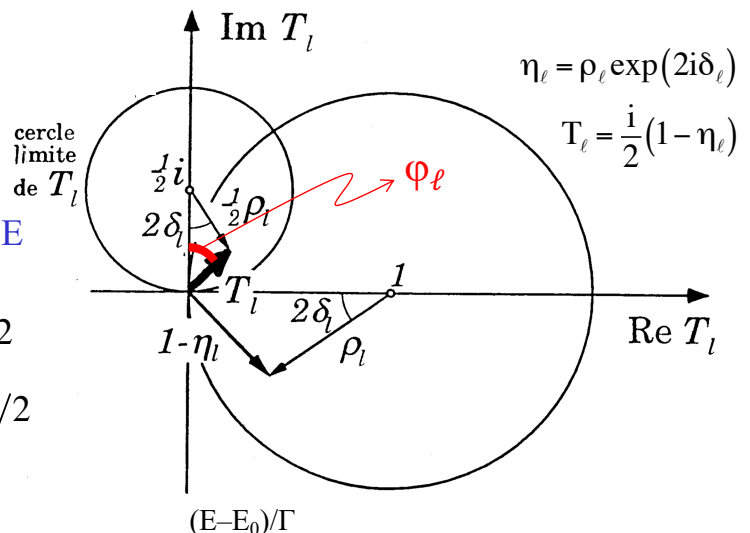
$$\phi_\ell = -\arctan\left(\frac{E - E_0}{\Gamma/2}\right)$$

- Evolution de  $\phi_\ell$  en fonction de  $E$  au voisinage de la résonance:

$$E \ll E_0 - \Gamma/2 \Rightarrow \phi_\ell \cong \pi/2$$

$$E = E_0 \Rightarrow \phi_\ell = 0$$

$$E \gg E_0 + \Gamma/2 \Rightarrow \phi_\ell \cong -\pi/2$$

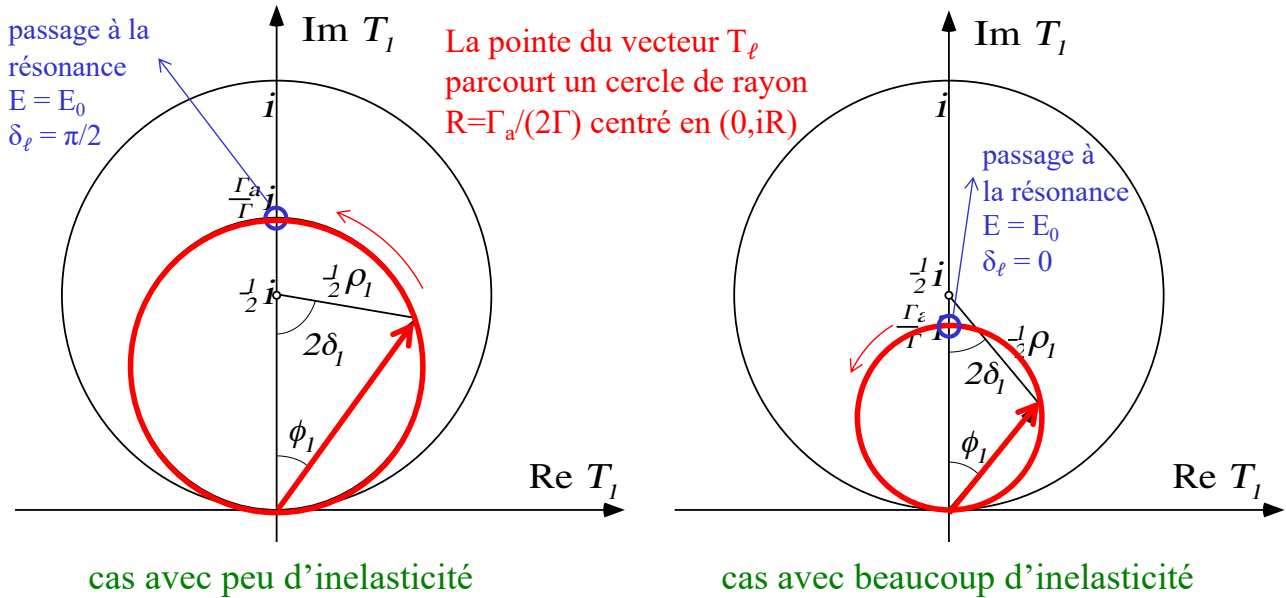


# Diagramme d'Argand (2)

$$T_\ell = \frac{-\Gamma_a/2}{(E - E_0) + i\Gamma/2}$$

de sorte que

$$\sigma_{el}^{(\ell)} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) |T_\ell|^2 = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_a^2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$



## Description d'une résonance selon Wigner (1)

- Comportement asymptotique de la fonction d'onde dans le cas d'une résonance dans l'onde  $\ell=0$

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\pi(2\ell+1)} \frac{i^\ell}{ikr} \left[ \eta_\ell \exp\left(i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right) - \exp\left(-i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right) \right] Y_\ell^0(\theta) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{ikr} \left[ \eta_0 \exp(ikr) - \exp(-ikr) \right] Y_0^0(\theta) \quad \text{avec } \eta_0 = \eta = \rho \exp(2i\delta) \end{aligned}$$

- Potentiel de portée finie a: 
$$\begin{cases} V(r) \neq 0 & \text{si } r < a \\ V(r) = 0 & \text{si } r \geq a \end{cases}$$

- la fonction d'onde radiale  $R(r) = u(r)/r$  doit être continue et dérivable en  $r=a$  
$$\begin{cases} u(r) = \text{sol. de l'éq. de Schrödinger} & \text{si } r < a \\ u(r) = \frac{\sqrt{\pi}}{ik} \left[ \eta \exp(ikr) - \exp(-ikr) \right] Y_0^0 & \text{si } r \geq a \end{cases}$$

- dérivée logarithmique en  $r=a$

$$f = \left[ r \frac{d}{dr} \log_e u(r) \right]_{r=a} = \left[ \frac{r}{u(r)} \frac{du(r)}{dr} \right]_{r=a} \rightarrow \eta = \frac{f + ika}{f - ika} \exp(-2ika)$$

# Description d'une résonance selon Wigner (2)

- Section efficace élastique ( $\ell=0$ )

$$\sigma_{el}^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} |1 - \eta|^2 = \frac{\pi}{k^2} |A_{pot} + A_{res}|^2$$

$$A_{pot} = \exp(2ika) - 1$$

$$A_{res} = \frac{-2ika}{f - ika}$$

amplitude potentielle

amplitude résonante

– cas particulier:

- diffusion à basse énergie ( $ka \ll 1$ )  
sur une petite sphère « dure »  
(ou « parfaitement réfléchissante »)

$$V(r) = \infty \text{ pour } r < a$$

$$u(r) = 0 \text{ pour } r < a$$

$$\Rightarrow f = \infty$$

$$\Rightarrow A_{res} = 0 \Rightarrow \sigma_{el}^{(0)} = 4\pi a^2$$

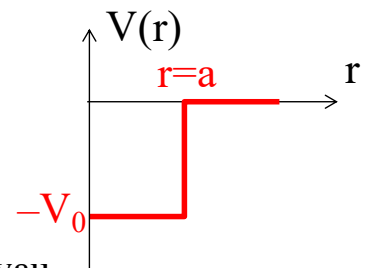
- Section efficace inélastique ( $\ell=0$ )

$$\sigma_{inel}^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} (1 - |\eta|^2) = \frac{\pi}{k^2} (1 - |1 - A_{res}|^2) = \frac{\pi}{k^2} \frac{-4ka \operatorname{Im} f}{|f - ika|^2} \quad \text{avec } \operatorname{Im} f \leq 0$$

$$\operatorname{Im} f = 0 \text{ (f réel)} \Leftrightarrow \sigma_{inel}^{(0)} = 0 \text{ (cas purement élastique)}$$

# Réaction quasi-purement inélastique ( $\ell=0$ )

- Pour un neutron incident, on peut supposer un puits de potentiel rectangulaire de profondeur  $V_0$



$$\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} = T = \text{énergie cinétique du projectile loin du noyau}$$

$$\frac{\hbar^2 K^2}{2\mu} = T + V_0 = \text{énergie cinétique du projectile dans le noyau}$$

- Si on admet que tout projectile en  $r=a$  est absorbé, la fonction d'onde radiale dans le noyau est une onde sphérique entrante uniquement

$$R(r) \propto \frac{\exp(-iKr)}{r} \text{ pour } r \leq a \Rightarrow f = -iKa \Rightarrow$$

$$\sigma_{inel}^{(0)} = \frac{4\pi K}{k(k+K)^2}$$

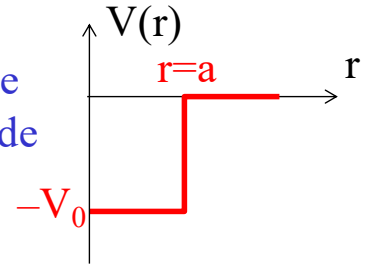
monotone décroissante avec T

- pour un projectile très lent,  $T \ll V_0$  et  $k \ll K$ :

$$\sigma_{inel}^{(0)} \propto \frac{1}{k} \propto \frac{1}{\text{vitesse du projectile}}$$

# Réaction purement élastique ( $\ell=0$ )

- Si on admet que tout projectile arrivant en  $r=a$  pénètre dans le noyau puis en ressort sans perdre d'énergie (diffusion élastique), la fonction d'onde radiale dans le noyau est



$$R(r) \propto \frac{\exp(i(Kr + 2\xi))}{r} - \frac{\exp(-iKr)}{r}$$

$2\xi$  = déphasage de l'onde sortante par rapport à l'onde entrante

- La dérivée logarithmique  $f$  s'annule pour certaines valeurs de  $E$

$$f = Ka \cot(Ka + \xi) \text{ réel}$$

$$f(E_0) = 0 \Leftrightarrow \text{passage à la résonance d'énergie } E_0$$

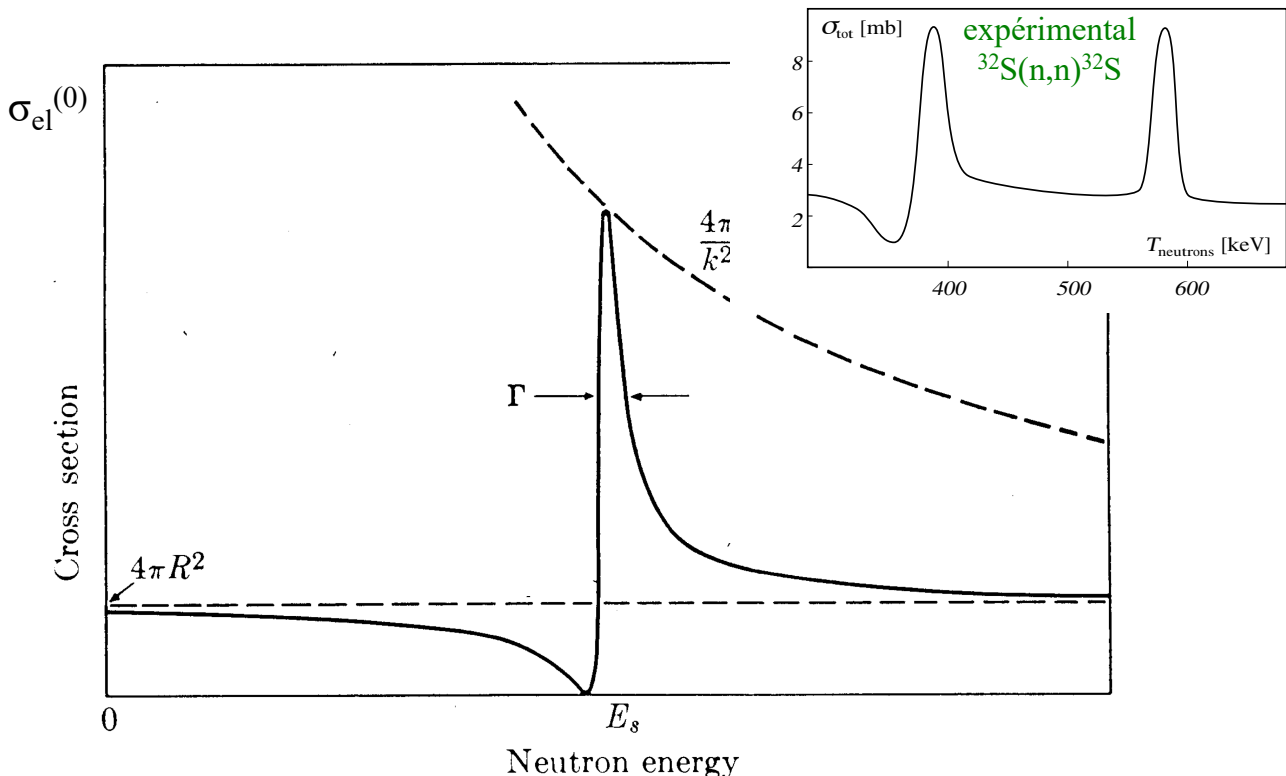
car, si  $f$  est réel,  $|A_{\text{res}}|^2$  est max. quand  $f=0$

- Au voisinage de la résonance

$$\sigma_{\text{el}}^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} \left| \underbrace{\exp(2ika)}_{A_{\text{pot}}} - 1 + \frac{i\Gamma_{\text{el}}}{E - E_0 + i\Gamma/2} \right|^2$$

$A_{\text{pot}} \qquad A_{\text{res}}$

## Section efficace de diffusion élastique de neutrons au voisinage d'une résonance dans l'onde $\ell=0$



# Diffusion élastique dans l'onde $\ell=0$ (diag. d'Argand)

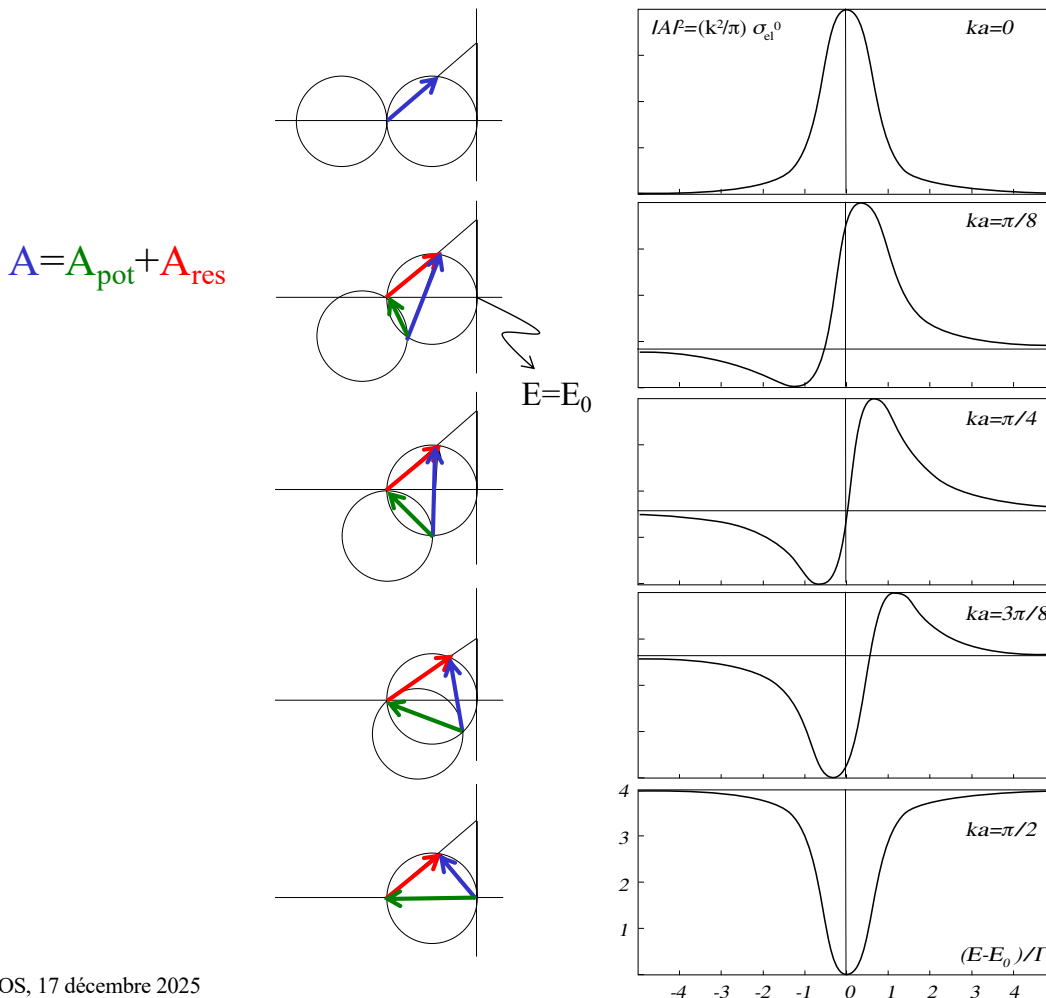
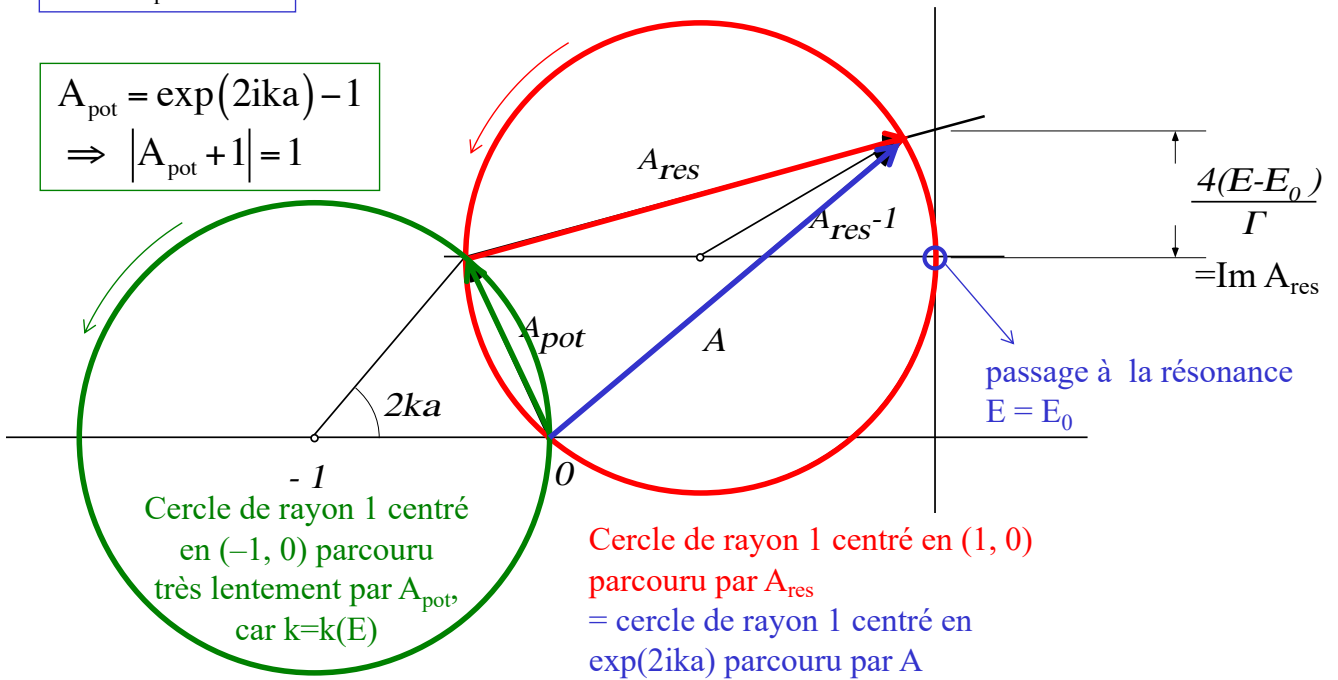
$$\sigma_{el}^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} |A|^2$$

$$A = A_{pot} + A_{res}$$

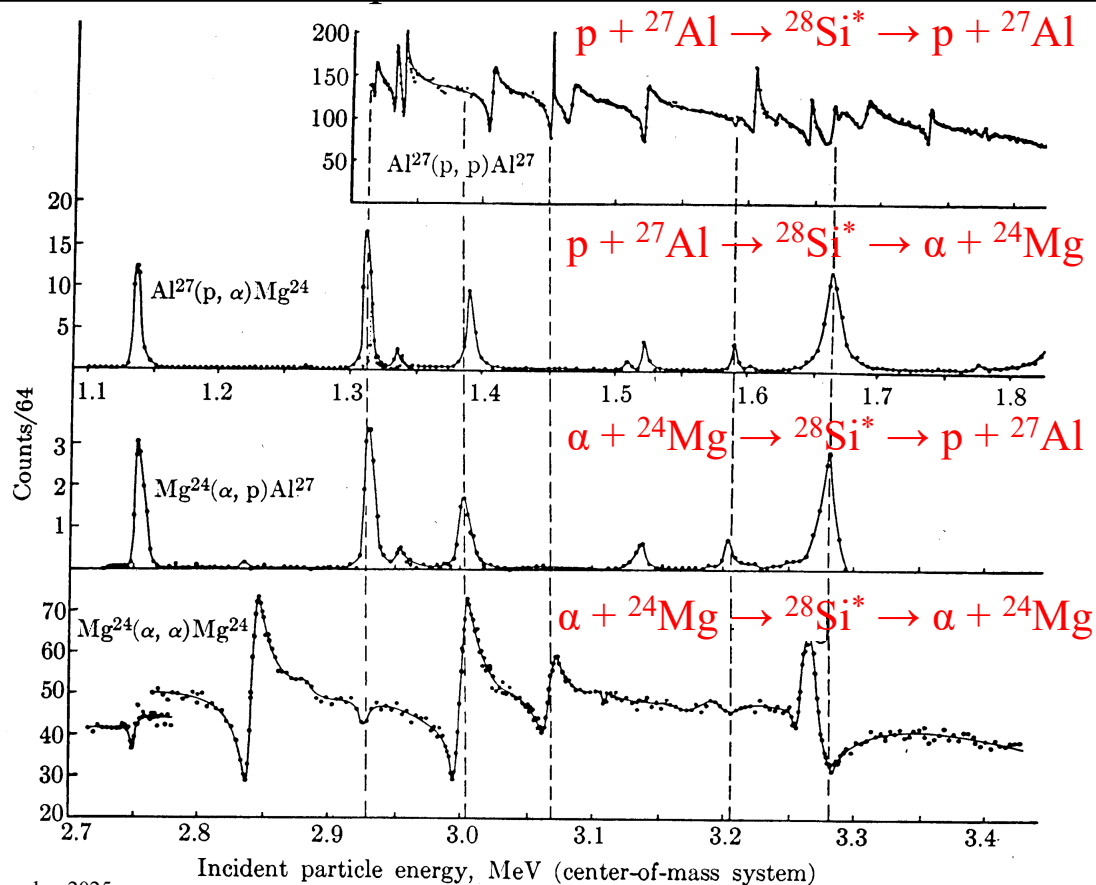
$$A_{res} = \frac{i\Gamma}{E - E_0 + i\Gamma/2} \Rightarrow |A_{res} - 1| = 1$$

$$A_{pot} = \exp(2ika) - 1$$

$$\Rightarrow |A_{pot} + 1| = 1$$



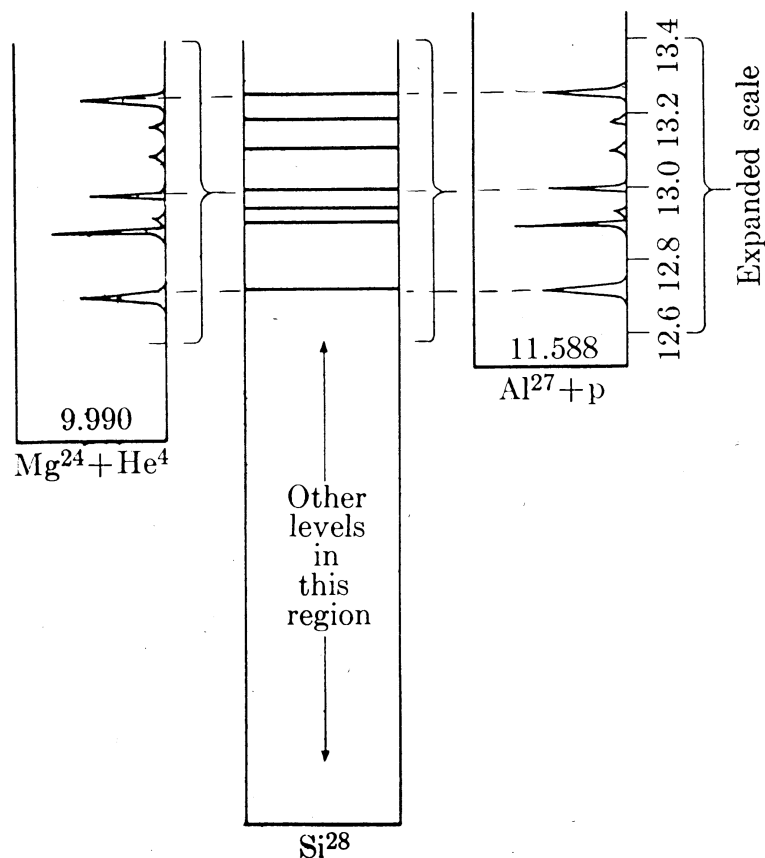
## Résonances correspondants aux niveaux excités du $^{28}\text{Si}$



OS, 17 décembre 2025

219

## Résonances correspondants aux niveaux excités du $^{28}\text{Si}$



OS, 17 décembre 2025

220