

Modèle du noyau composé (2)

- Réactions inverses l'une de l'autre

- $a_i + A_i \rightarrow a_j + A_j$, de section efficace $\sigma_{i \rightarrow j}$

- k_i = nombre d'onde du projectile a_i par rapport à la cible A_i

- $a_j + A_j \rightarrow a_i + A_i$, de section efficace $\sigma_{j \rightarrow i}$

- k_j = nombre d'onde du projectile a_j par rapport à la cible A_j

- Théorème (démontrable en mécanique quantique)

- pour une même énergie totale E dans le centre de masse:

$$k_i^2 \sigma_{i \rightarrow j} = k_j^2 \sigma_{j \rightarrow i}$$

relation du bilan détaillé

- On a ainsi

$$k_i^2 \sigma_i F_j = k_j^2 \sigma_j F_i \Rightarrow \frac{k_i^2 \sigma_i}{F_i} = \frac{k_j^2 \sigma_j}{F_j} = C(E) = \text{fonction de } E \text{ indépendante de } i \text{ ou } j$$

$$\sigma_{i \rightarrow j}(E) = \sigma_i(E) F_j = \frac{C(E) F_i}{k_i^2(E)} F_j = \frac{1}{k_i^2(E)} \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{\Gamma^2} C(E)$$

- Cas d'une résonance dans l'onde ℓ avec un seul mode de désintégration (donc d'une diffusion élastique avec $F_1=1$, $\Gamma_1=\Gamma$, $k_1=k$):

$$\sigma_{1 \rightarrow 1}^{(\ell)}(E) = \sigma_{el}^{(\ell)}(E) = \frac{1}{k^2} C(E) \Rightarrow C(E) = \pi(2\ell + 1) \frac{\Gamma^2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

Modèle du noyau composé (3)

- Pour une résonance formée dans l'onde ℓ

$$\sigma_{i \rightarrow j}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k_i^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

$$a_i + A_i \rightarrow X^* \rightarrow a_j + A_j$$

- valable dans le cas particulier d'une résonance de spin ℓ formée dans le canal i à l'aide d'un projectile de spin 0 sur une cible de spin 0 et se désintégrant dans le canal j

- Cas plus général tenant compte des spins

$$\sigma_{i \rightarrow j}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k_i^2} \frac{(2J + 1)}{(2s_i + 1)(2S_i + 1)} \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

où $\vec{J} = \vec{s}_i + \vec{S}_i + \vec{\ell}$

\vec{J} = spin de la résonance X^*

\vec{s}_i = spin du projectile a_i

\vec{S}_i = spin de la cible A_i

- valable dans le cas où les particules de l'état initial ne sont pas polarisées et où on ne mesure pas l'état de spin dans l'état final

Modèle du noyau composé (4)

- Pour une réaction $a+A$ donnant un état final quelconque ayant passé par une résonance dans l'onde ℓ

$$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_a^2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$
$$\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_a (\Gamma - \Gamma_a)}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$
$$\sigma_{\text{tot}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_a \Gamma}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

en remplaçant
($2\ell+1$) par le
facteur de spin
donné à la page
précédente

Γ_a = largeur partielle de la résonance dans le canal $a+A$

Γ = largeur totale de la résonance

E_0 = énergie centrale de la résonance

E = énergie totale de la collision dans le centre de masse

$k = k(E)$ = nombre d'onde du projectile a par rapport à la cible A

$\Gamma = \hbar/\tau$, où τ est
la durée de vie
moyenne de la
résonance

Diagramme d'Argand (1)

$$T_\ell = \frac{-\Gamma_a/2}{(E - E_0) + i\Gamma/2}$$

de sorte que

$$\sigma_{el}^{(\ell)} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) |T_\ell|^2 = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_a^2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

$$\phi_\ell = -\arctan\left(\frac{E - E_0}{\Gamma/2}\right)$$

– Evolution de ϕ_ℓ en fonction de E au voisinage de la résonance:

$$\begin{aligned} E \ll E_0 - \Gamma/2 &\Rightarrow \phi_\ell \cong \pi/2 \\ E = E_0 &\Rightarrow \phi_\ell = 0 \\ E \gg E_0 + \Gamma/2 &\Rightarrow \phi_\ell \cong -\pi/2 \end{aligned}$$

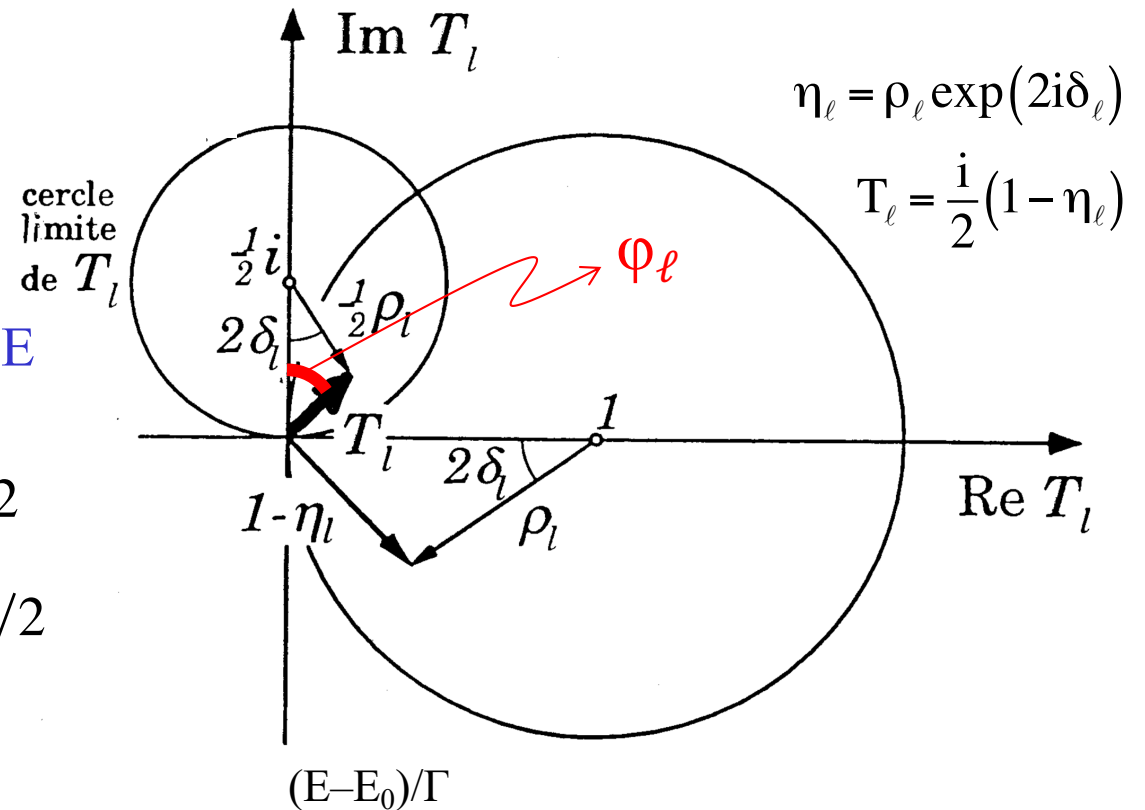
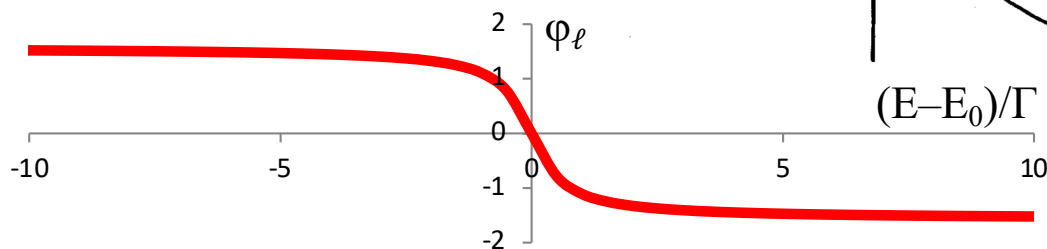
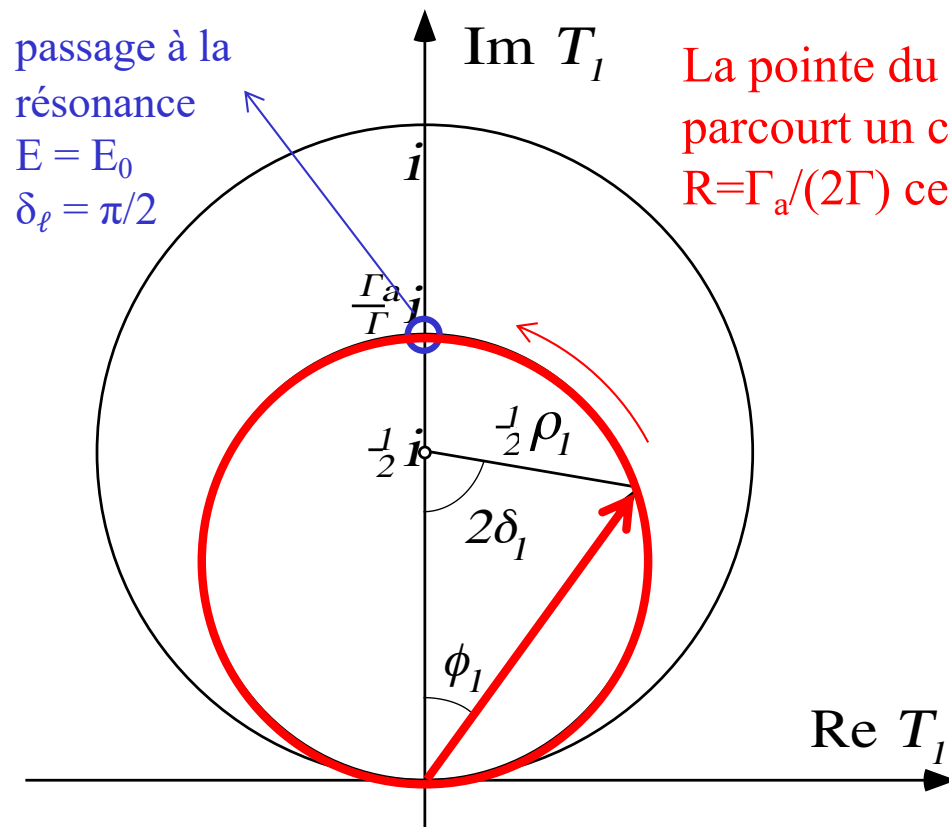


Diagramme d'Argand (2)

$$T_\ell = \frac{-\Gamma_a/2}{(E - E_0) + i\Gamma/2}$$

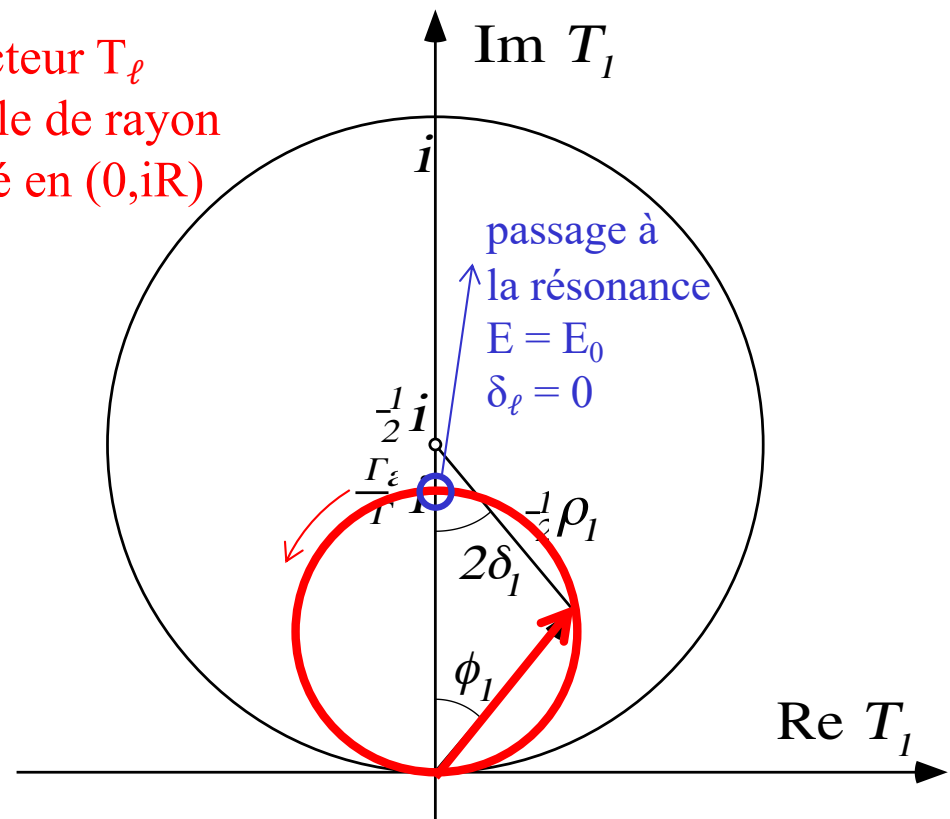
de sorte que

$$\sigma_{el}^{(\ell)} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) |T_\ell|^2 = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_a^2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$



cas avec peu d'inélasticité

La pointe du vecteur T_ℓ parcourt un cercle de rayon $R = \Gamma_a/(2\Gamma)$ centré en $(0, iR)$



cas avec beaucoup d'inélasticité

Description d'une résonance selon Wigner (1)

- Comportement asymptotique de la fonction d'onde dans le cas d'une résonance dans l'onde $\ell=0$

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} & \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\pi(2\ell+1)} \frac{i^\ell}{ikr} \left[\eta_\ell \exp\left(i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right) - \exp\left(-i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right) \right] Y_\ell^0(\theta) \\ & = \frac{\sqrt{\pi}}{ikr} \left[\eta_0 \exp(ikr) - \exp(-ikr) \right] Y_0^0(\theta) \quad \text{avec } \eta_0 = \eta = \rho \exp(2i\delta) \end{aligned}$$

- Potentiel de portée finie a :
$$\begin{cases} V(r) \neq 0 & \text{si } r < a \\ V(r) = 0 & \text{si } r \geq a \end{cases}$$
 - la fonction d'onde radiale $R(r) = u(r)/r$ doit être continue et dérivable en $r=a$
$$\begin{cases} u(r) = \text{sol. de l'éq. de Schrödinger} & \text{si } r < a \\ u(r) = \frac{\sqrt{\pi}}{ik} \left[\eta \exp(ikr) - \exp(-ikr) \right] Y_0^0 & \text{si } r \geq a \end{cases}$$
 - dérivée logarithmique en $r=a$

$$f = \left[r \frac{d}{dr} \log_e u(r) \right]_{r=a} = \left[\frac{r}{u(r)} \frac{du(r)}{dr} \right]_{r=a} \rightarrow \eta = \frac{f + ika}{f - ika} \exp(-2ika)$$

Description d'une résonance selon Wigner (2)

- Section efficace élastique ($\ell=0$)

$$\sigma_{\text{el}}^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} |1 - \eta|^2 = \frac{\pi}{k^2} |A_{\text{pot}} + A_{\text{res}}|^2$$

$$A_{\text{pot}} = \exp(2ika) - 1$$

$$A_{\text{res}} = \frac{-2ika}{f - ika}$$

amplitude potentielle

amplitude résonante

– cas particulier:

- diffusion à basse énergie ($ka \ll 1$)
sur une petite sphère « dure »
(ou « parfaitement réfléchissante »)

$$V(r) = \infty \quad \text{pour } r < a$$

$$u(r) = 0 \quad \text{pour } r < a$$

$$\Rightarrow f = \infty$$

$$\Rightarrow A_{\text{res}} = 0 \quad \Rightarrow \sigma_{\text{el}}^{(0)} = 4\pi a^2$$

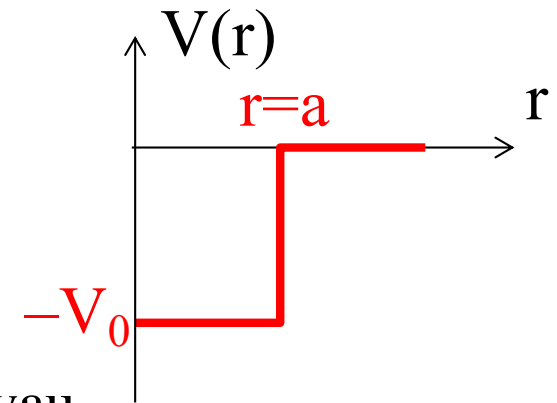
- Section efficace inélastique ($\ell=0$)

$$\sigma_{\text{inel}}^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} (1 - |\eta|^2) = \frac{\pi}{k^2} (1 - |1 - A_{\text{res}}|^2) = \frac{\pi}{k^2} \frac{-4ka \operatorname{Im} f}{|f - ika|^2} \quad \text{avec } \operatorname{Im} f \leq 0$$

$$\operatorname{Im} f = 0 \quad (f \text{ réel}) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{\text{inel}}^{(0)} = 0 \quad (\text{cas purement élastique})$$

Réaction quasi-purement inélastique ($\ell=0$)

- Pour un neutron incident, on peut supposer un puits de potentiel rectangulaire de profondeur V_0



$$\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} = T = \text{énergie cinétique du projectile loin du noyau}$$

$$\frac{\hbar^2 K^2}{2\mu} = T + V_0 = \text{énergie cinétique du projectile dans le noyau}$$

- Si on admet que tout projectile en $r=a$ est absorbé, la fonction d'onde radiale dans le noyau est une onde sphérique entrante uniquement

$$R(r) \propto \frac{\exp(-iKr)}{r} \text{ pour } r \leq a \Rightarrow f = -iKa \Rightarrow$$

$$\sigma_{\text{inel}}^{(0)} = \frac{4\pi K}{k(k+K)^2}$$

monotone
décroissante
avec T

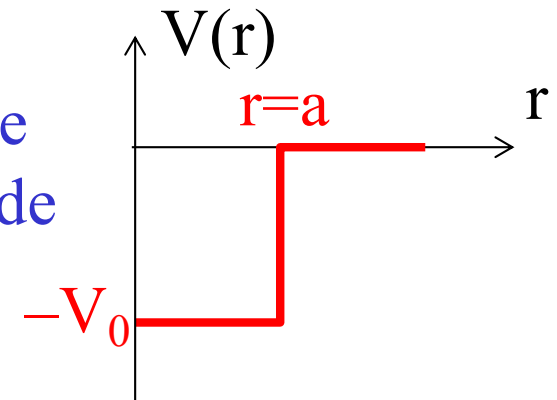
- pour un projectile très lent,
 $T \ll V_0$ et $k \ll K$:

$$\sigma_{\text{inel}}^{(0)} \propto \frac{1}{k} \propto \frac{1}{\text{vitesse du projectile}}$$

Réaction purement élastique ($\ell=0$)

- Si on admet que tout projectile arrivant en $r=a$ pénètre dans le noyau puis en ressort sans perdre d'énergie (diffusion élastique), la fonction d'onde radiale dans le noyau est

$$R(r) \propto \frac{\exp(i(Kr + 2\xi))}{r} - \frac{\exp(-iKr)}{r}$$



$2\xi =$ déphasage de l'onde sortante par rapport à l'onde entrante

- La dérivée logarithmique f s'annule pour certaines valeurs de E

$$f = Ka \cot(Ka + \xi) \quad \text{réel}$$

$$f(E_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{passage à la résonance d'énergie } E_0$$

car, si f est réel, $|A_{\text{res}}|^2$ est max. quand $f=0$

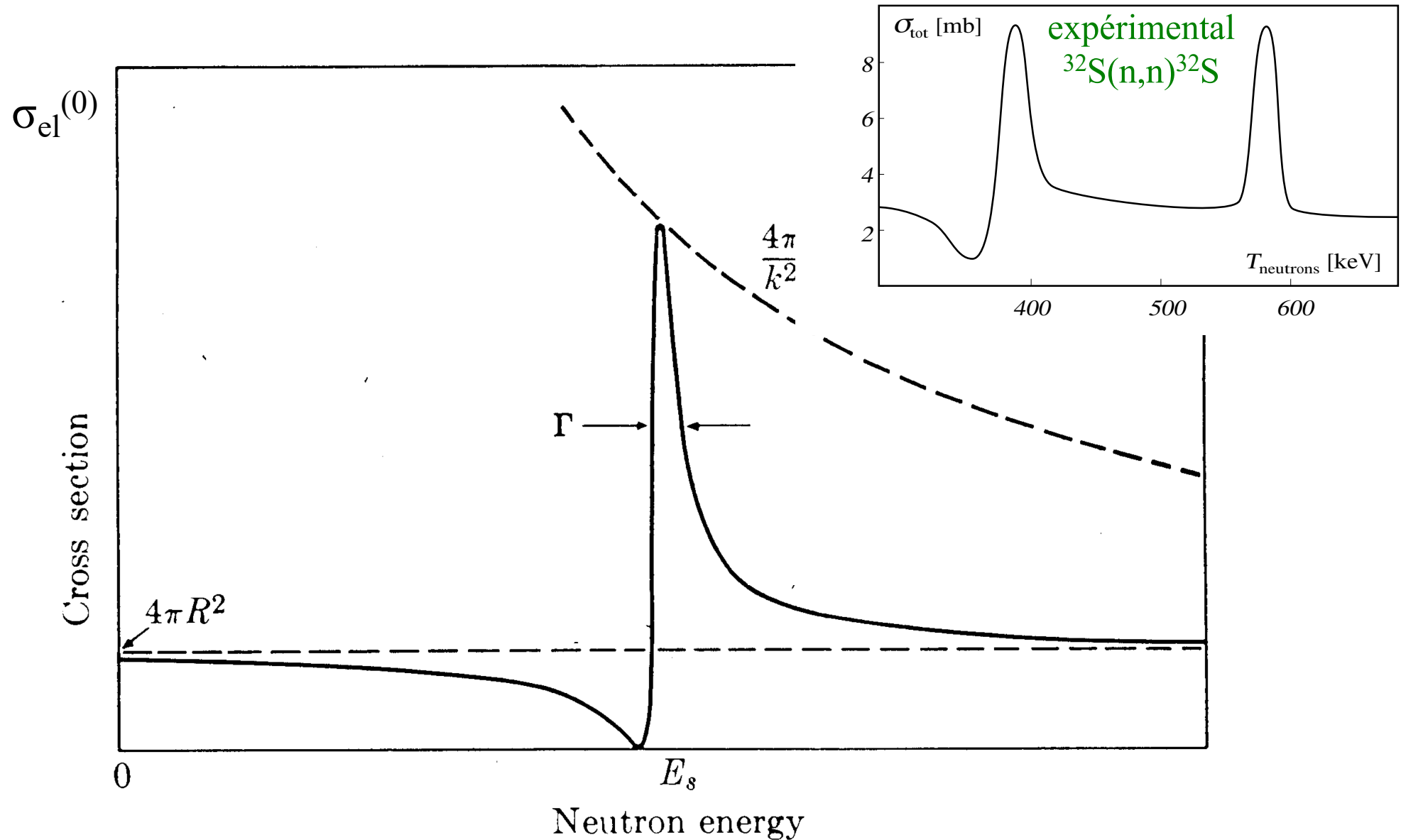
- Au voisinage de la résonance

$$\sigma_{\text{el}}^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} \left| \underbrace{\exp(2ika) - 1}_{A_{\text{pot}}} + \frac{i\Gamma_{\text{el}}}{\underbrace{E - E_0 + i\Gamma/2}_{A_{\text{res}}}} \right|^2$$

A_{pot}

A_{res}

Section efficace de diffusion élastique de neutrons au voisinage d'une résonance dans l'onde $\ell=0$



Diffusion élastique dans l'onde $\ell=0$ (diag. d'Argand)

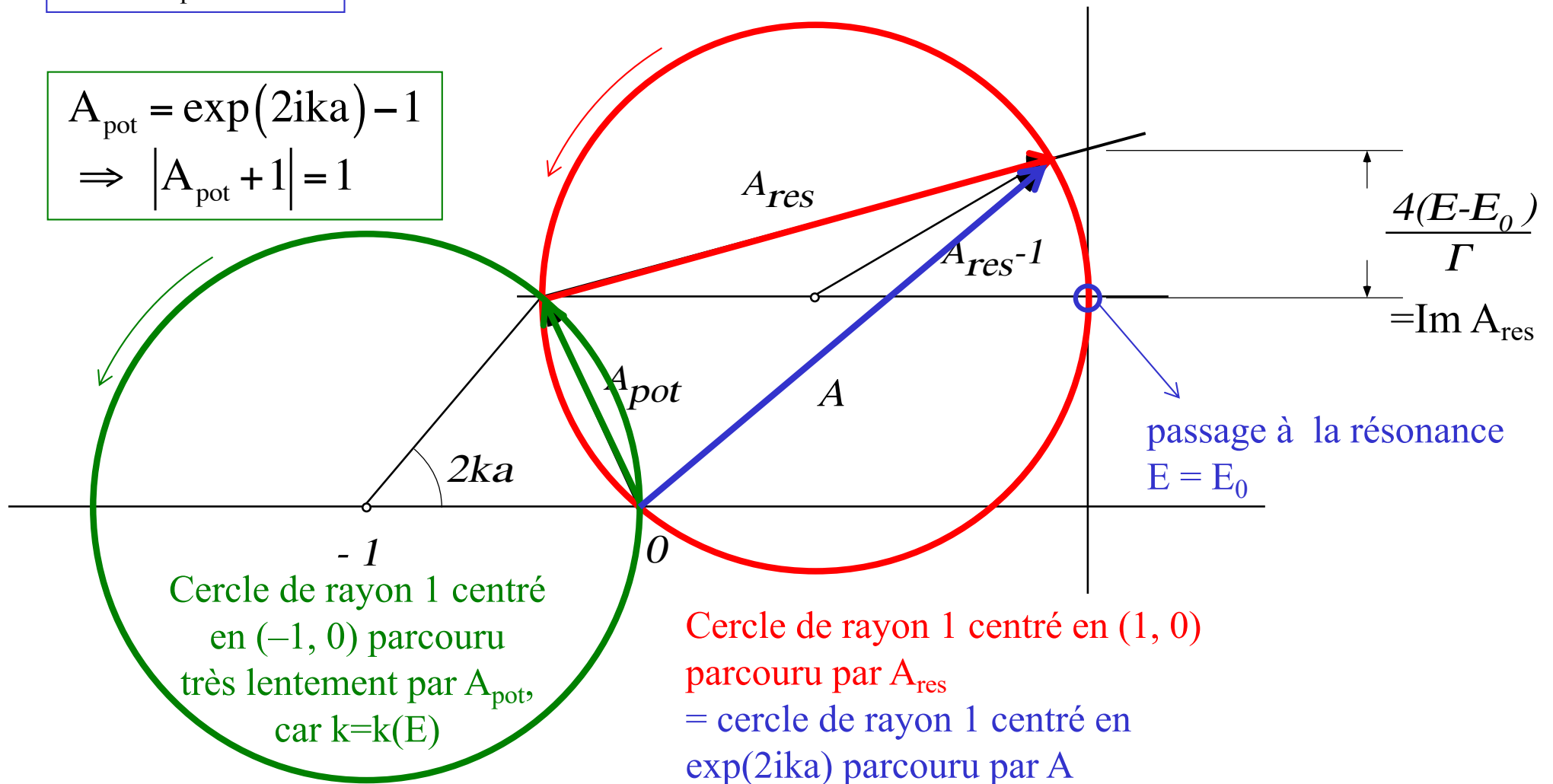
$$\sigma_{\text{el}}^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} |A|^2$$

$$A = A_{\text{pot}} + A_{\text{res}}$$

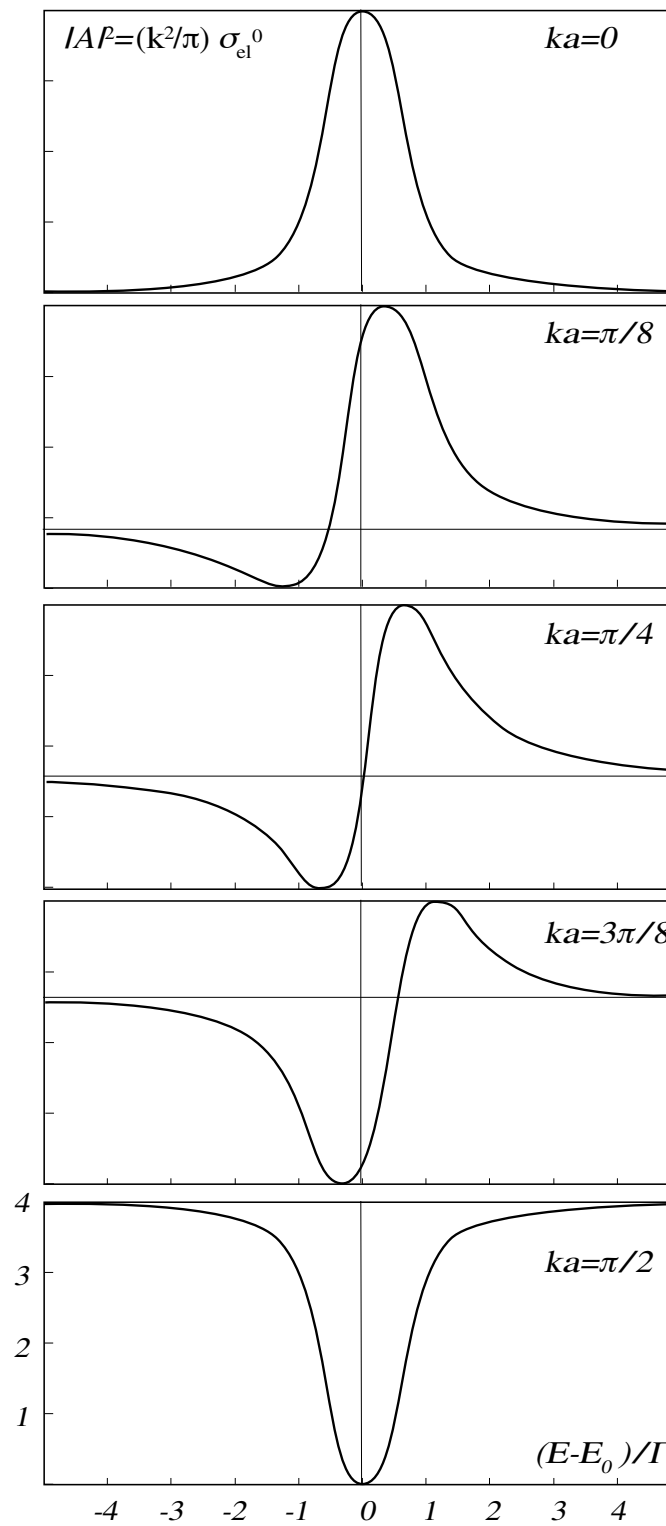
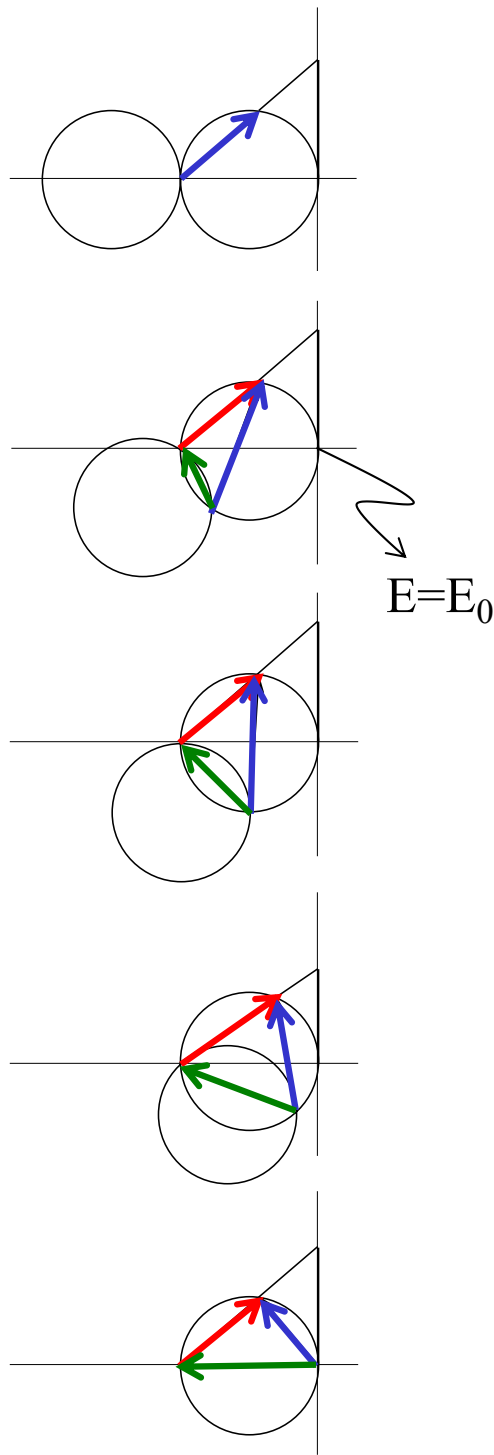
$$A_{\text{res}} = \frac{i\Gamma}{E - E_0 + i\Gamma/2} \Rightarrow |A_{\text{res}} - 1| = 1$$

$$A_{\text{pot}} = \exp(2ika) - 1$$

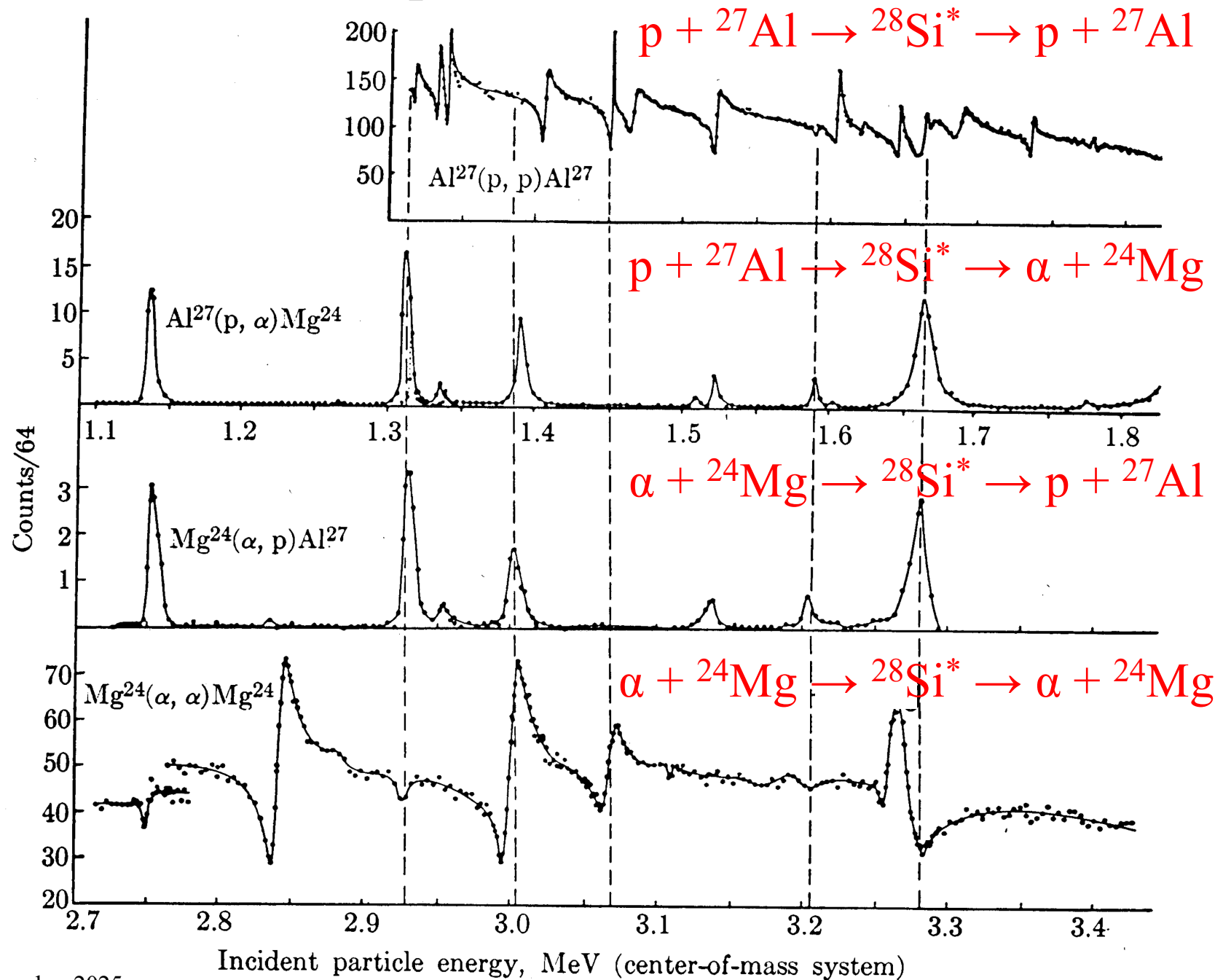
$$\Rightarrow |A_{\text{pot}} + 1| = 1$$



$$A = A_{\text{pot}} + A_{\text{res}}$$



Résonances correspondants aux niveaux excités du ^{28}Si



Résonances correspondants aux niveaux excités du ^{28}Si

