

Décomposition en ondes partielles (4)

- Section efficace différentielle élastique:

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{\infty} \sqrt{2\ell+1} \sqrt{2\ell'+1} (1-\eta_{\ell})(1-\eta_{\ell'}^*) Y_{\ell}^0(\theta) Y_{\ell'}^{0*}(\theta)$$

- Section efficace élastique:

$$\sigma_{\text{el}} = \int \frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} d\Omega = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) |1-\eta_{\ell}|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) |T_{\ell}|^2$$

ou bien

$$\sigma_{\text{el}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_{\text{el}}^{(\ell)}$$

$$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell+1) |1-\eta_{\ell}|^2 = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell+1) |T_{\ell}|^2$$

section efficace partielle dans l'onde ℓ

Décomposition en ondes partielles (5)

$$\eta_\ell = 1 + 2i\mathbf{T}_\ell \Leftrightarrow \mathbf{T}_\ell = \frac{i}{2}(1 - \eta_\ell)$$

- Section efficace élastique

$$\sigma_{\text{el}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_{\text{el}}^{(\ell)}$$

$$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) |1 - \eta_\ell|^2 = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) |\mathbf{T}_\ell|^2$$

- Section efficace inélastique

$$\sigma_{\text{inel}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_{\text{inel}}^{(\ell)}$$

$$\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) (1 - |\eta_\ell|^2) \quad \Rightarrow \quad |\eta_\ell| \leq 1$$

- Section efficace totale

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}}$$

$$\sigma_{\text{tot}}^{(\ell)} = \sigma_{\text{el}}^{(\ell)} + \sigma_{\text{inel}}^{(\ell)}$$

$$\sigma_{\text{tot}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_{\text{tot}}^{(\ell)}$$

$$\sigma_{\text{tot}}^{(\ell)} = \frac{2\pi}{k^2} (2\ell + 1) (1 - \text{Re}(\eta_\ell)) = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) \text{Im}(\mathbf{T}_\ell)$$

expressions invariantes sous $\eta_\ell \leftrightarrow \eta_\ell^*$ et $\mathbf{T}_\ell \leftrightarrow -\mathbf{T}_\ell^*$

Théorème optique

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(f(0))$$

σ_{tot} = section efficace totale

$f(0)$ = amplitude de diffusion élastique vers l'avant ($\theta = 0$)

k = nombre d'onde du projectile relativement à la cible

- Validité tout à fait générale

- Démonstration (exercice):

– évaluer $f(0)$ à partir de $f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} T_{\ell} Y_{\ell}^0(\theta)$
puis utiliser $\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \text{Im}(T_{\ell})$

Inelasticité et déphasage

- On pose

$$\eta_\ell = \rho_\ell \exp(2i\delta_\ell)$$

$\rho_\ell =$ inelasticité dans l'onde ℓ ($\rho_\ell \geq 0$)
 $\delta_\ell =$ déphasage dans l'onde ℓ ($\delta_\ell \geq 0$)

- Propriétés:

– $\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} \geq 0 \Rightarrow |\eta_\ell| = \rho_\ell \leq 1$

– cas purement élastique:

$$\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} = 0 \Leftrightarrow \rho_\ell = 1$$

– si $\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} > 0$ alors $\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} > 0$

– $\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} = 0$ pour $\eta_\ell = +1$

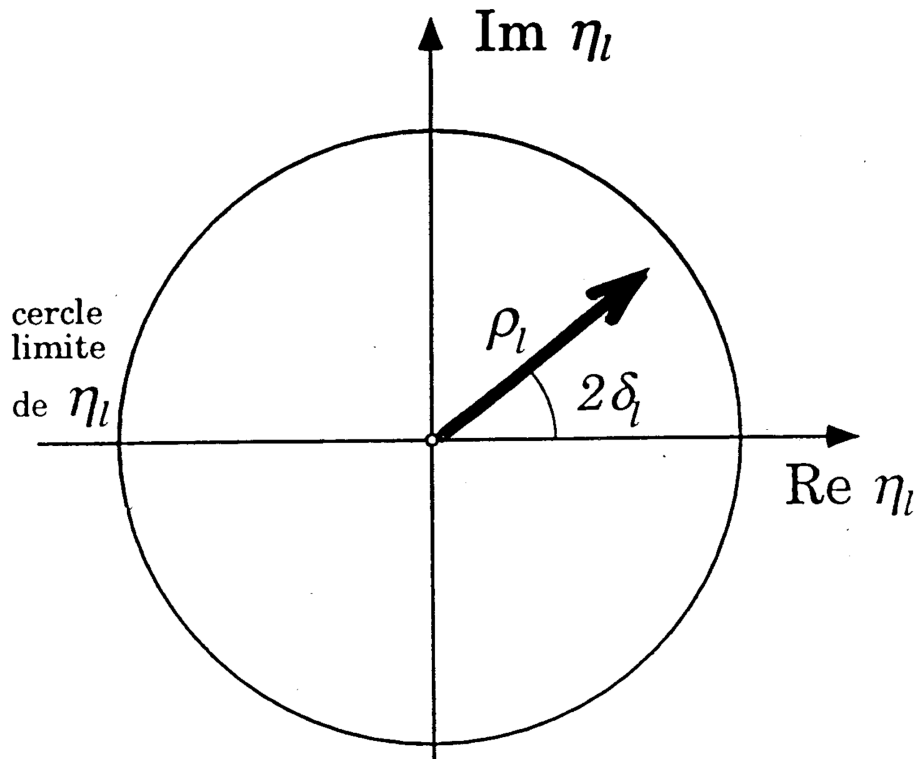
– $\sigma_{\text{el}}^{(\ell)}$ maximale pour $\eta_\ell = -1$, $\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)}$ maximale pour $\eta_\ell = 0$

η_ℓ	$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)}$	$\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)}$	$\sigma_{\text{tot}}^{(\ell)}$
+1	0	0	0
-1	$\frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)$	0	$\frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)$
0	$\frac{\pi}{k^2}(2\ell+1)$	$\frac{\pi}{k^2}(2\ell+1)$	$\frac{2\pi}{k^2}(2\ell+1)$

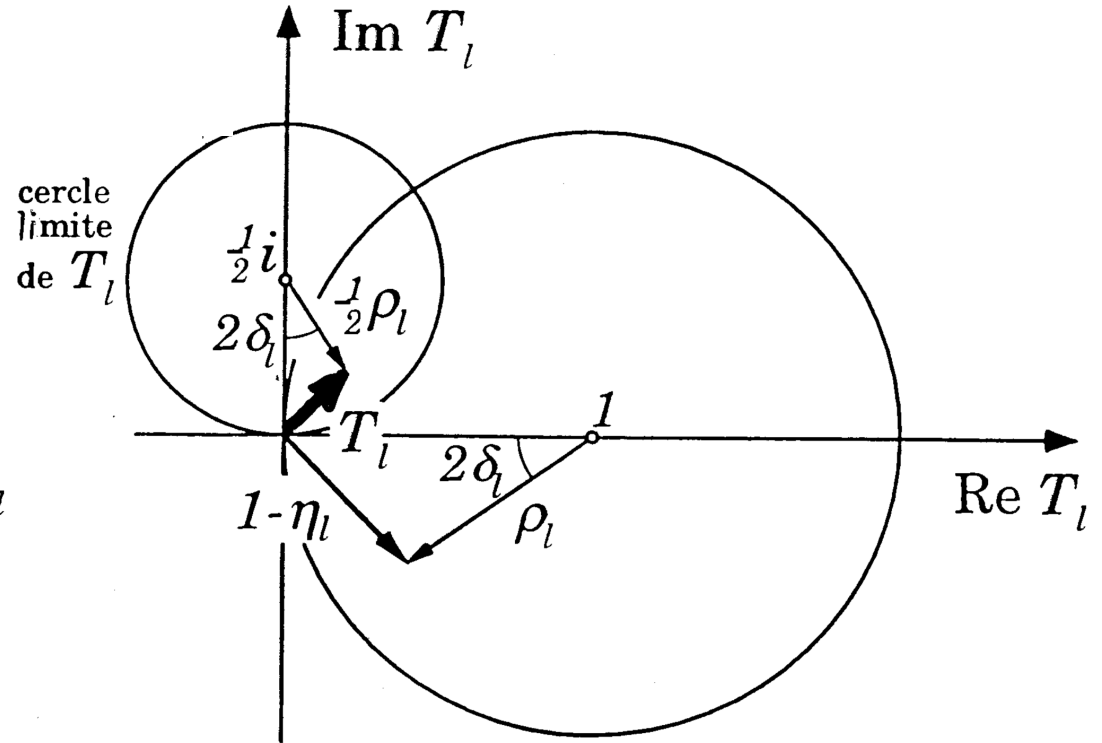
Rappel: $\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2}(2\ell+1)|1-\eta_\ell|^2$, $\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2}(2\ell+1)(1-|\eta_\ell|^2)$, $\sigma_{\text{tot}}^{(\ell)} = \frac{2\pi}{k^2}(2\ell+1)(1-\text{Re}(\eta_\ell))$

Diagrammes d'Argand

cercle limite \Leftrightarrow collisions purement élastiques



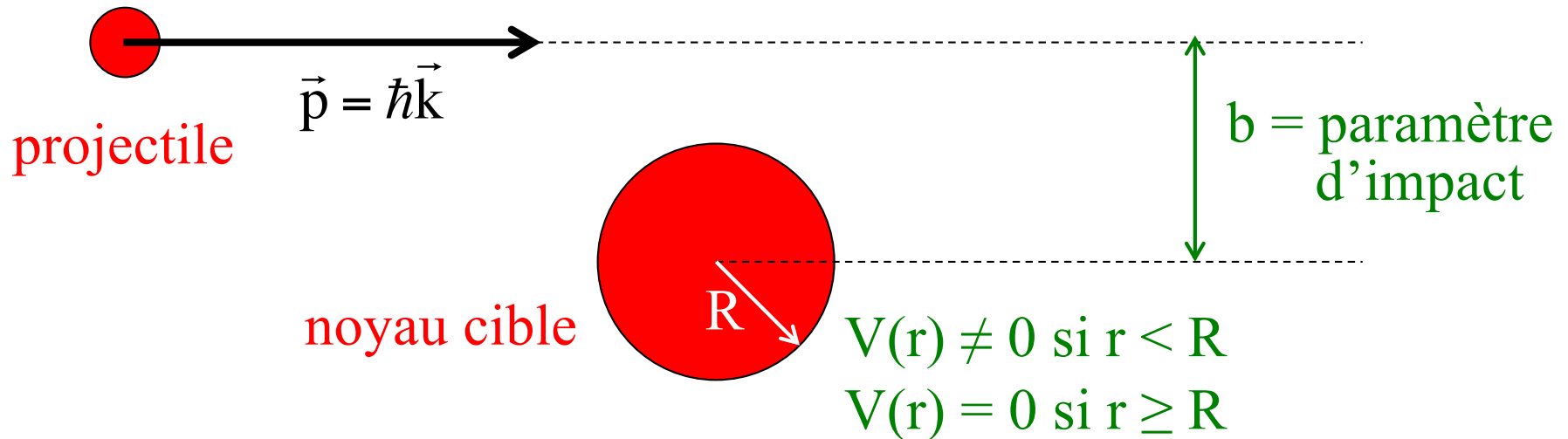
coefficient η_ℓ représenté dans le plan complexe



amplitude d'onde partielle T_ℓ représentée dans le plan complexe

$$\eta_\ell = \rho_\ell \exp(2i\delta_\ell) \quad \eta_\ell = 1 + 2iT_\ell \Leftrightarrow T_\ell = \frac{i}{2}(1 - \eta_\ell)$$

Intérêt du développement en ondes partielles (1)

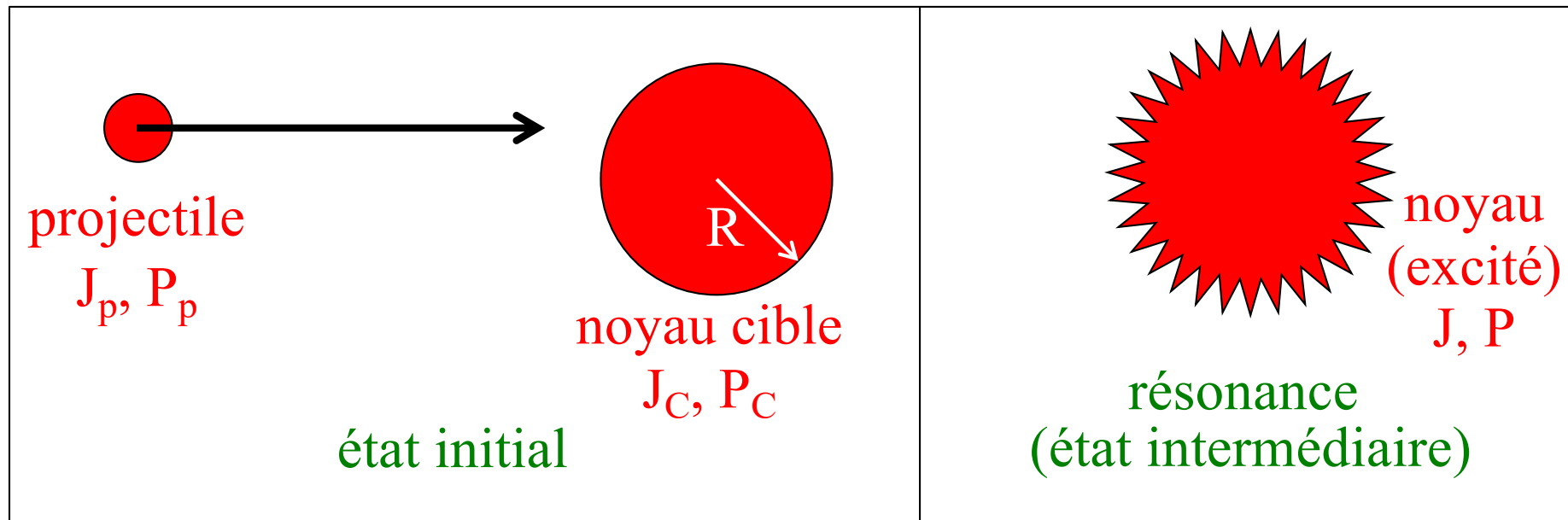


- Interaction uniquement si $b < R$,
c'est-à-dire si le moment cinétique $L = pb$ est tel que $L < pR$

- Seules les ondes partielles avec $\ell \leq \ell_{\max} = \frac{L_{\max}}{\hbar} = \frac{pR}{\hbar} = kR$
contribuent à la section efficace:

$$\sigma = \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}=kR} \sigma^{(\ell)}$$

Intérêt du développement en ondes partielles (2)



- Souvent, un phénomène de résonance est observé (formation d'un état métastable composé de la cible et du projectile)
- La résonance a des nombres quantiques (spin J et parité P) définis
- Les lois de conservation restreignent les valeurs des ondes partielles ℓ contribuant à la formation de la résonance

$$\begin{aligned} \text{moment cinétique : } \vec{J} &= \vec{J}_p + \vec{J}_C + \vec{\ell} \\ \text{parité : } P &= P_p P_C (-1)^\ell \end{aligned}$$

Collisions purement élastiques

- Pour tout ℓ tel que $|\eta_\ell|=1$:

$$T_\ell = \frac{i}{2}(1 - \eta_\ell) = \frac{i}{2}(1 - e^{2i\delta_\ell}) = e^{i\delta_\ell} \frac{i}{2}(e^{-i\delta_\ell} - e^{i\delta_\ell}) = e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_\ell$$

NB: T_ℓ (donc δ_ℓ) et k dépendent de l'énergie totale E du système dans le centre de masse

$$\Rightarrow \sigma_{\text{el}}^{(\ell)} \text{ passe par un maximum pour } \delta_\ell = \frac{\pi}{2} \text{ à une certaine énergie } E_0$$

- Développement limité autour de $E=E_0$, c'est-à-dire $\cotg \delta_\ell=0$:

$$T_\ell = \frac{\sin \delta_\ell}{e^{-i\delta_\ell}} = \frac{1}{\cotg \delta_\ell - i} \approx \frac{1}{C(E - E_0) - i} \quad \text{où } C = \left. \frac{d(\cotg \delta_\ell(E))}{dE} \right|_{E=E_0}$$

$$|T_\ell|^2 \approx \frac{1}{C^2 (E - E_0)^2 + 1} = \frac{1/C^2}{(E - E_0)^2 + 1/C^2} = \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

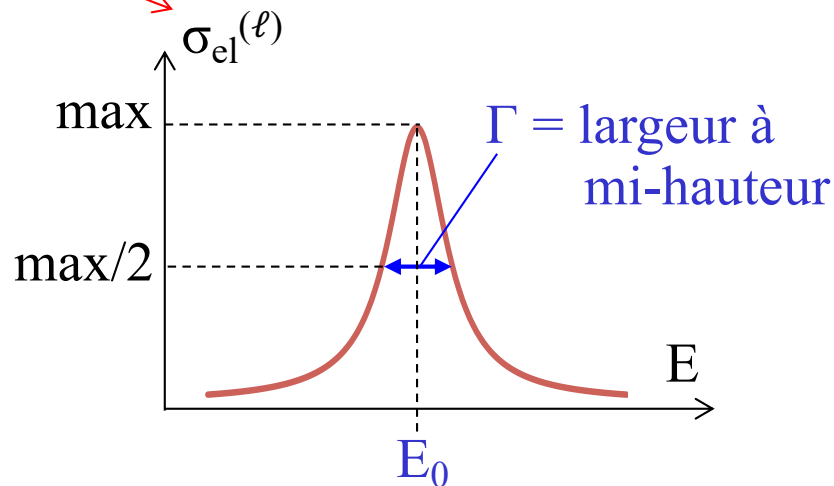
$$\text{où } \Gamma = \frac{2}{|C|}$$

Comportement au voisinage d'une résonance

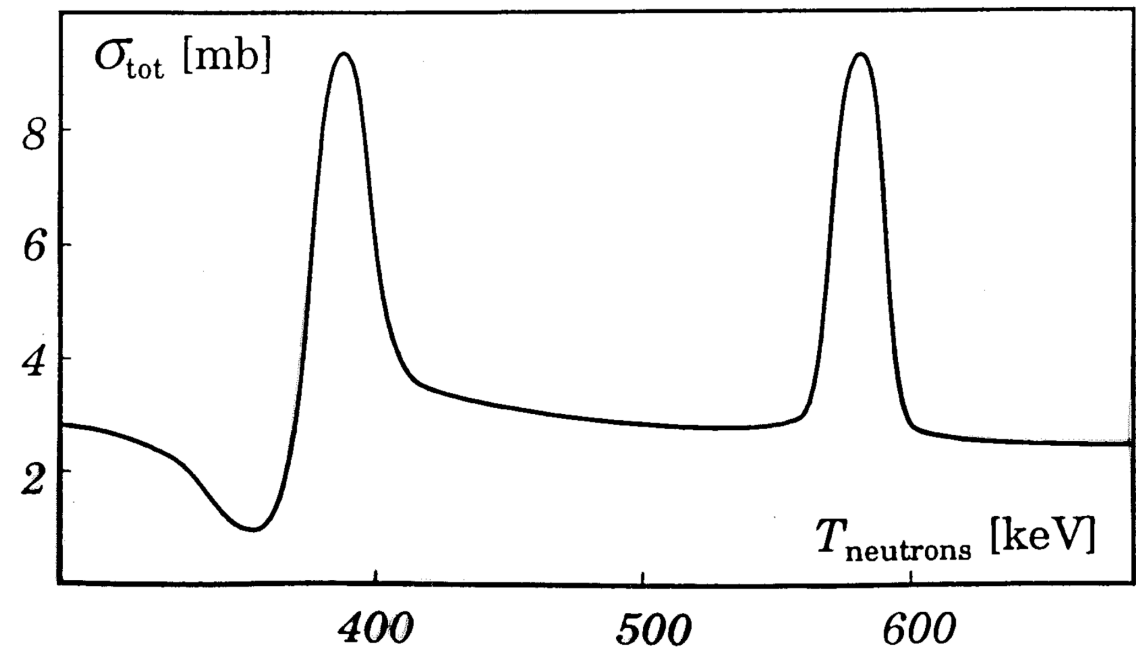
$$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) |T_\ell|^2 \quad \text{avec} \quad T_\ell \approx \frac{\Gamma/2}{(E - E_0) - i\Gamma/2} \quad \text{ou} \quad T_\ell \approx \frac{-\Gamma/2}{(E - E_0) + i\Gamma/2}$$

$$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

courbe de Breit-Wigner



$\tau = \hbar/\Gamma =$ durée de vie moyenne

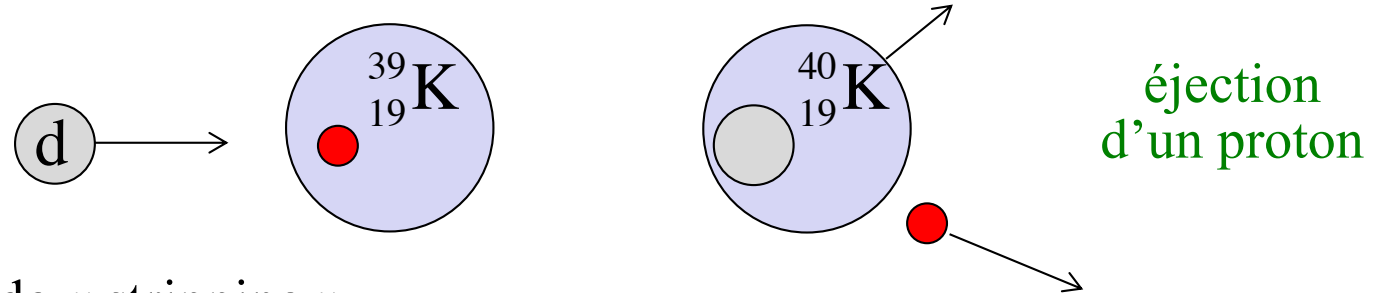


Résonances observées dans la diffusion élastique $^{32}\text{S}(n,n)^{32}\text{S}$

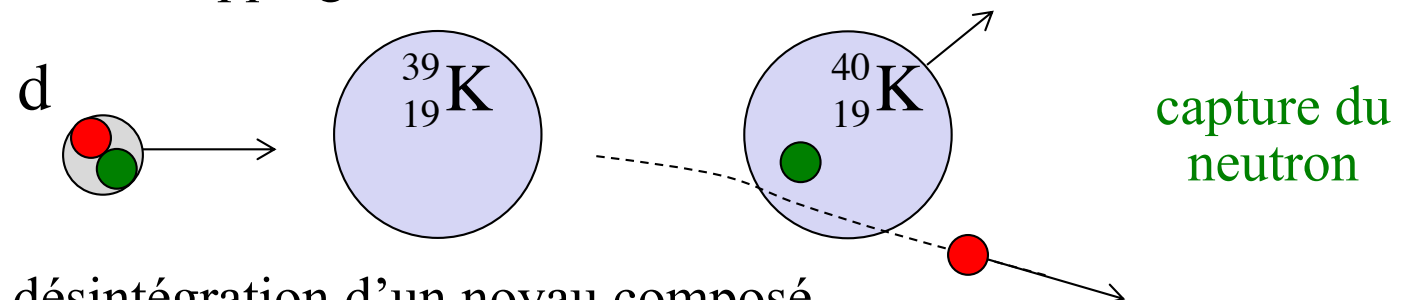
Description des réactions nucléaires

- Exemple: $d + {}^{39}\text{K} \rightarrow p + {}^{40}\text{K}$
 - que se passe-t-il au juste au cours de cette réaction ?
- Trois points de vue extrêmes:

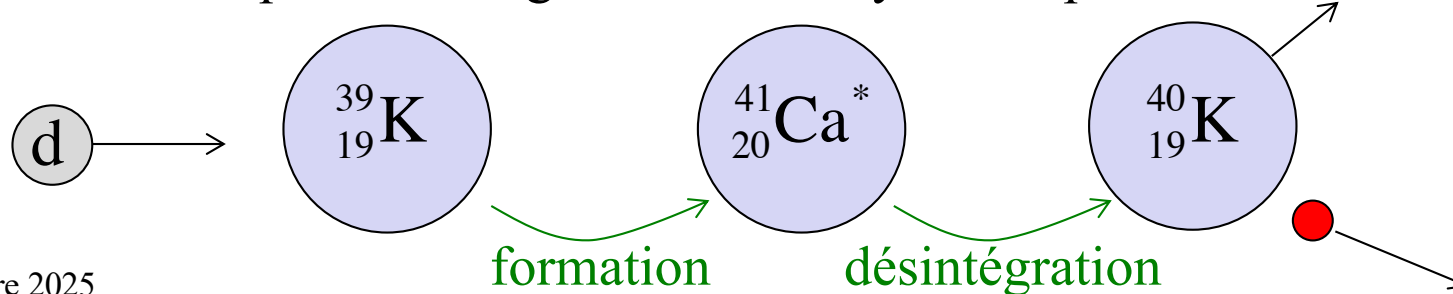
① Réaction directe de « knock-out »



② Réaction directe de « stripping »



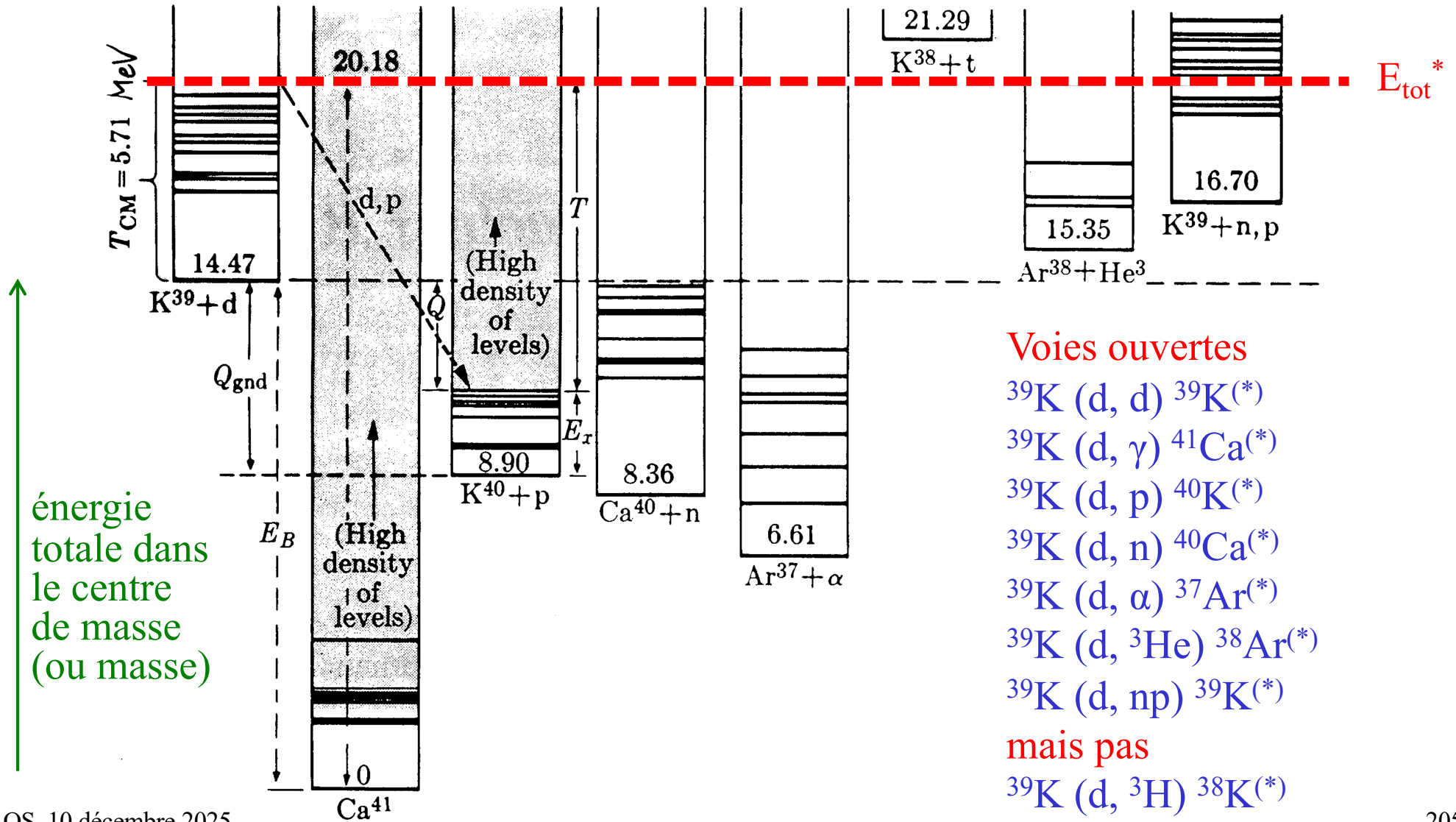
③ Formation puis désintégration d'un noyau composé



Modes de partition du $^{41}\text{Ca}^*$

formé par la réaction $d + ^{39}\text{K} \rightarrow ^{41}\text{Ca}^*$ avec $T_d=6 \text{ MeV}$

$$T_{\text{CM}} = T_d^* + T_{^{39}\text{K}}^* = \frac{1}{2} \mu v_d^2 = \frac{\mu}{m_d} T_d = 5.71 \text{ MeV}$$

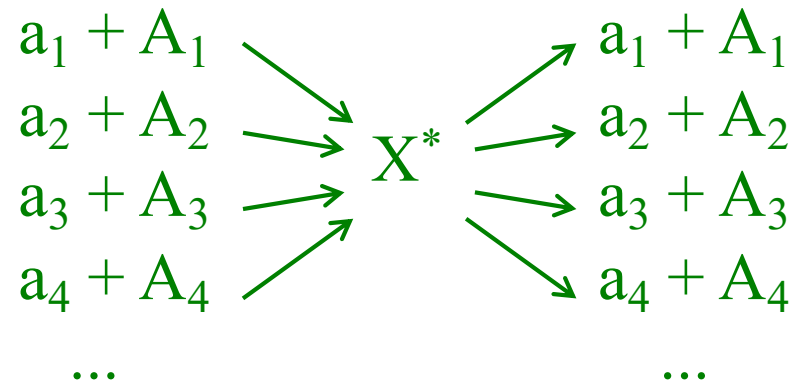


Modèle du noyau composé (1)

N. Bohr (1936)

- Résonance X^*

- pouvant se former et se désintégrer dans plusieurs canaux
- de largeur à mi-hauteur Γ



- Hypothèse du modèle: $\sigma_{i \rightarrow j} = \sigma_i F_j$

$\sigma_{i \rightarrow j} = \sigma(a_i + A_i \rightarrow a_j + A_j)$ = section efficace de la réaction $a_i + A_i \rightarrow a_j + A_j$
 $\sigma_i = \sigma(a_i + A_i \rightarrow X^*)$ = section efficace de formation de X^* par le canal i
 F_j = probabilité de désintégration de X^* dans le canal j

$$\sum_j F_j = 1$$

- On définit la largeur partielle Γ_j dans le canal j

$$\Gamma_j = F_j \Gamma \quad \text{avec} \quad \sum_j \Gamma_j = \Gamma$$