

Moment électrique quadrupolaire

- Définition:

$$q = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} Q_{20}|_{M=J}$$

$$q = \sum_{i=1}^Z \langle J, J, \dots | \sqrt{\frac{16\pi}{5}} r_i^2 Y_2^0(\theta_i, \varphi_i) | J, J, \dots \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^Z \langle J, J, \dots | r_i^2 (3 \cos^2 \theta_i - 1) | J, J, \dots \rangle$$

dimension
d'une surface

- Classiquement:

$$q = \frac{1}{e} \int r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

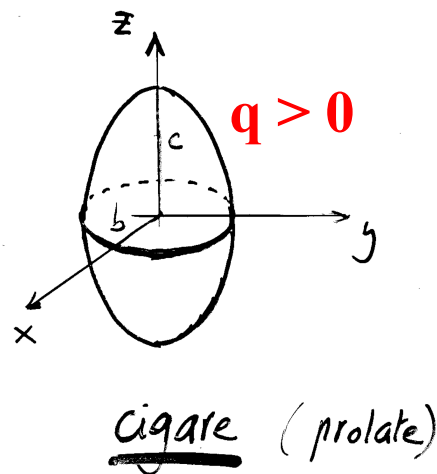
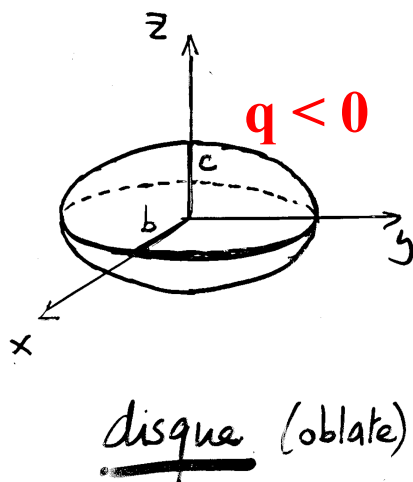
- cas d'une distribution de charge à symétrie sphérique:

$$q = \frac{1}{e} \int r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \rho(r) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr$$

$$= \frac{2\pi}{e} \int_{\cos \theta = -1}^{+1} (3 \cos^2 \theta - 1) d(\cos \theta) \int_{r=0}^{\infty} r^4 \rho(r) dr = 0$$

Ellipsoïde de révolution uniformément chargé

$$q = \frac{2}{5} Z (c^2 - b^2) = \frac{4}{5} Z \bar{R}^2 \frac{\delta R}{\bar{R}} \quad \text{avec } \bar{R} = \frac{c+b}{2} \text{ et } \delta R = c - b$$



- Moment électrique quadrupolaire réduit:

- mesure de la déformation des noyaux,
indépendante de la taille et de la charge totale

$$\frac{q}{Z \bar{R}^2} = \frac{4}{5} \frac{\delta R}{\bar{R}}$$

Moment quadrupolaire: prédictions du modèle à nucléon célibataire

- Noyau avec Z pair et N pair:

$$J = 0 \Rightarrow \boxed{q = 0} \quad \text{prévision correcte dans tous les cas}$$

- Noyau avec Z impair et N pair:

– un proton célibataire sur un niveau $n\ell j$ responsable du moment quadrupolaire

$$\boxed{q = -\langle r^2 \rangle_{n\ell j} \frac{2j-1}{2(j+1)}} \quad \begin{array}{l} q = 0 \quad \text{si } j = 1/2 \\ q < 0 \quad \text{si } j \geq 3/2 \end{array}$$

– ordre de grandeur pour un noyau de rayon R:

$$\left. \begin{array}{l} \langle r^2 \rangle \approx \frac{3}{5} R^2 \\ j \leq 11/2 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{2Z} \leq \frac{q}{ZR^2} \leq 0$$

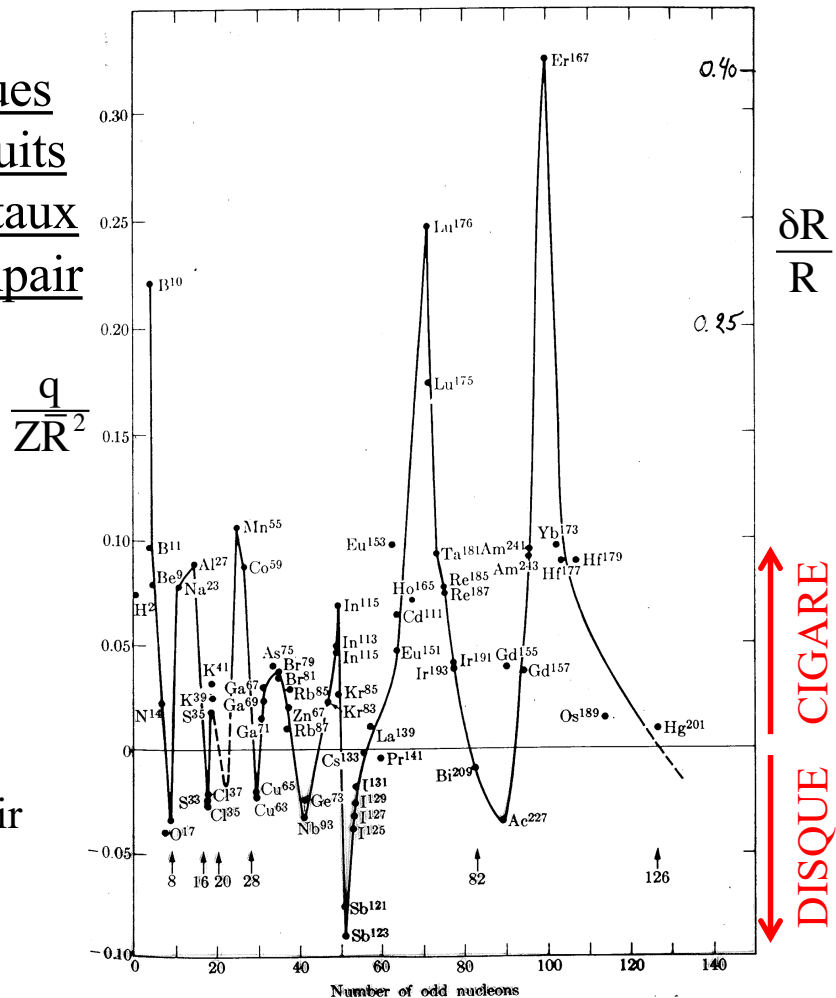
- Noyau avec Z pair et N impair

$$q \rightarrow \frac{Z}{(A-1)^2} q \Rightarrow -\frac{1}{2A^2} \leq \frac{q}{ZR^2} \leq 0$$

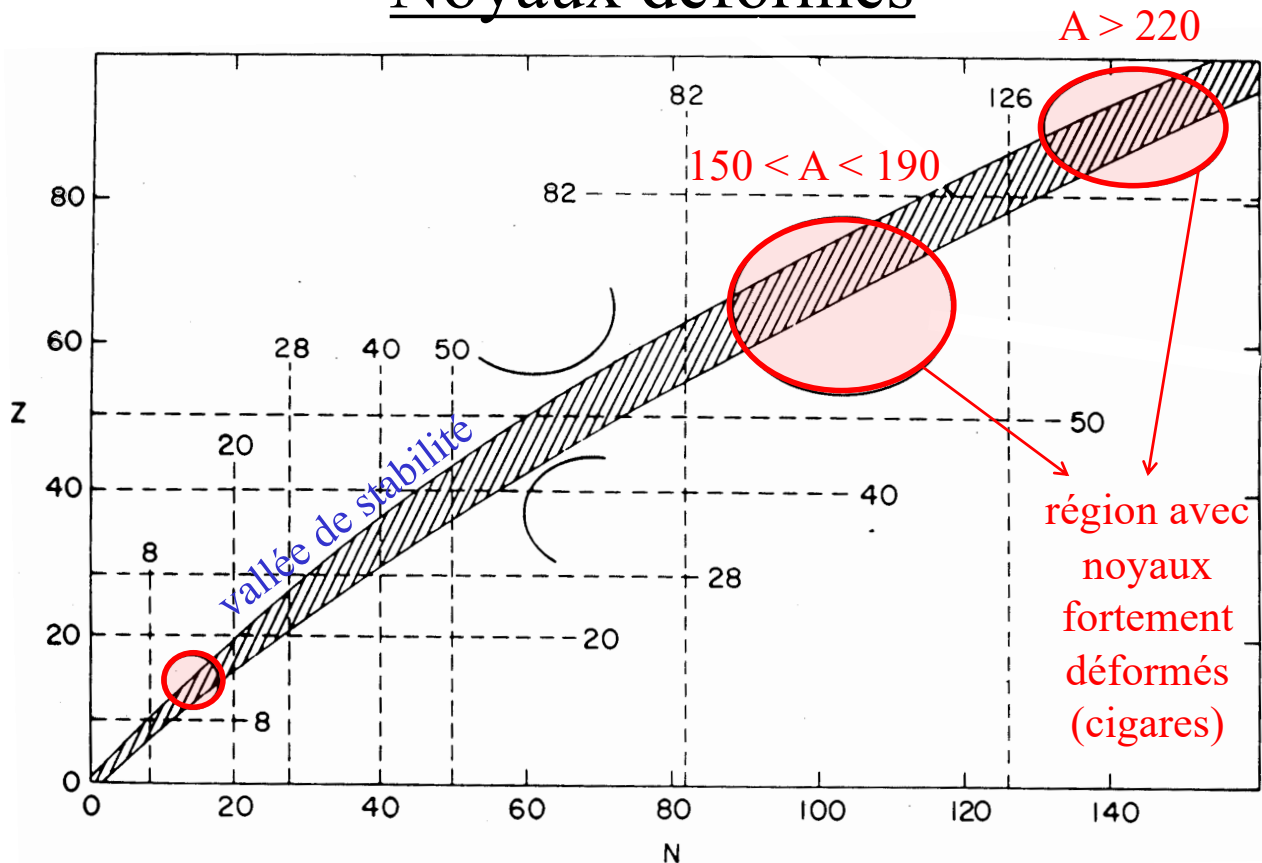
Moments électriques quadrupolaires réduits des états fondamentaux des noyaux de A impair

$$\frac{q}{ZR^2}$$

N ou Z impair



Noyaux déformés



OS, 26 novembre 2025

168

Description des noyaux déformés

Noyau déformé = noyau ayant une déformation permanente par rapport à la symétrie sphérique

A. Approche microscopique

- approche du type « modèle en couches »
 - potentiel déformé, non sphérique
- modèle de Nilsson

A. Approche « macroscopique »

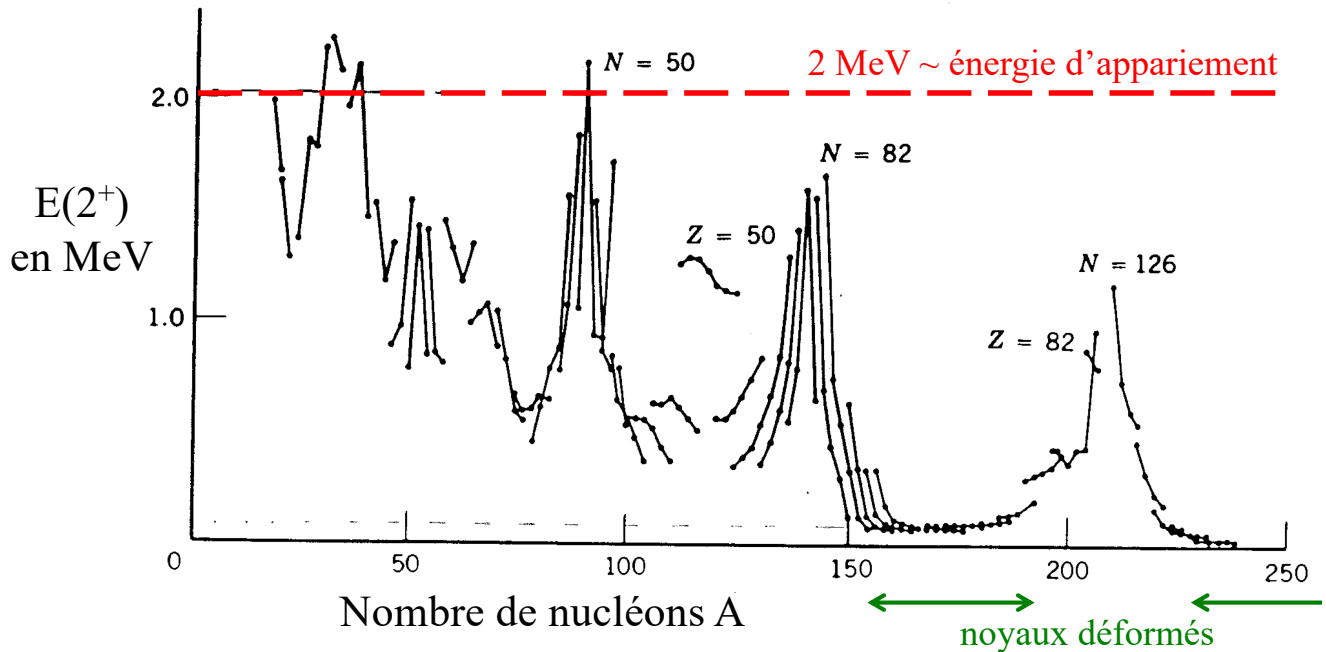
- abandon de la description du mouvement (ou de l'état) des nucléons individuels
 - description de phénomènes collectifs
- modèles collectifs

OS, 26 novembre 2025

169

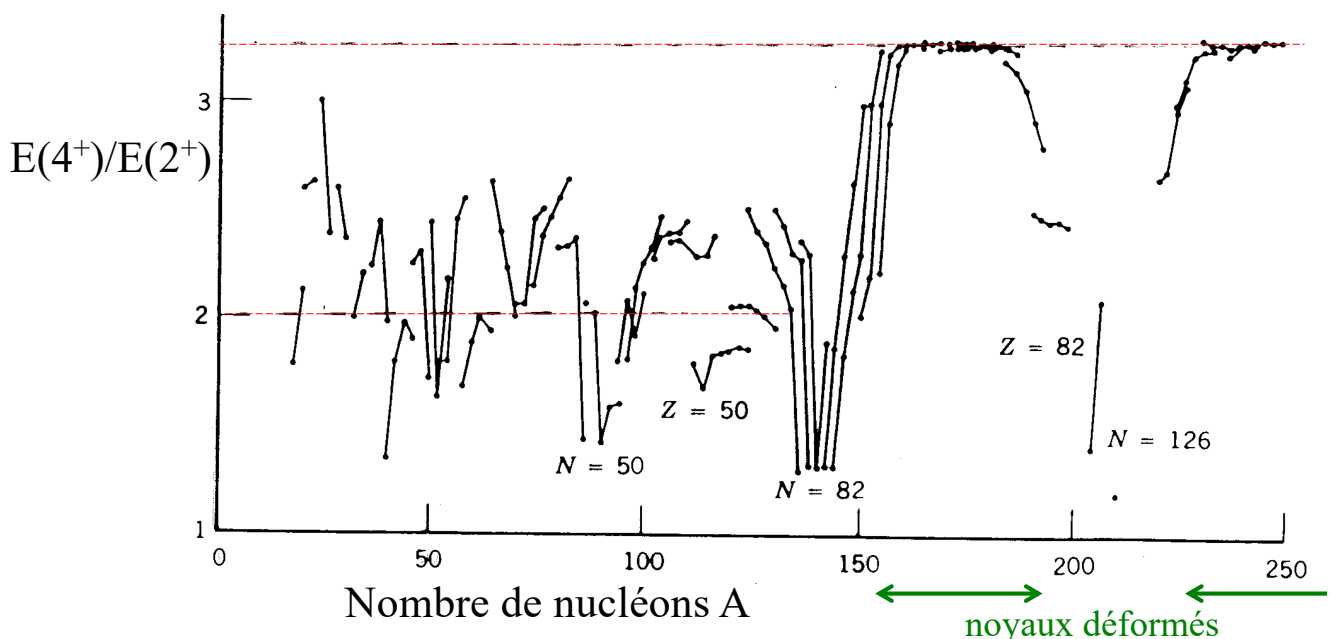
Energie d'excitation des noyaux pair-pair

- Energie d'excitation $E(2^+)$ du premier niveau avec $J^P = 2^+$ (au-dessus du niveau fondamental avec $J^P = 0^+$)



Energie d'excitation des noyaux pair-pair

- Rapport $E(4^+)/E(2^+)$ des énergies d'excitation des premiers niveaux avec $J^P = 4^+$ et $J^P = 2^+$ (au-dessus du niveau fondamental avec $J^P = 0^+$)



Modèles collectifs

Introduits dès 1950 par A. Bohr,
B.R. Mottelson, J. Rainwater
(prix Nobel 1975)

- Excitations collectives

1) dans les **noyaux sphériques** pair-pair

- vibrations collectives:

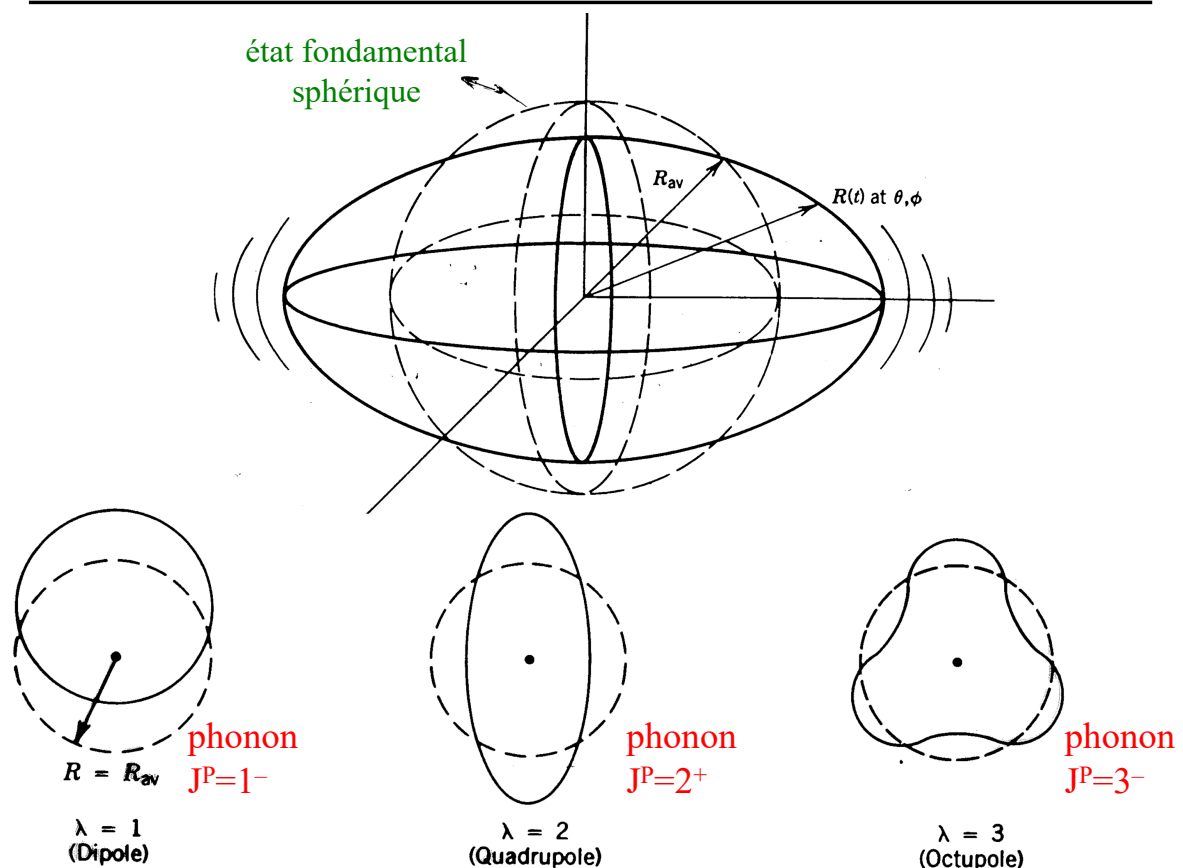
- oscillations de la surface du noyau
(comme pour une goutte liquide)

- description à l'aide de phonons

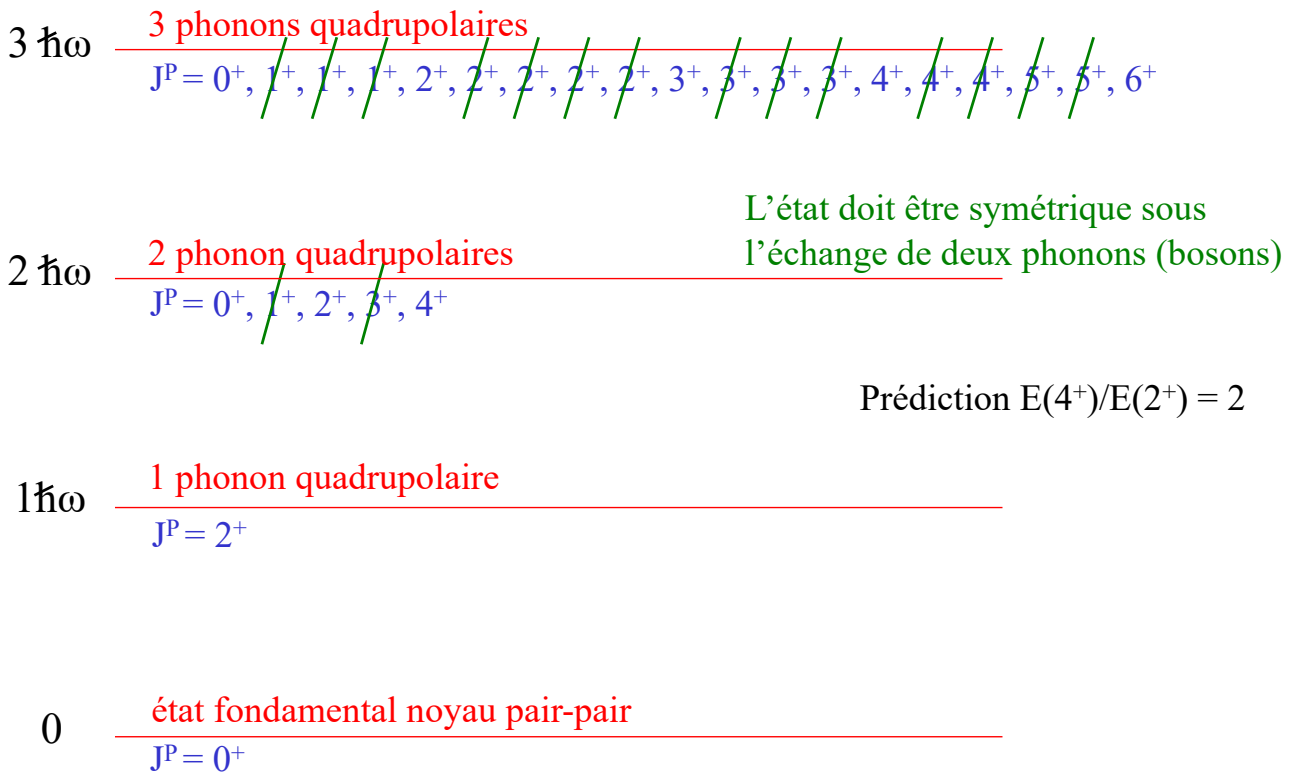
2) dans les **noyaux avec une déformation statique**
($150 < A < 190$ ou $A > 220$)

- rotations collectives

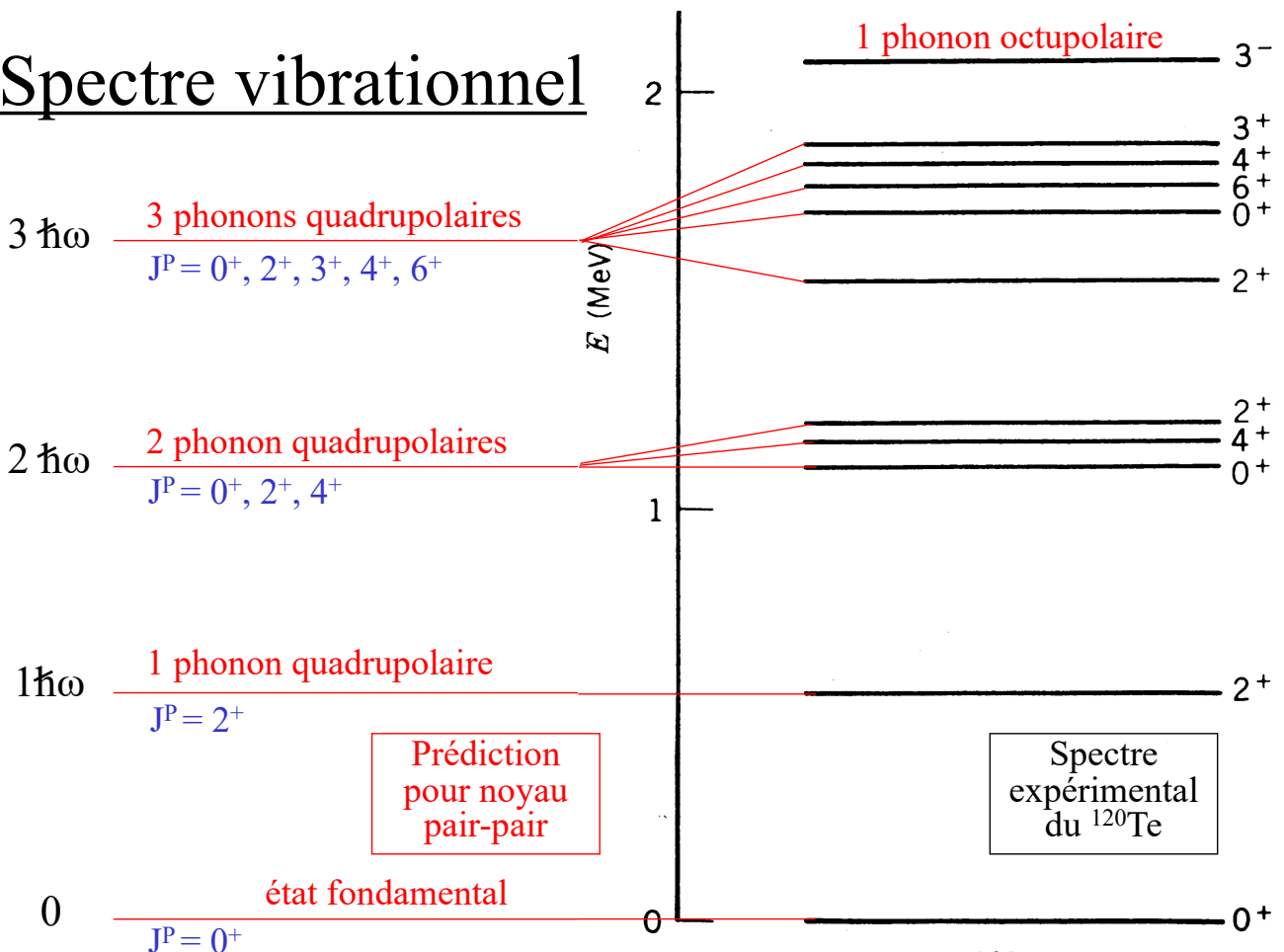
Excitations vibrationnelles collectives



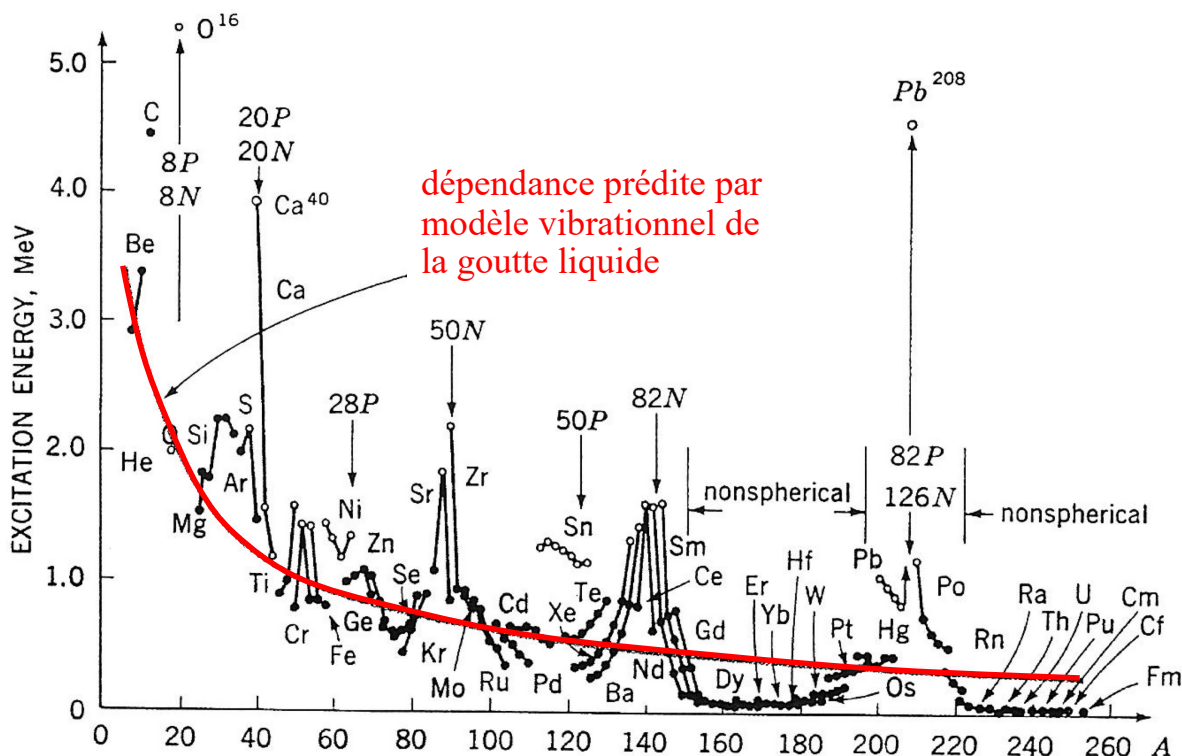
Spectre vibrationnel (prédiction)



Spectre vibrationnel



Energie d'excitation du premier niveau excité des noyaux pair-pair

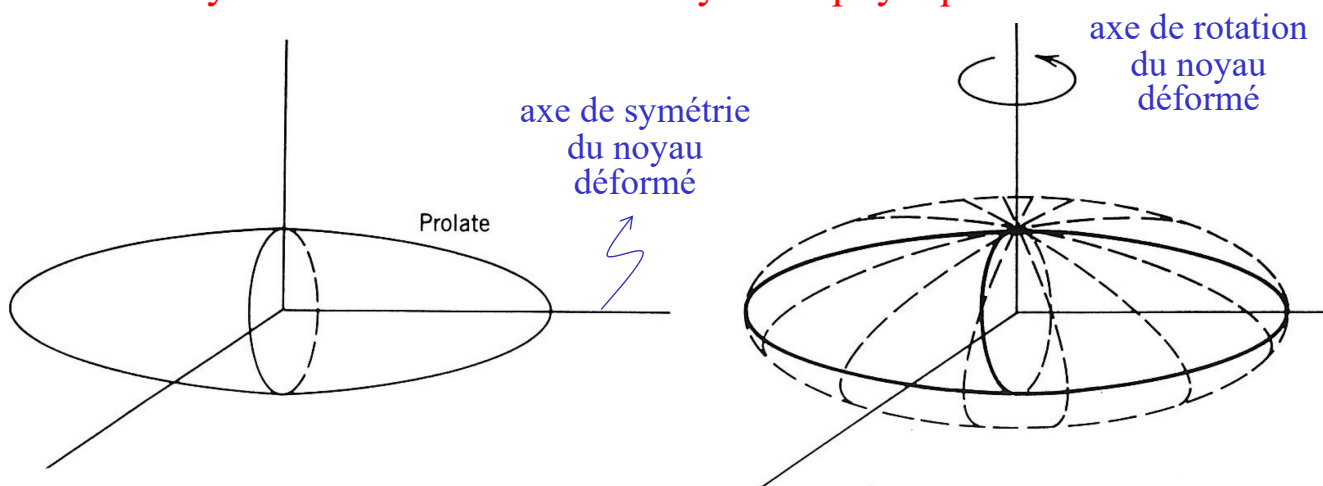


OS, 26 novembre 2025

176

Rotation d'un noyau déformé

Seule une rotation autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de symétrie de révolution du noyau est physique



	Etat fondamental	Etat excité de rotation
Forme du noyau	« cigare »	« disque »
Moment électrique quadrupolaire	$q > 0$	$q < 0$

bien vérifié pour le premier état excité des noyaux pair-pair

OS, 26 novembre 2025

177

Energie cinétique de rotation

- Classiquement:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \bar{\omega}^2 = \frac{\bar{L}^2}{2I}$$

I = moment d'inertie du noyau
 $\bar{\omega}$ = vitesse angulaire de rotation
 $\bar{L} = I \bar{\omega}$ = moment cinétique du noyau

- En mécanique quantique:

$$H_{\text{rot}} = \frac{\bar{J}_{\text{rot}}^2}{2I}$$

$$Y_{J_{\text{rot}}}^{M_{\text{rot}}}$$

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} J_{\text{rot}} (J_{\text{rot}} + 1)$$

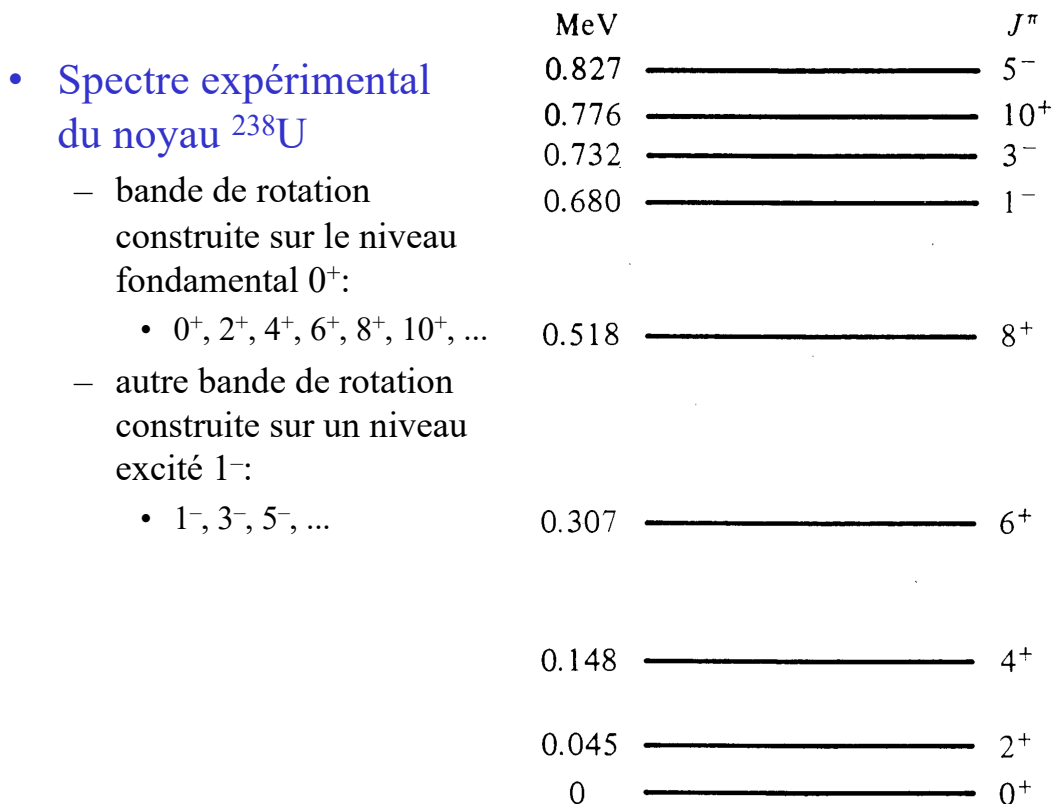
hamiltonien
 fonctions propres
 valeurs propres avec J_{rot} entier

- Prédictions pour noyau pair-pair:

	Etat fondamental	Etats excités de rotation
Spin du noyau	0	J pair > 0
Energie (au-dessus du niveau fondamental)	0	$\frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)$

$$E(4^+)/E(2^+) = [4(4+1)] / [2(2+1)] = 20/6 = 3.333$$

Bandes de rotation



Bandes de rotations

- Modèle empirique:

$$E_x = C_1 J(J+1) + C_2 J^2(J+1)^2$$

– ^{176}Yb :

- $C_1 = 13.91$ keV
- $C_2 = -0.009$ keV

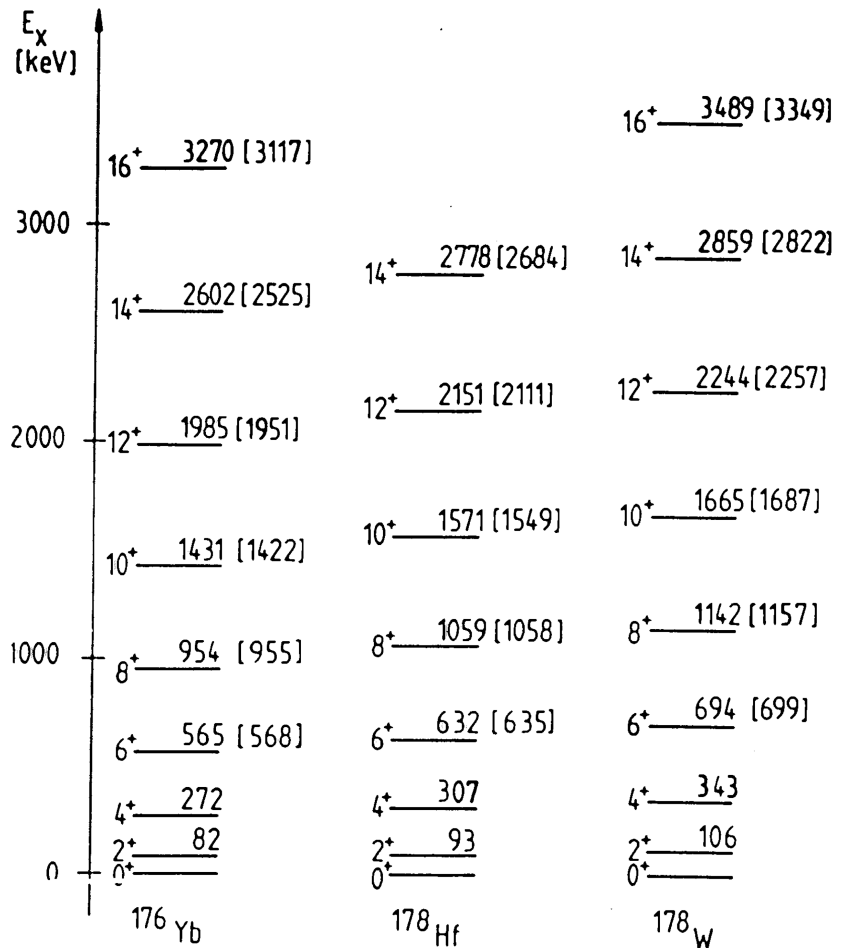
– ^{178}Hf :

- $C_1 = 15.70$ keV
- $C_2 = -0.014$ keV

– ^{178}W :

- $C_1 = 17.40$ keV
- $C_2 = -0.019$ keV

- Modèle rotation OK, avec I qui augmente légèrement avec J (force centrifuge)



Moments d'inertie

- Ellipsoïde parfaitement rigide

$$I_{\text{rigide}} \approx \frac{2}{5} M \bar{R}^2 \left(1 + 0.31 \frac{\delta R}{\bar{R}} \right)$$

- Fluide irrotationnel
 - fluide non visqueux dans une coquille ellipsoïdale

$$I_{\text{fluide}} \approx \frac{9}{8\pi} M (\delta R)^2$$

- Pour tous les noyaux déformés ont observé un moment d'inertie I tel que $I_{\text{fluide}} < I < I_{\text{rigide}}$

