

Spectre d'énergie d'un nucléon

Notation des niveaux d'énergie:

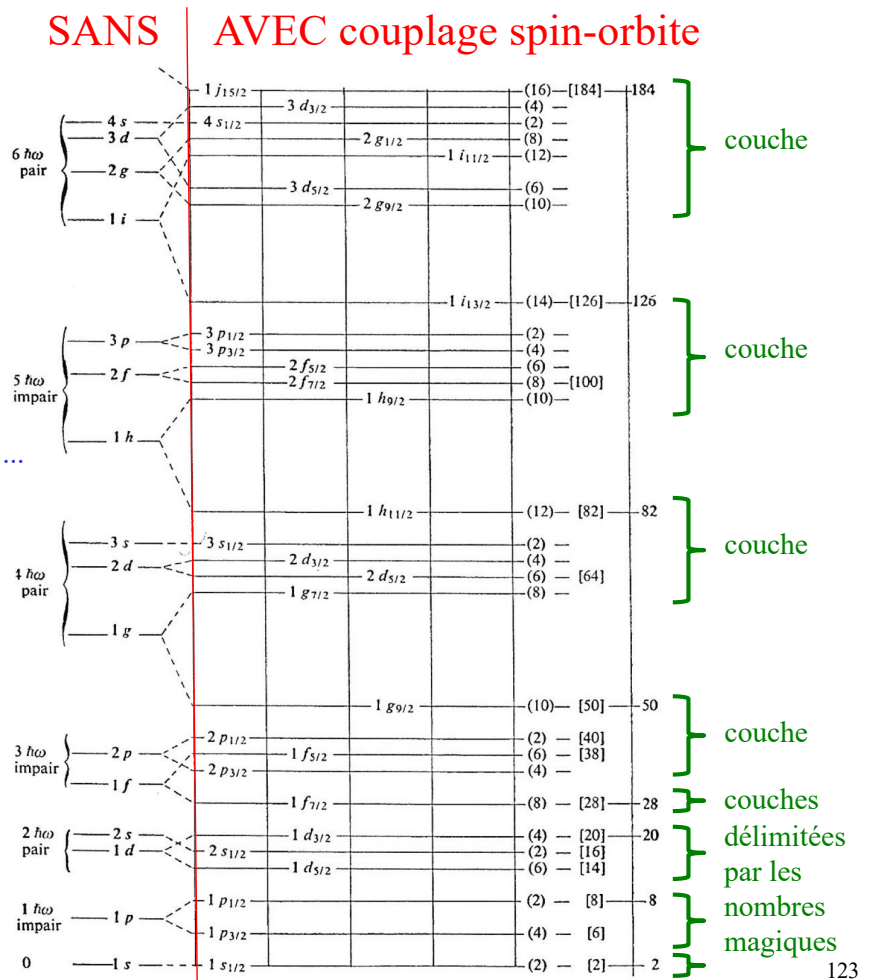
$$n\ell j$$

nombre quantique radial $n=1, 2, \dots$
 moment cinétique orbital $\ell = s, p, d, \dots$
 moment cinétique total $j = \ell \pm 1/2$

Note:

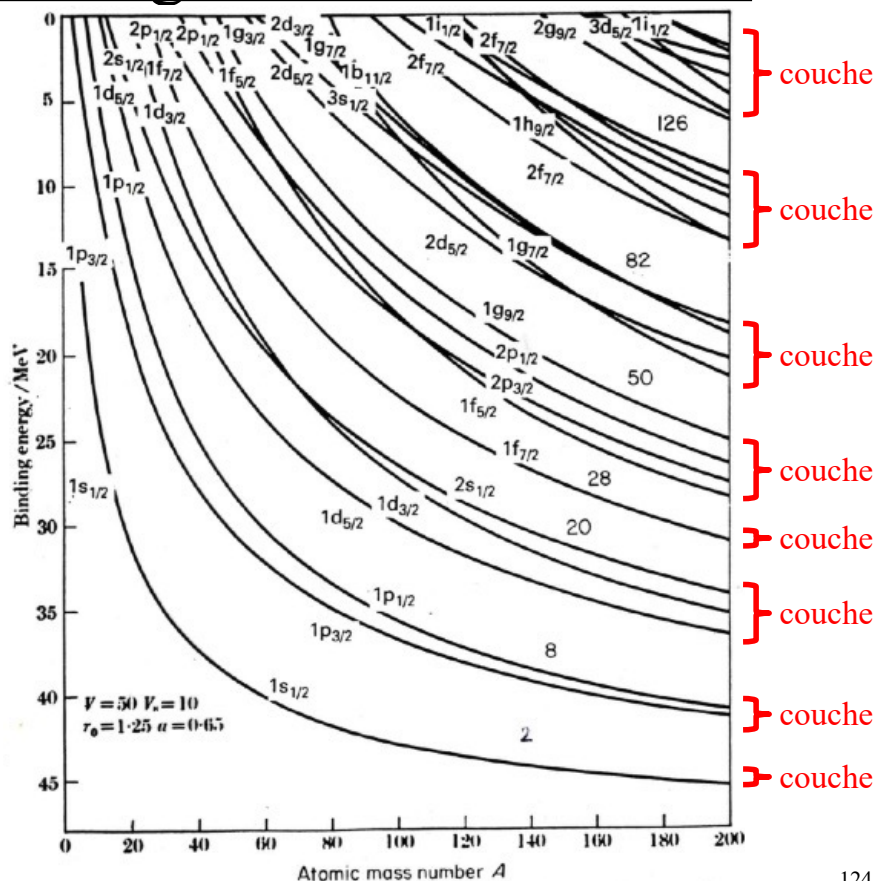
- le spectre diffère légèrement pour les protons et les neutrons si l'on tient compte du potentiel de Coulomb
- le spectre dépend légèrement de A (extension radiale du potentiel)
- interversions possibles des niveaux dans les couches supérieures ($N, Z > 50$)

OS, 5 novembre 2025



Niveaux d'énergie en fonction de A

- Le potentiel $V(r)$ dépend du rayon du noyau, donc de A
 - La séquence des niveaux d'énergie dépend de A ... mais les nombres magiques restent indépendants de A



OS, 5 novembre 2025

124

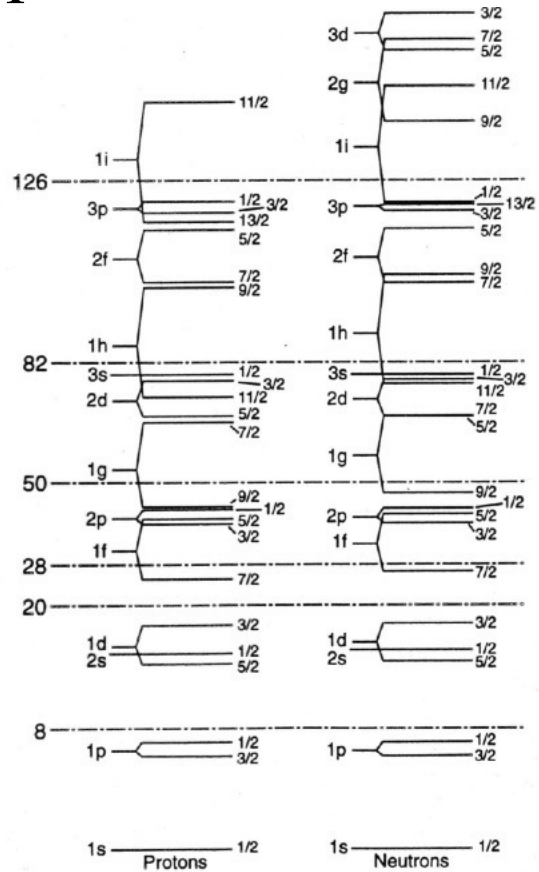
Spectre d'énergie: proton et neutron

- Pour les protons, répulsion Coulombienne:

$$H(r) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V_{\text{Saxon-Woods}}(r) + \left(I_3 + \frac{1}{2}\right) V_{\text{Coulomb}}(r) + \xi(r) \vec{\ell} \cdot \vec{s}$$

- $I_3 = 3^{\text{ème}} \text{ composante isospin}$ (+1/2 proton, -1/2 neutron)

- Les spectres des protons et neutrons sont légèrement différents, mais les nombres magiques restent les mêmes



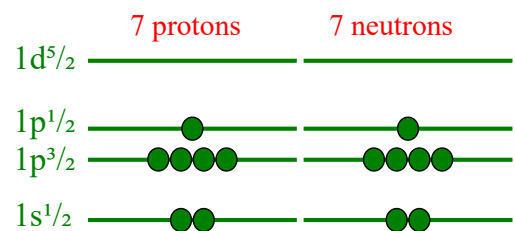
Configuration d'un noyau

- Remplissage des niveaux $n\ell j$ avec Z protons et N neutrons
 - au maximum $2j+1$ protons ou neutrons par niveau $n\ell j$ (dégénérescence par rapport à m et principe d'exclusion)

Configuration = donnée des nombres quantiques $n\ell j$ de chacun des nucléons du noyau

- NB: la configuration ne suffit pas à déterminer la fonction d'onde du noyau

- Exemple:
 - état fondamental (configuration d'énergie minimale) du noyau ^{14}N



- notation: $[p: (1s^{1/2})^2(1p^{3/2})^4(1p^{1/2})^1; n: (1s^{1/2})^2(1p^{3/2})^4(1p^{1/2})^1]$
- notation abrégée: $[p: (1p^{1/2})^1; n: (1p^{1/2})^1]$

Energie, parité et spin des noyaux

- Energie totale
(cinétique + potentielle)

$$E = \sum_{i=1}^A E_{n_i \ell_i j_i}$$

ne dépend
que de la
configuration

- Parité totale
= parité du noyau

$$P = \prod_{i=1}^A (-1)^{\ell_i} = (-1)^{\sum_{i=1}^A \ell_i}$$

ne dépend
que de la
configuration

- Moment cinétique total
= spin du noyau
= spin nucléaire

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^A \vec{j}_i = \sum_{i=1}^A (\vec{\ell}_i + \vec{s}_i)$$

- Pour trouver les valeurs possibles de J, il faut appliquer la règle de composition des moments cinétiques et l'antisymétrisation de la fonction d'onde totale des protons et des neutrons

Spin-parité des noyaux

- Niveau $n\ell j$ complet (occupé par $2j+1$ nucléons identiques)

$$P = \prod_{i=1}^{2j+1} (-1)^{\ell} = (-1)^{\ell(2j+1)} = +1$$

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^{2j+1} \vec{j}_i \quad M = \text{valeur propre de } J_z = \sum_{i=1}^{2j+1} m_i = \sum_{m=-j}^j m = 0$$

principe d'exclusion

→ état unique (non dégénéré), $J^P = 0^+$

- Ensemble de plusieurs niveaux complets

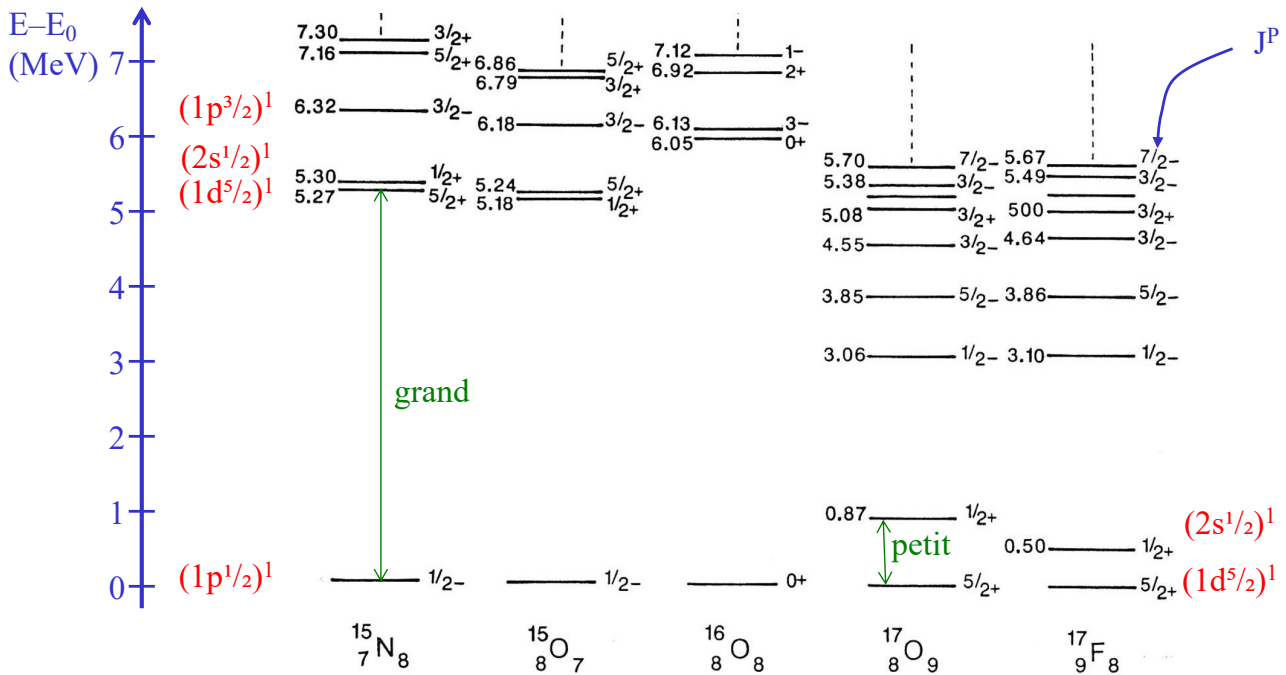
→ état unique (non dégénéré), $J^P = 0^+$

- Ensemble de plusieurs niveaux complets

+ un niveau $n\ell j$ occupé par un seul nucléon

→ état dégénéré $2j+1$ fois, $J = j$, $P = (-1)^{\ell}$

Spectres expérimentaux (^{15}N , ^{15}O , ^{16}O , ^{17}O , ^{17}F)



Spectre du nucléon indépendant

2 ħω pair	2 s	2 s _{1/2}	1 d _{3/2}		(4) — [20]	20
	1 d		1 d _{5/2}		(2) — [16]	
1 ħω impair	1 p	1 p _{1/2}			(2) — [8]	8
		1 p _{3/2}			(4) — [6]	
0	1 s	1 s _{1/2}			(2) — [2]	2

Spectre expérimental du $^{209}_{82}\text{Pb}$

- Couches complètes (82 protons et 126 neutrons) + 1 neutron tout seul dans la dernière couche (6 ħω)

- le spectre expérimental des premiers niveaux excités du noyau donne la séquence des niveaux individuels du neutron dans la dernière couche

J^π	$^{209}_{82}\text{Pb}$	E^* [MeV]	Config.
1/2 ⁻		2,152	(2g _{9/2}) ² (3p _{1/2})
1/2 ⁺		2,032	4s _{1/2}
5/2 ⁺		1,566	3d _{5/2}
15/2 ⁻		1,422	1j _{15/2}
11/2 ⁺		0,778	1i _{11/2}
9/2 ⁺			2g _{9/2}

Spectre du nucléon indépendant

6 ħω pair	4 s	1 i _{15/2}	3 d _{3/2}	(16) — [184]	184	
	3 d	4 s _{1/2}		(4) —		
	2 g		2 g _{1/2}	(2) —		
	1 i		1 i _{11/2}	(8) —		
		3 d _{5/2}		(12) —		
			2 g _{9/2}	(6) —		
				(10) —		
	3 p	3 p _{1/2}		1 i _{13/2}	(14) — [126]	126
				(2) —		

Moment cinétique total de deux nucléons

- Moment cinétique total

$$\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$$

- Deux bases de l'espace des états de moment cinétique total

$$\left\{ |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \right\} \quad \text{états propres de } \vec{j}_1^2, j_{1z}, \vec{j}_2^2, j_{2z}$$

$$\left\{ |j_1 j_2 JM\rangle \right\} \quad \text{états propres de } \vec{j}_1^2, \vec{j}_2^2, \vec{J}^2, J_z$$

- Valeurs possibles pour J et M:

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \quad \text{par pas de 1}$$

$$-J \leq M \leq J \quad \text{par pas de 1}$$

- Changements de base:

$$|j_1 j_2 JM\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ M=m_1+m_2}} C_{j_1 j_2}(J, M, m_1, m_2) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \sum_{\substack{J \text{ possibles} \\ M=m_1+m_2}} C_{j_1 j_2}(J, M, m_1, m_2) |j_1 j_2 JM\rangle$$

coefficients de Clebsch-Gordan

$$C_{j_1 j_2}(J, M, m_1, m_2) = \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 JM \rangle \quad 131$$

OS, 5 novembre 2025

Coefficients de Clebsch-Gordan

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$. Notation: $\begin{matrix} J & J & \dots \\ M & M & \dots \end{matrix}$

$\begin{matrix} j_1 & j_2 \\ 1/2 \times 1/2 \\ \begin{matrix} +1 & 1 & 0 \\ +1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{matrix} \end{matrix}$	$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$	$\begin{matrix} 2 \times 1/2 \\ \begin{matrix} 5/2 & 5/2 & 3/2 \\ +5/2 & 1 & +3/2+3/2 \\ +2 & -1/2 & 1/5 & 4/5 & 5/2 & 3/2 \\ +1 & +1/2 & 4/5 & -1/5 & +1/2 & +1/2 \end{matrix} \end{matrix}$	$\begin{matrix} m_1 & m_2 & \dots \\ m_1 & m_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{matrix}$
$\begin{matrix} j_1 & j_2 \\ 1 \times 1/2 \\ \begin{matrix} +3/2 & 3/2 & 1/2 \\ +1 & +1/2 & 1 \\ +1 & -1/2 & 1/3 & 2/3 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & +1/2 & 2/3 & -1/3 & -1/2 & -1/2 \end{matrix} \end{matrix}$	$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$	$\begin{matrix} 3/2 \times 1/2 \\ \begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ +2 & 1 & +1 \\ +3/2 & -1/2 & 1/4 & 3/4 & 5/2 & 3/2 \\ +1/2 & +1/2 & 3/4 & -1/4 & 0 & 0 \end{matrix} \end{matrix}$	$\begin{matrix} m_1 & m_2 & \dots \\ m_1 & m_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{matrix}$
$\begin{matrix} 2 \times 1 \\ \begin{matrix} +3 & 3 & 2 \\ +2 & +1 & 1 \\ +2 & 0 & 1/3 & 2/3 & 3 & 2 & 1 \\ +1 & +1 & 2/3 & -1/3 & +1 & +1 & +1 \end{matrix} \end{matrix}$	$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$	$\begin{matrix} 3/2 \times 1 \\ \begin{matrix} 5/2 & 5/2 & 3/2 \\ +5/2 & 1 & +3/2+3/2 \\ +3/2 & 0 & 2/5 & 3/5 & 5/2 & 3/2 & 1/2 \\ +1/2 & +1 & 3/5 & -2/5 & +1/2 & +1/2 & +1/2 \end{matrix} \end{matrix}$	$\begin{matrix} m_1 & m_2 & \dots \\ m_1 & m_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 \times 1 \\ \begin{matrix} +2 & 2 & 1 \\ +1 & +1 & 1 \\ +1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & +1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{matrix}$	$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$	$\begin{matrix} 3/2 \times 1 \\ \begin{matrix} 5/2 & 5/2 & 3/2 \\ +5/2 & 1 & +3/2+3/2 \\ +3/2 & 0 & 2/5 & 3/5 & 5/2 & 3/2 & 1/2 \\ +1/2 & +1 & 3/5 & -2/5 & +1/2 & +1/2 & +1/2 \end{matrix} \end{matrix}$	$\begin{matrix} m_1 & m_2 & \dots \\ m_1 & m_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{matrix}$
$\begin{matrix} Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*} \\ \begin{matrix} 0 & -1 & 1/2 & 1/2 & 2 \\ -1 & 0 & 1/2 & -1/2 & -2 \\ -1 & -1 & 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & -1/3 \\ -1 & +1 & 1/6 & -1/2 & 1/3 \end{matrix} \end{matrix}$	$d_{m,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$	$\begin{matrix} 3/2 \times 1 \\ \begin{matrix} 5/2 & 5/2 & 3/2 \\ +5/2 & 1 & +3/2+3/2 \\ +3/2 & 0 & 2/5 & 3/5 & 5/2 & 3/2 & 1/2 \\ +1/2 & +1 & 3/5 & -2/5 & +1/2 & +1/2 & +1/2 \end{matrix} \end{matrix}$	$\begin{matrix} m_1 & m_2 & \dots \\ m_1 & m_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{matrix}$

$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 JM \rangle = (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 JM \rangle$

OS, 5 novembre 2025

coefficients pour autres valeurs de j_1 et j_2

132

Niveau $n\ell j$ occupé par deux nucléons

- Exemple: noyau $^{18}_9\text{F}$ de configuration [p: $(1d^{5/2})^1$; n: $(1d^{5/2})^1$]
 - deux nucléons **différents** sur un même niveau avec $j = 5/2$
 - dénombrement des états et détermination de leurs valeurs de $M = m_1 + m_2$
 - tableau de Slater:

$m_1 \backslash m_2$	-5/2	-3/2	-1/2	1/2	3/2	5/2
-5/2	-5	-4	-3	-2	-1	0
-3/2	-4	-3	-2	-1	0	1
-1/2	-3	-2	-1	0	1	2
1/2	-2	-1	0	1	2	3
3/2	-1	0	1	2	3	4
5/2	0	1	2	3	4	5

- valeurs possibles pour J : 0, 1, 2, 3, 4, 5
- parité totale positive

Niveau $n\ell j$ occupé par deux nucléons

- Exemple: noyau $^{18}_8\text{O}$ de configuration [n: $(1d^{5/2})^2$]
 - deux nucléons **identiques** sur un même niveau avec $j = 5/2$
 - dénombrement des états et la détermination de leurs valeurs de $M = m_1 + m_2$
 - tableau de Slater:

$m_1 \backslash m_2$	-5/2	-3/2	-1/2	1/2	3/2	5/2
-5/2	-5	-4	-3	-2	-1	0
-3/2	-4	-3	-2	-1	0	1
-1/2	-3	-2	-1	0	1	2
1/2	-2	-1	0	1	2	3
3/2	-1	0	1	2	3	4
5/2	0	1	2	3	4	5

états indiscernables

principe d'exclusion

- valeurs possibles pour J : 0, 2, 4
- parité totale positive