

Dégénérescence des niveaux d'énergie

- Le nucléon est une particule de spin $s = 1/2$
- Fonction d'onde d'un état propre de H , L^2 , L_z et S^2 et S_z

$$\psi_{n\ell m_\ell m_s}(r, \theta, \phi) = R_{n\ell}(r) Y_\ell^{m_\ell}(\theta, \phi) \chi_s^{m_s}$$

état défini par
4 nombres
quantiques

- | | | | |
|---|--|---|--------------------------------------|
| } | n = nombre quantique radial | } | nombres
quantiques
magnétiques |
| | ℓ = nombre quantique orbital (moment cinétique) | | |
| | m_ℓ = projection du moment cinétique orbital | | |
| | m_s = projection du spin $s = 1/2$ | | |

$$H \psi_{n\ell m_\ell m_s}(r, \theta, \phi) = E_{n\ell} \psi_{n\ell m_\ell m_s}(r, \theta, \phi)$$

énergie $E_{n\ell}$
indépendante
de m_ℓ et m_s !

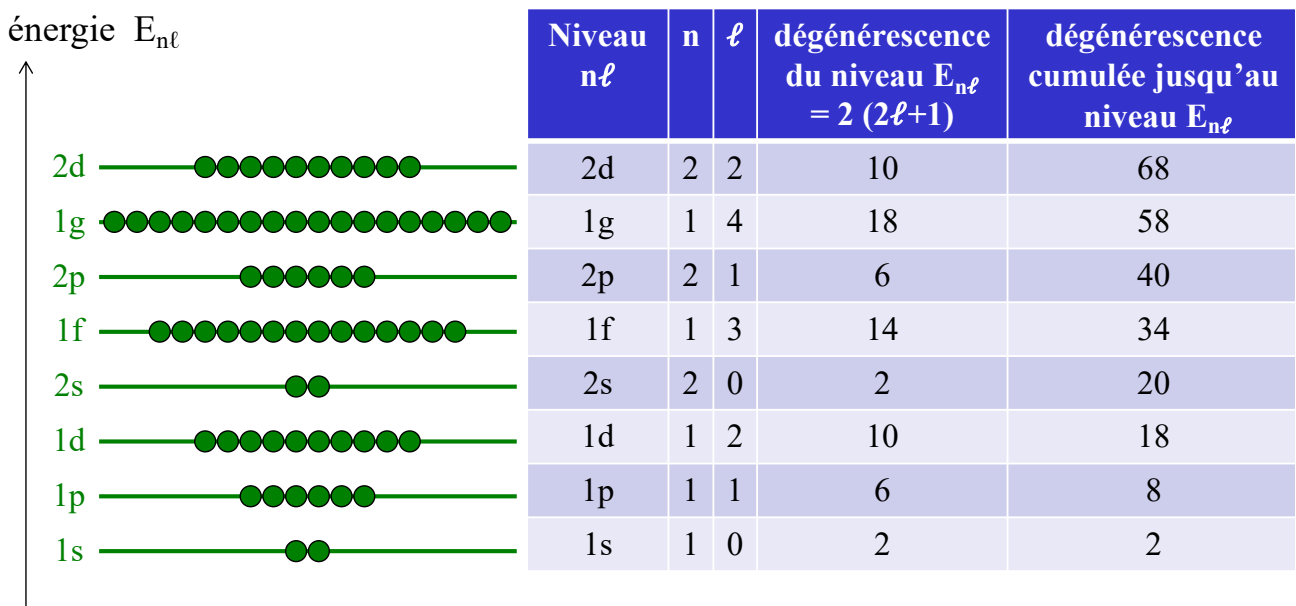
- Dégénérescence = nombre d'états distincts par niveau $E_{n\ell}$
 $= 2(2\ell+1)$

2 valeurs possibles pour m_s :
 $m_s = \pm 1/2$

$2\ell+1$ valeurs possibles pour m_ℓ :
 $m_\ell = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell$

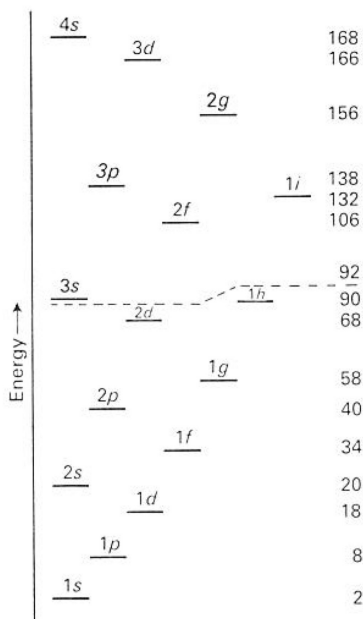
Remplissage des niveaux d'énergie

- Principe d'exclusion de Pauli appliqué séparément aux neutrons et aux protons
 - pour une des deux espèces:

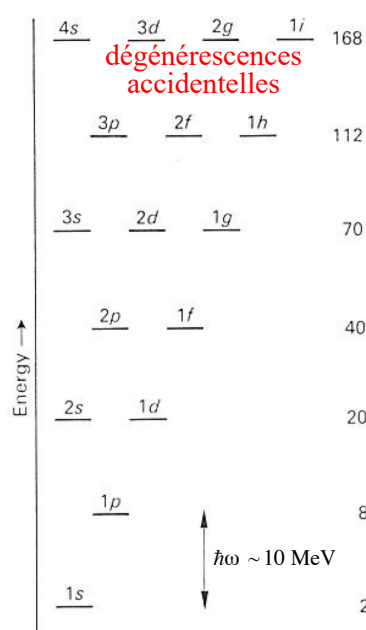


Comparaison entre différents spectres

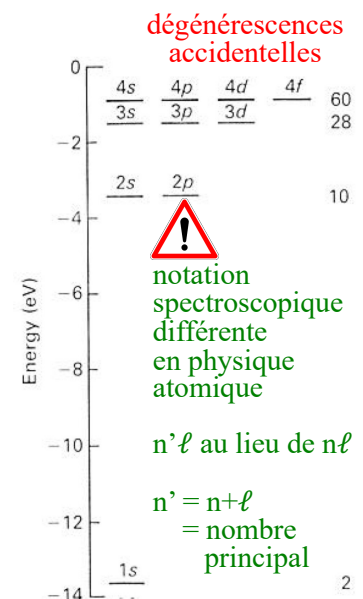
potentiel rectangulaire
(noyau)



potentiel harmonique
(noyau)



potentiel coulombien
(atome H)



$$E_{n\ell} = \hbar\omega \left(2n + \ell - \frac{1}{2} \right) - V_0$$

$$E_{n\ell} = -\frac{E_1}{(n + \ell)^2} \equiv -\frac{E_1}{n'^2}$$

OS, 29 octobre 2025

103

Nombres magiques

- Un **noyau magique** est un noyau ayant un **nombre magique** de neutrons ou de protons
- Dans un noyau magique, les neutrons ou les protons ne forment que des **couches complètes**
- Nombres magiques:

... observés	2 8 20 28 50 82 126
... prédits par potentiel rectangulaire	2 8 20 34 40 58 92 138
... prédits par potentiel harmonique	2 8 20 40 70 112

- Question:
 - quel est le potentiel $V(r)$ qui peut prédire correctement tous les nombres magiques ?

OS, 29 octobre 2025

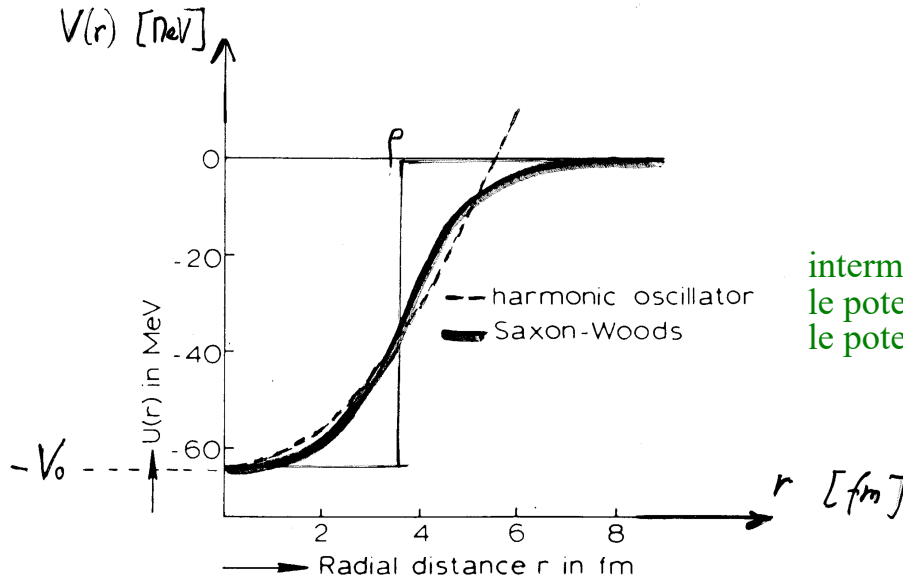
104

Potentiel de Saxon-Woods

- Déterminé empiriquement à partir de mesures de densité nucléaire

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp(\mu(r - \rho))}$$

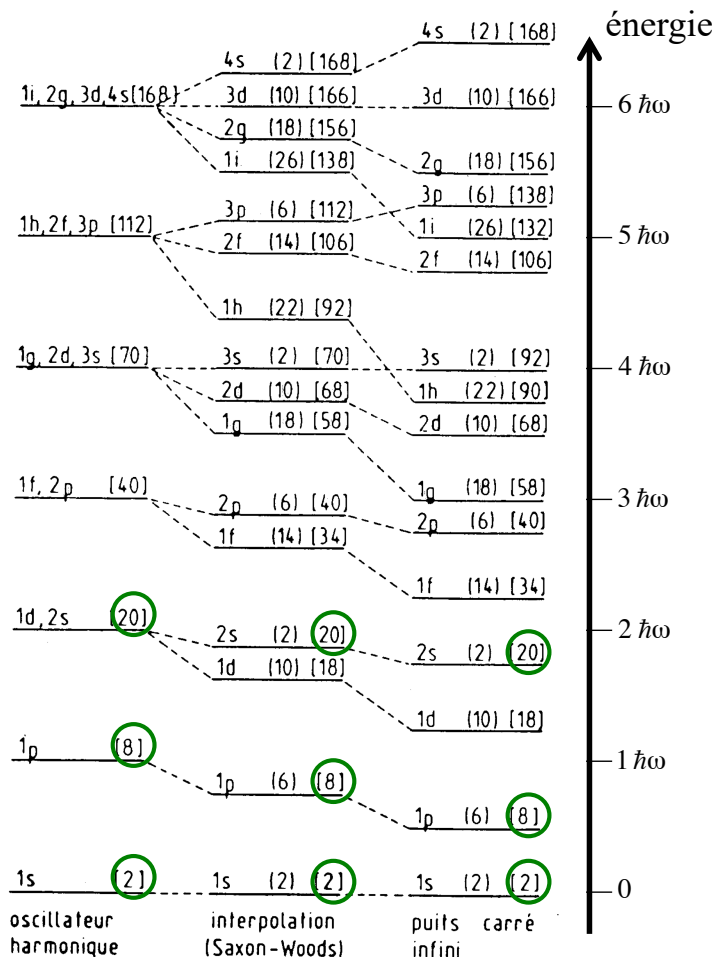
$V_0 = 50-60 \text{ MeV}$
 $\rho = r_0 A^{1/3}, r_0 \sim 1.2 \text{ fm}$
 $\mu = 1-2 \text{ fm}^{-1}$



intermédiaire entre
le potentiel harmonique et
le potentiel rectangulaire

Spectre avec potentiel de Saxon-Woods

- Nombres magiques reproduits
- 2, 8, 20
- Nombres magiques pas reproduits
- 28, 50, 82, 126



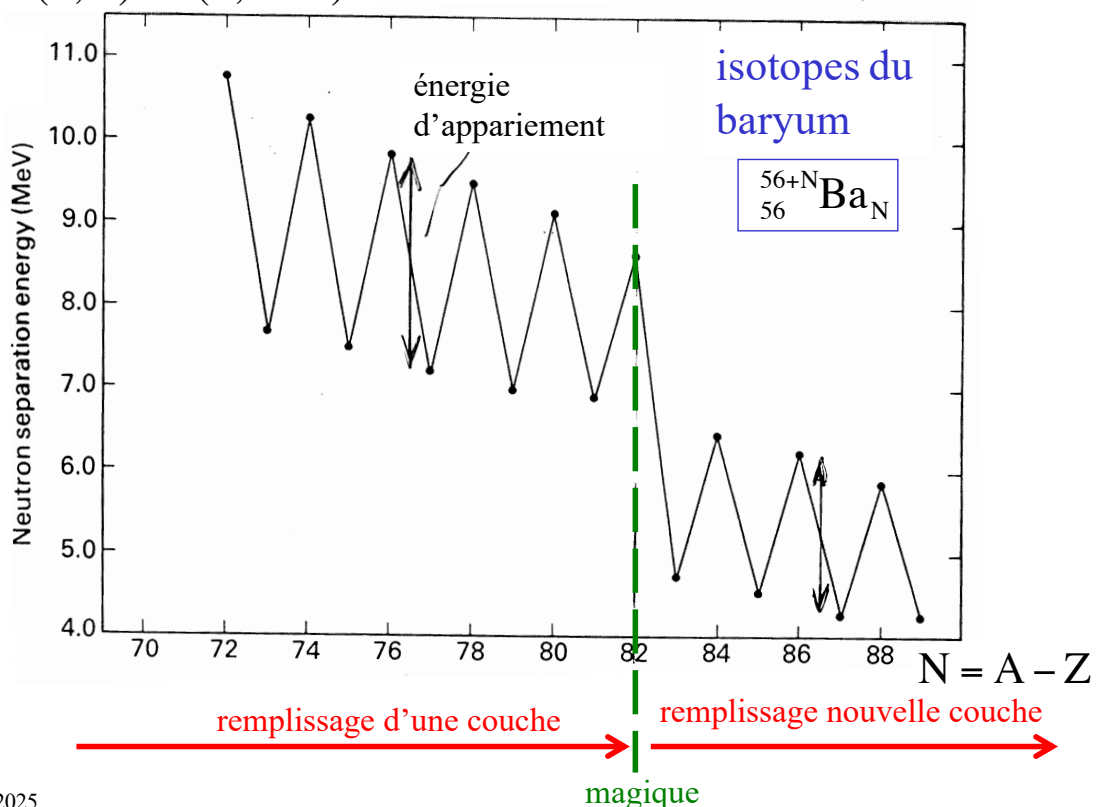
Modèle en couches

Modèle en couches de la physique nucléaire
 = modèle à nucléon indépendant permettant de
 reproduire les nombres magiques

- Evidences expérimentales en faveur des nombres magiques
 - **2, 8, 20, 28, 50, 82, 126**
- Potentiel permettant de reproduire les nombres magiques
 - potentiel non-central, avec couplage spin-orbite
- Prédictions du modèles en couches et comparaison avec les mesures expérimentales
 - spin-parité des niveaux fondamentaux et excités
 - moment magnétique dipolaire
 - moment électrique quadrupolaire

Energie de séparation du neutron le moins lié

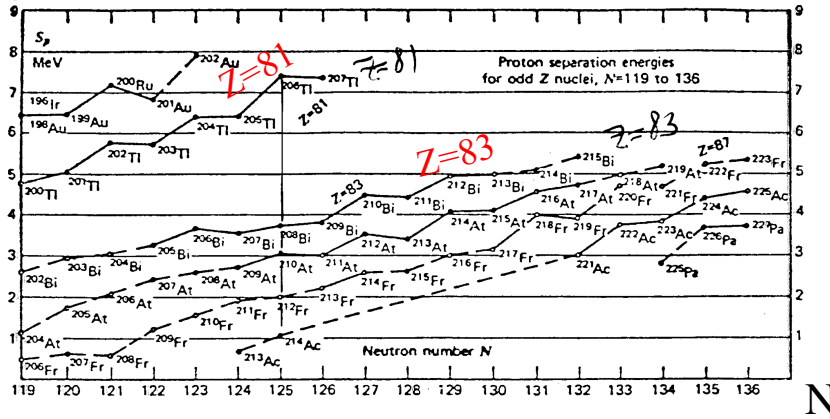
$$S_n = B(Z, A) - B(Z, A - 1)$$



Energie de séparation du proton le moins lié

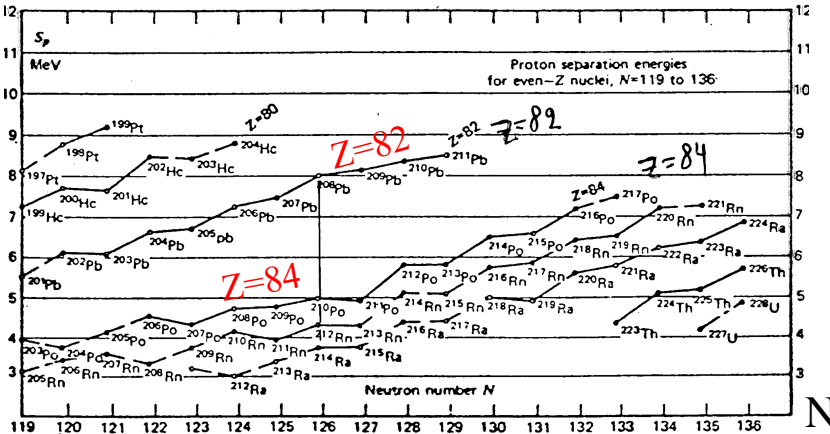
S_p (MeV)

Z impair



S_p (MeV)

Z pair

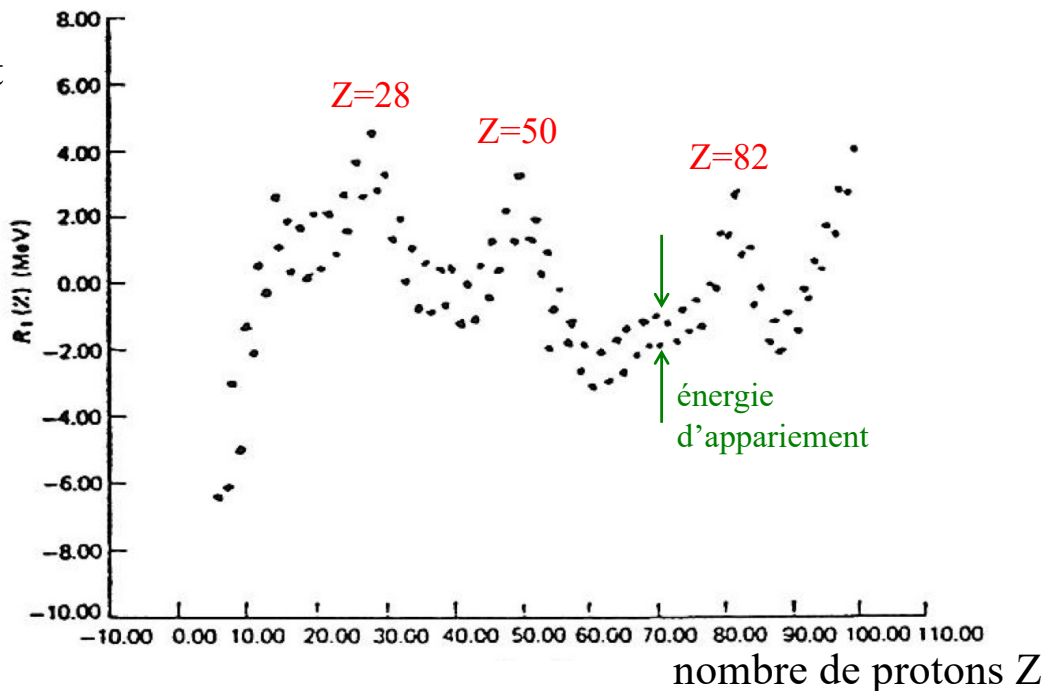


OS, 29 octobre 2025

111

Irrégularités de l'énergie de liaison

résidu =
 $B(Z,A) - \text{fit}$
en MeV



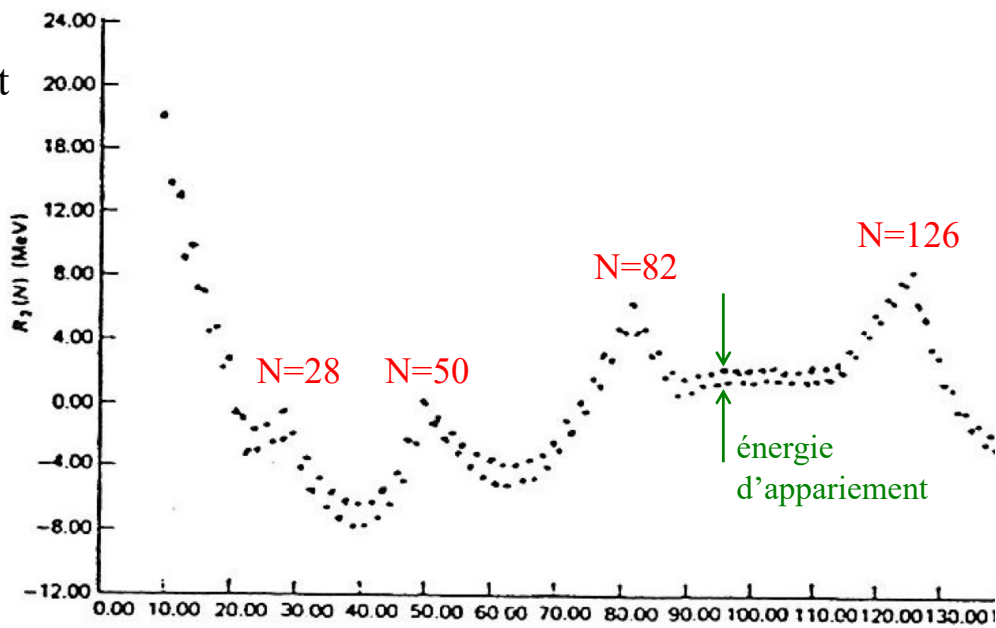
fit = polynôme de degré 2 en A et Z

OS, 29 octobre 2025

112

Irrégularités de l'énergie de liaison

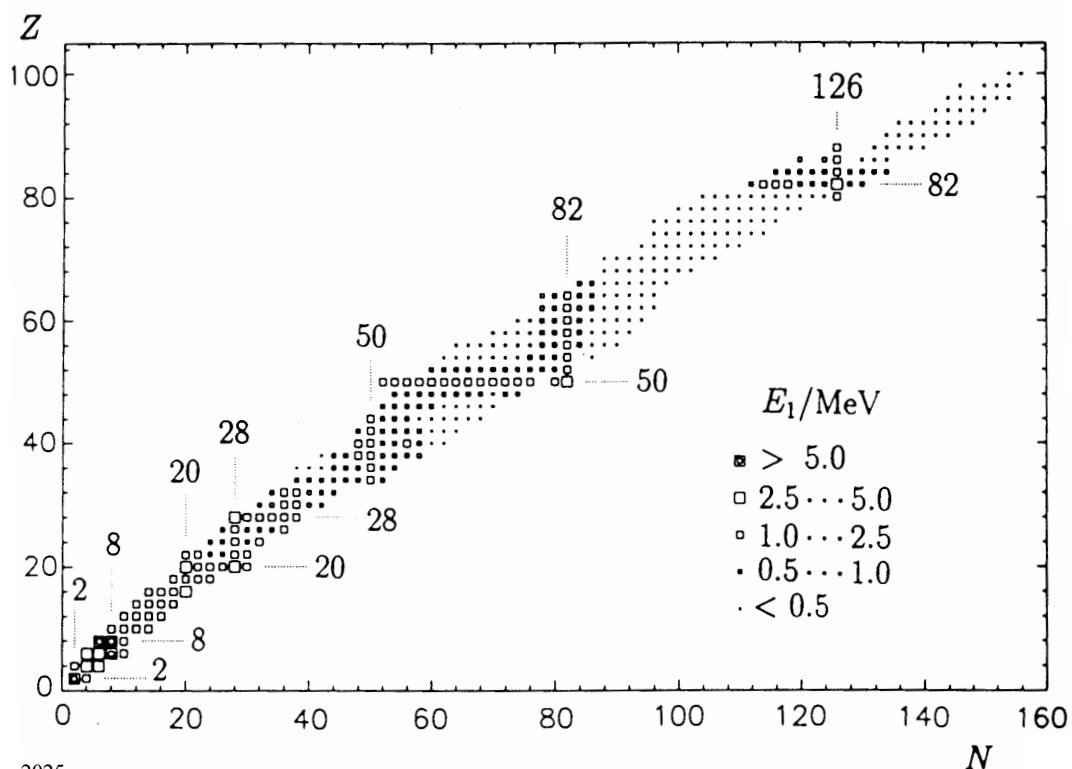
résidu =
 $B(Z,A) - \text{fit}$
 en MeV



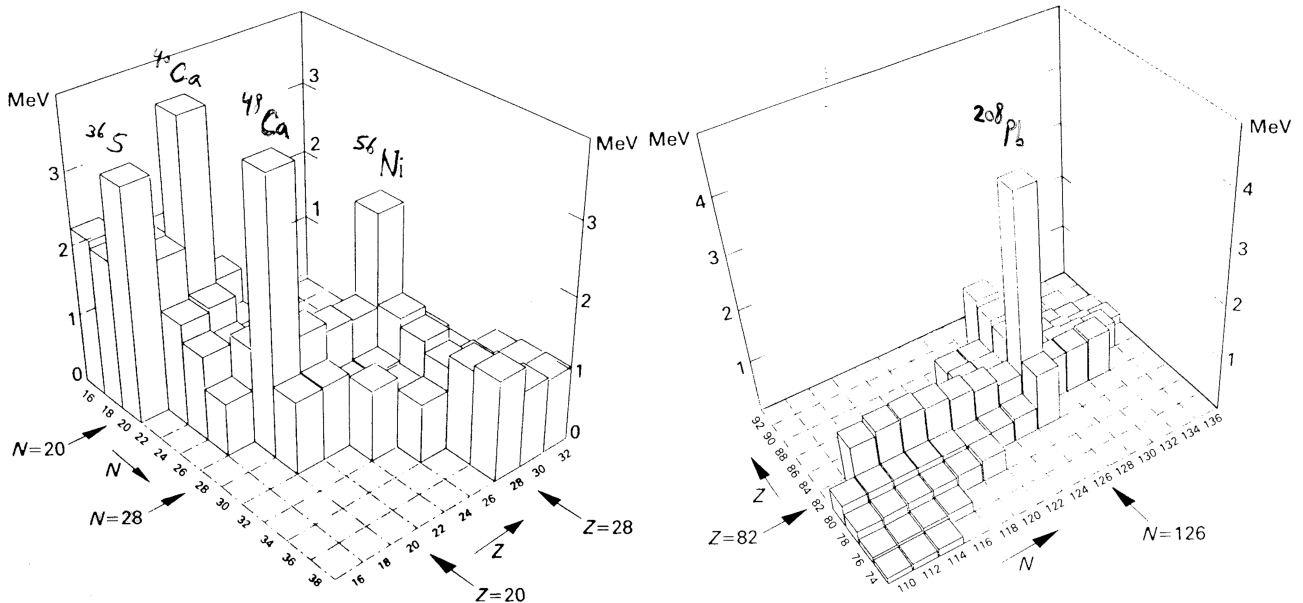
nombre de neutrons N

fit = polynôme de degré 2 en A et Z

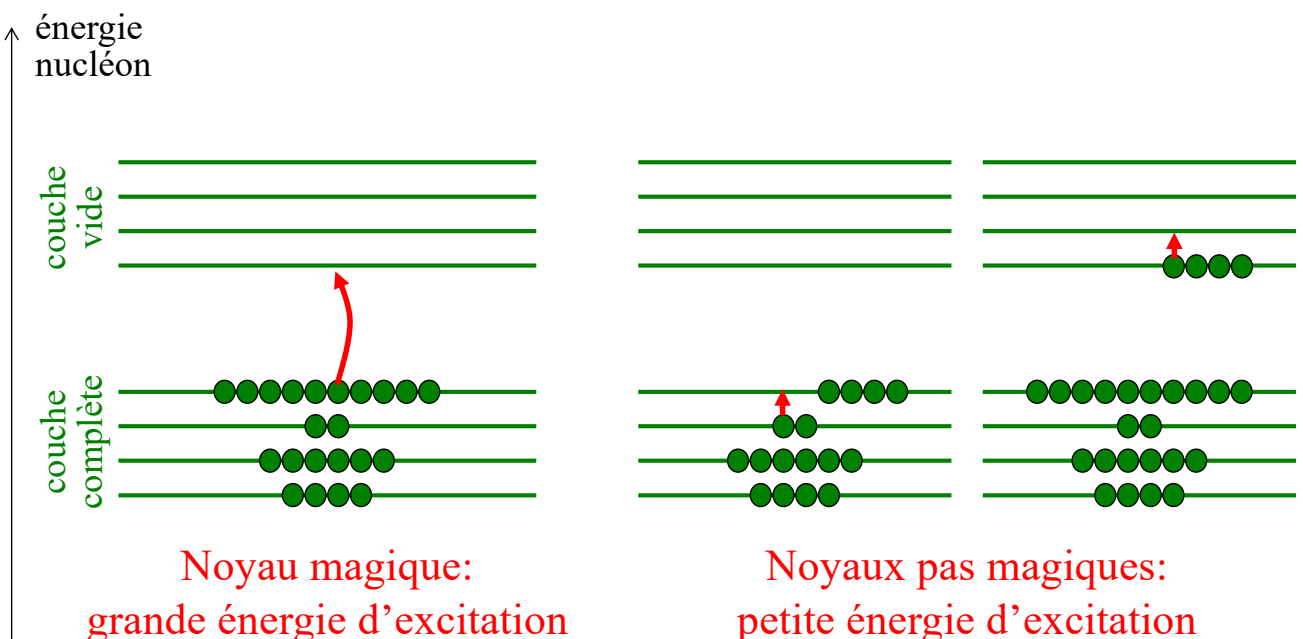
Energie d'excitation du premier niveau excité des noyaux pair-pair



Energie d'excitation du premier niveau excité des noyaux pair-pair



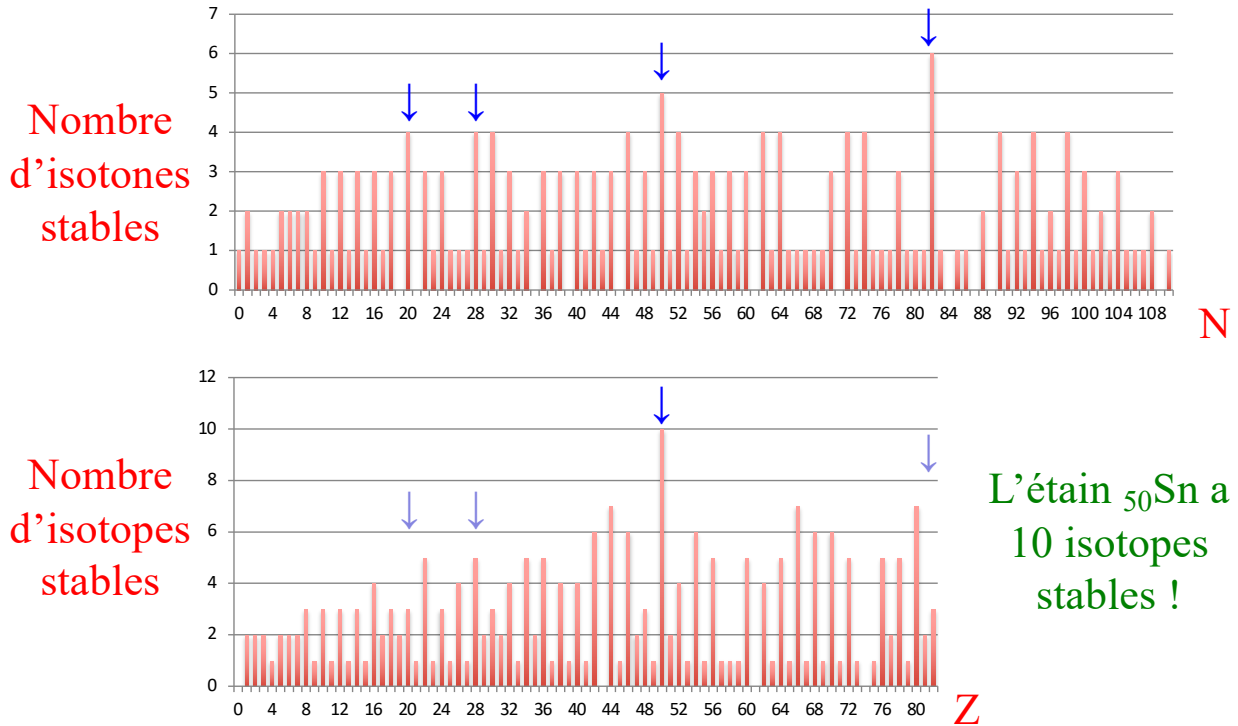
Energie d'excitation du premier niveau excité des noyaux pair-pair



Nombre d'isotones ou isotopes stables

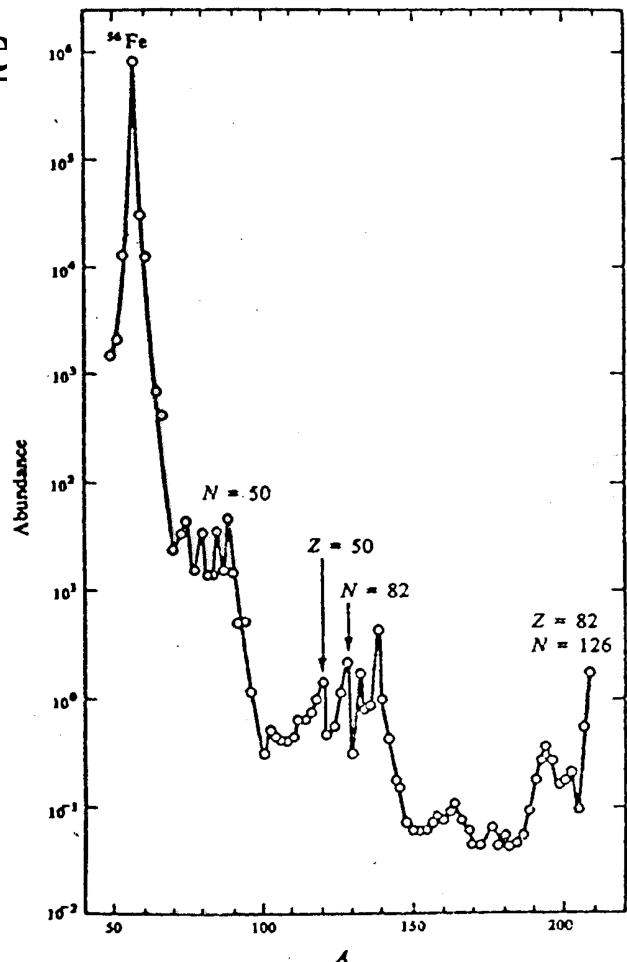
isotones ↔ même N
isotopes ↔ même Z

en général plus élevé pour les noyaux magiques

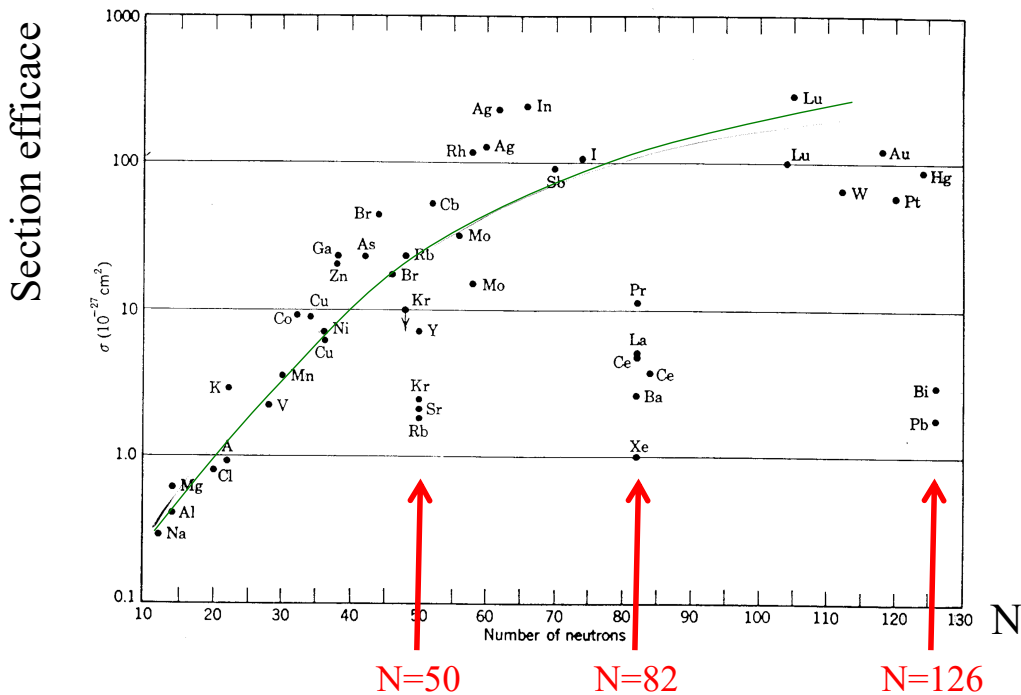
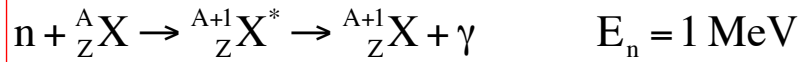


Abondance naturelle relative des noyaux

^1H : 93%
 ^4He : 7%
autres: 0.1%

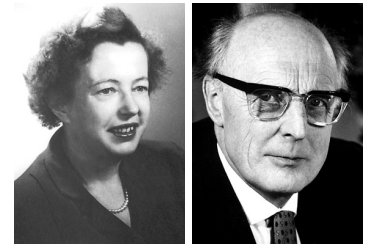


Capture radiative des neutrons lents



Couplage spin-orbite

- Introduit (sur suggestion de Fermi) en 1949 par
 - Maria Goeppert-Mayer (Chicago)
 - J. Hans D. Jensen (Heidelberg)
 } $\frac{1}{2}$ prix Nobel 1963
- Hamiltonien du nucléon indépendant:



$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(r) + \xi(r) \vec{\ell} \cdot \vec{s}$$

potentiel central
(p. ex. Saxon-Woods)

interaction
spin-orbite

$\vec{\ell}$ = moment cinétique orbital du nucléon
 \vec{s} = spin du nucléon

- Les fonctions propres de $\vec{\ell}^2$, ℓ_z , \vec{s}^2 , s_z et $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(r)$

$$\psi_{n\ell m_\ell m_s}(r, \theta, \phi) = R_{n\ell}(r) Y_\ell^{m_\ell}(\theta, \phi) \chi_s^{m_s}$$

ne sont pas des fonctions propres de H car

$$[H, \ell_z] = \xi(r) [\vec{\ell} \cdot \vec{s}, \ell_z] \neq 0 \quad \text{et} \quad [H, s_z] = \xi(r) [\vec{\ell} \cdot \vec{s}, s_z] \neq 0$$

Couplage spin-orbite (suite)

- Moment cinétique total du nucléon indépendant:

$$\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}$$

- les opérateurs H , $\vec{\ell}^2$, \vec{s}^2 , \vec{j}^2 et j_z commutent entre eux
- on cherche donc des fonctions stationnaires ψ telles que

$$\begin{aligned} H\psi &= E\psi \\ \vec{\ell}^2\psi &= \ell(\ell+1)\hbar^2\psi \\ \vec{s}^2\psi &= s(s+1)\hbar^2\psi \\ \vec{j}^2\psi &= j(j+1)\hbar^2\psi \\ j_z\psi &= m\hbar\psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell &= 0, 1, 2, \dots \\ s &= \frac{1}{2} \\ j &= \ell \pm \frac{1}{2} \\ m &= -j, -j+1, \dots, j-1, j \end{aligned}$$

- Valeurs propres $\lambda_{\ell j}$ de $\vec{\ell} \cdot \vec{s}$: $\vec{\ell} \cdot \vec{s} \psi = \lambda_{\ell j} \psi$

$$\lambda_{\ell j} = \frac{1}{2} \hbar^2 [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)] = \begin{cases} +\frac{1}{2} \hbar^2 \ell & \text{si } j = \ell + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \hbar^2 (\ell + 1) & \text{si } j = \ell - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Couplage spin-orbite (suite)

- Nouvelle équation radiale

$$\left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V(r) - \xi(r) \lambda_{\ell j}) - \ell(\ell+1) \right] R(r) = 0$$

- pour chaque $\ell > 0$, deux équations radiales différentes ($j = \ell + \frac{1}{2}$ et $j = \ell - \frac{1}{2}$)
- pour chaque couple ℓj , plusieurs solutions numérotées $n = 1, 2, \dots$ par ordre croissant d'énergie

$$\begin{cases} E \rightarrow E_{n\ell j} \\ R(r) \rightarrow R_{n\ell j}(r) \\ \psi \rightarrow \psi_{n\ell j m} \end{cases}$$

- « Splitting » (clivage) des niveaux pour $\ell > 0$:

