

# Relativité restreinte (rappels)

	$\xrightarrow{v/c \ll 1}$	
	<u>Relativité restreinte</u>	<u>Mécanique newtonienne</u>
Postulats	$c = \text{constante}$ $(c\Delta t)^2 - (\overline{\Delta x})^2$ invariant	temps et espace absolus $\Delta t$ et $ \overline{\Delta x} $ invariants
Grandes lois physiques	$\vec{\beta} = \vec{v}/c, \gamma = (1 - \vec{\beta}^2)^{-1/2}$ $\vec{p} = m\gamma\vec{\beta}c \rightarrow \vec{p} = m\vec{v}$ $T = mc^2(\gamma - 1) \rightarrow T = \frac{1}{2}mv^2$ $E = mc^2 + T = m\gamma c^2 \rightarrow E = E^{\text{interne}} + \frac{1}{2}mv^2$ $\vec{\beta} = \vec{p}c/E \rightarrow v = 2T/p$ $E^2 - \vec{p}^2c^2 = m^2c^4 \rightarrow T = \vec{p}^2 / (2m)$	
Lois physiques	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ conservation de $\vec{p}$ conservation de $E$	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ conservation de $\vec{p}$ conservation de $E$

# Relativité restreinte (rappels)

- Energie potentielle de masse (Einstein, 1905):  $E_{\text{masse}} = mc^2$
- Energie totale:  $E = T + E_{\text{masse}} = mc^2(\gamma - 1) + mc^2 \Rightarrow E = m\gamma c^2$
- Vitesse d'une particule:  $p = m\gamma\beta c$  et  $E = m\gamma c^2 \Rightarrow \beta = \frac{pc}{E}$
- Relation entre énergie, quantité de mouvement et masse:
 
$$1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow E^2 - E^2\beta^2 = \frac{E^2}{\gamma^2} \Leftrightarrow E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$
- Masse nulle  $\Leftrightarrow$  vitesse  $c$ :  $m = 0 \Leftrightarrow E = pc \Leftrightarrow \beta = 1$
- Unités:
 

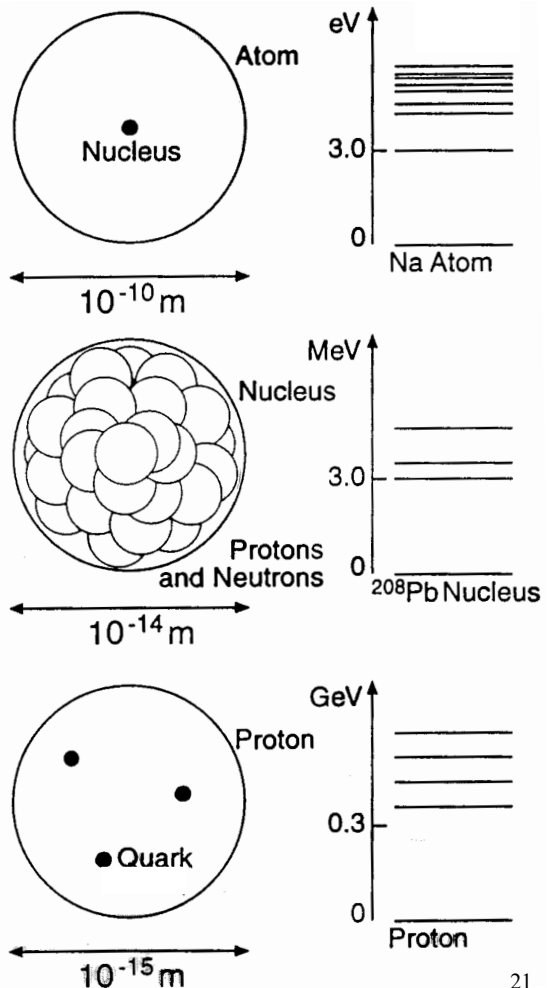
$E$ en GeV $pc$ en GeV $\Rightarrow p$ en GeV/c $mc^2$ en GeV $\Rightarrow m$ en GeV/c <sup>2</sup>	(on pose parfois $c=1$ )
---	--------------------------

# Dimensions et énergies (échelles)

à savoir  
par coeur

Les électrons et les quarks ont une taille  $< 10^{-19}$  m et sont considérés comme des constituants fondamentaux de la matière

**Atome**  
(forces é.m.)  
 $\text{Å} = 10^{-10}$  m  
eV



**Noyau**  
(forces nucléaires)  
 $10^{-14}$  m  
MeV

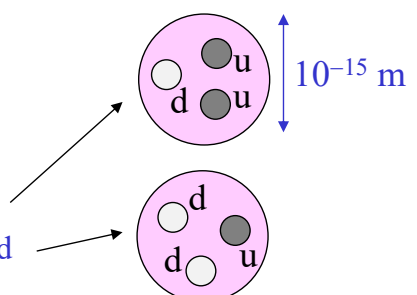
**Nucléon**  
(forces de couleur)  
fm =  $10^{-15}$  m  
GeV

## Constituants fondamentaux de la matière (fermions de spin $1/2$ )

- Toute la matière connue est formée de combinaisons de 6 leptons et 6 quarks
- Pour chacune de ces 12 particules, il existe une anti-particule de charge électrique opposée (anti-matière)
- Ces constituants élémentaires n'ont pas de structure connue

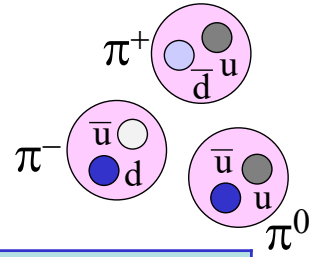
				Charge électrique [e]	Charge de couleur
Leptons	électron e	muon $\mu$	tau $\tau$	-1	non
	neutrino $\nu_e$	neutrino $\nu_\mu$	neutrino $\nu_\tau$	0	
	Quarks	up u	charm c	top t	+2/3
down d		strange s	bottom b	-1/3	

- La matière courante (stable) est formée seulement de trois types de particules élémentaires: e, u, d
  - Chaque atome contient des électrons et un noyau
  - Les noyau est fait de protons et de neutrons
  - Un proton est une combinaison de quarks u, u et d
  - Un neutron est une combinaison de quarks u, d et d



# Particules-forces

- Les forces entre particules de matière et d'antimatière s'exercent par l'échange de particules-forces (bosons de spin entier)



Modèle Standard de la physique des particules

Interaction	Bosons d'échange	Particules sensibles
<b>Force de couleur</b> [ → force forte]	8 gluons [mésons $\pi$ ]	seulement quarks & gluons [neutrons, protons, ...]
<b>Electromagnétisme</b>	photon $\gamma$	particules chargées électriquement
<b>Force faible</b>	$W^+, W^-, Z^0$	toutes
<b>Interaction de Higgs</b>	H	particules massives
<b>Gravitation</b>	graviton	toutes

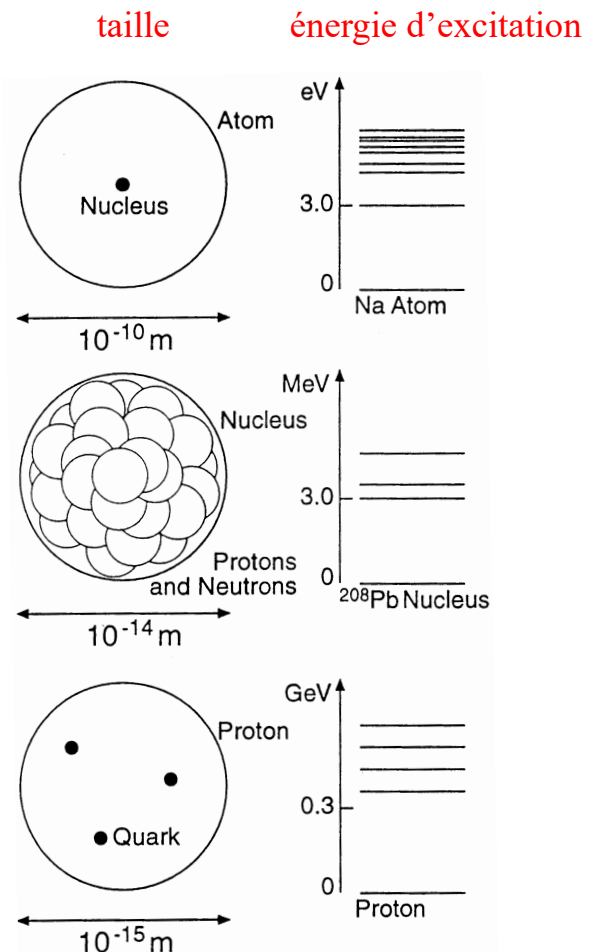
- Bosons W et Z découverts en 1983
- Boson de Higgs découvert en 2012
- Ondes gravitationnelles découvertes en 2016

OS, 17 septembre 2025

23

## Structures ...

- Physique atomique:**
  - force électromagnétique
  - atomes formé d'un noyau et d'électrons
    - Ångström, eV
- Physique nucléaire:**
  - force nucléaire forte
  - noyaux formés de nucléons
    - ~10 fm, MeV
- Physique des particules élémentaires:**
  - force de couleur
  - hadrons formés de quarks
    - fm, GeV



OS, 17 septembre 2025

24

# Nucléon (= proton ou neutron)

- **Le nucléon a un spin  $s = 1/2$** 
  - Espace des états de spin de dimension  $2s+1 = 2$
  - Base de l'espace des états de spin  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$   
formée d'états propres de  $\vec{s}^2$  et  $s_z$

$$\begin{aligned} \vec{s}^2 |\uparrow\rangle &= s(s+1)\hbar^2 |\uparrow\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |\uparrow\rangle & s_z |\uparrow\rangle &= +\frac{1}{2}\hbar |\uparrow\rangle \\ \vec{s}^2 |\downarrow\rangle &= s(s+1)\hbar^2 |\downarrow\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |\downarrow\rangle & s_z |\downarrow\rangle &= -\frac{1}{2}\hbar |\downarrow\rangle \end{aligned}$$

- **Le nucléon est un fermion**
  - il obéit à la statistique de Fermi-Dirac, et donc au principe d'exclusion de Pauli

En mécanique quantique, deux particules identiques sont indistinguables. **L'état quantique d'un système de deux particules identiques doit être soit antisymétrique (cas des fermions) soit symétrique (cas des bosons) sous l'échange des deux particules.**

## Système de deux nucléons de spin $1/2$

- Base de l'espace de états de spin de dim. 4:  $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ 
  - pas états propres du spin total  $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$
- **Nouvelle base d'états propres du spin total:**  $\{|S; M_S\rangle\}$ ,  $S = 0, 1$ ,  $-S \leq M_S \leq S$   
 $M_S =$  valeur propre de  $S_z/\hbar$

$$\begin{aligned} |0; 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |1; +1\rangle &= |\uparrow\uparrow\rangle \\ |1; 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |1; -1\rangle &= |\downarrow\downarrow\rangle \end{aligned}$$

état singulet  $S=0$ , antisymétrique

triplet d'états  $S=1$ , symétriques  
sous l'échange des deux nucléons

$\ell$  est le moment cinétique orbital  
relatif entre les deux nucléons

Si l'état de mouvement est symétrique (par ex.  $\ell=0$ )

- un système pp ou nn (fermions identiques) doit être dans un état antisymétrique, donc avoir  $S=0$  ( $S=1$  interdit)
- un système pn (fermions différents) peut avoir  $S=0$  ou  $S=1$

# Interaction nucléon-nucléon: faits d'expérience

- Deuteron:



le seul système lié de deux nucléons est le système pn dans l'état  $S=1$  et  $\ell=0$

⇒

le force entre un proton et un neutron dépend du spin

- Indépendance de charge des forces nucléaires:

- si les deux nucléons sont dans le même état de mouvement relatif et de spin total, et si on ignore les forces de Coulomb, alors

force entre p et p = force entre n et n = force entre p et n

- de plus:

$$m_p \simeq m_n$$

⇒

Le proton et le neutron sont très semblables; ils seraient indiscernables si la seule force en jeu était la force nucléaire forte

la force é.m. "lève la dégénérescence"

## Isospin du nucléon

- Le nucléon a un isospin  $I = 1/2$

- Le nucléon a  $2I+1 = 2$  états de charge possible

- état proton  $|p\rangle$
  - état neutron  $|n\rangle$
- } "doublet d'isospin"

- Espace des états d'isospin de dimension  $2I+1 = 2$

- Base de l'espace des états d'isospin  $\{|p\rangle, |n\rangle\}$  formée d'états propres de  $\vec{I}^2$  et  $I_3$

$$\begin{aligned} \vec{I}^2 |p\rangle &= I(I+1) |p\rangle = \frac{3}{4} |p\rangle & I_3 |p\rangle &= +\frac{1}{2} |p\rangle \\ \vec{I}^2 |n\rangle &= I(I+1) |n\rangle = \frac{3}{4} |n\rangle & I_3 |n\rangle &= -\frac{1}{2} |n\rangle \end{aligned}$$

même formalisme que le spin

- opérateur de charge pour le nucléon:  $Q = I_3 + 1/2$

$$\begin{aligned} Q |p\rangle &= +1 |p\rangle & \text{valeur propre } +1 \\ Q |n\rangle &= 0 |n\rangle & \text{valeur propre } 0 \end{aligned}$$

# Composition de deux isospins $\frac{1}{2}$

- Même formalisme que pour la compositions de deux spins  $\frac{1}{2}$

- Isospin total:

$$\vec{I} = \vec{I}^{(1)} + \vec{I}^{(2)}$$

- Les états propres de  $\vec{I}^2$  et  $I_3$  forment une base de l'espace des états d'isospin

$$\{|I; M_I\rangle\}, \quad I = 0, 1, \quad -I \leq M_I \leq I$$

$M_I =$  valeur propre de  $I_3$

$$|0; 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle - |np\rangle)$$

état singulet  $I=0$ , antisymétrique

$$|1; +1\rangle = |pp\rangle$$

$$|1; 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle + |np\rangle)$$

triplet d'états  $I=1$ , symétriques  
sous l'échange des deux nucléons

$$|1; -1\rangle = |nn\rangle$$

## Systeme de deux nucléons

- Etat de spin  $|S; M_S\rangle$ , avec  $S = 0$  ou  $1$
- Etat d'isospin  $|I; M_I\rangle$ , avec  $I = 0$  ou  $1$
- Etat de mouvement relatif  $|\psi\rangle$

- L'état complet  $|\psi\rangle \otimes |S; M_S\rangle \otimes |I; M_I\rangle$  doit être antisymétrique pour des fermions

– Cas  $\ell=0$  ( $|\psi\rangle$  symétrique): 6 états internes possibles

$$\underbrace{|S=0; M_S=0\rangle}_{\text{antisym.}} \otimes \underbrace{|I=1; M_I\rangle}_{\text{sym.}} \quad \left\{ \begin{array}{l} |0;0\rangle \otimes |1;+1\rangle \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \otimes |pp\rangle \\ |0;0\rangle \otimes |1;0\rangle \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle + |np\rangle) \\ |0;0\rangle \otimes |1;-1\rangle \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \otimes |nn\rangle \end{array} \right.$$

$$\underbrace{|S=1; M_S\rangle}_{\text{sym.}} \otimes \underbrace{|I=0; M_I=0\rangle}_{\text{antisym.}} \quad \left\{ \begin{array}{l} |1;+1\rangle \otimes |0;0\rangle \quad |\uparrow\uparrow\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle - |np\rangle) \\ |1;0\rangle \otimes |0;0\rangle \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle - |np\rangle) \\ |1;-1\rangle \otimes |0;0\rangle \quad |\downarrow\downarrow\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle - |np\rangle) \end{array} \right.$$

# Interaction forte et isospin

- Interaction dépend de l'isospin total

- état lié pn, avec  $\ell=0$  et  $S=1 \Rightarrow I=0$
- états pp et nn ont nécessairement  $I=1$  puisque  $I_3 = \pm 1$ ;  
or pp ou nn n'est pas un état lié

Système avec $\ell=0$	I	$M_I$	S	
pp	1	+1	0	même force entre les deux nucléons
pn	1	0	0	
nn	1	-1	0	
pn (deuton)	0	0	1	force différente

## Les forces nucléaires:

- peuvent dépendre de I
- sont indépendentes de  $M_I$
- conservent l'isospin

indépendance de charge

invariance par rotation dans l'espace d'isospin (ou espace de charge)

$\Leftrightarrow \vec{I}$  conservé

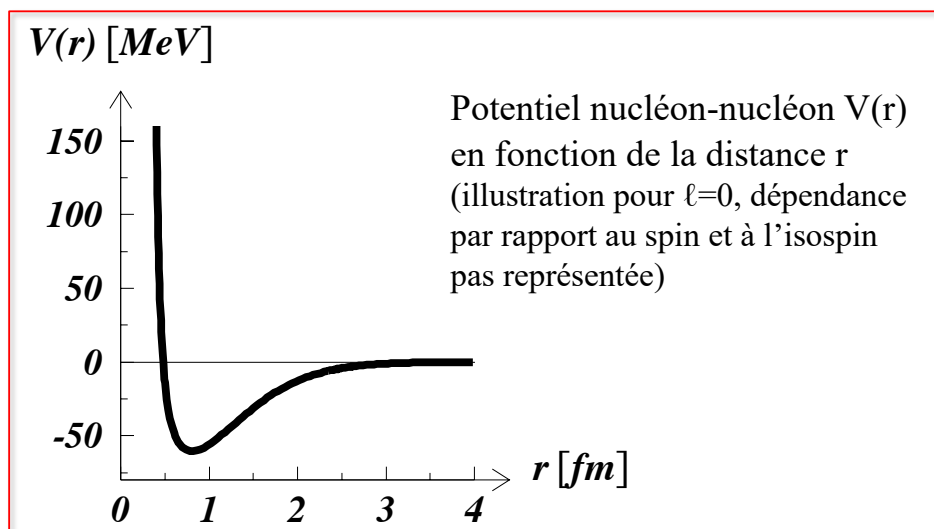
$\Leftrightarrow [H, I_1] = [H, I_2] = [H, I_3] = 0$

NB: les forces é.m et faible ne conservent pas (violent) l'isospin !

# Force forte entre deux nucléons

- Force nucléaire forte:

- globalement attractive, avec portée jusqu'à  $\sim 2$  fm
- très fortement répulsive en deça de  $\sim 0.4$  fm
  - incompressibilité de la matière nucléaire
- dépend du spin total et de l'isospin total



# Force forte entre deux nucléons (suite)

- Forme générale du potentiel entre deux nucléons, sur la base d'arguments de symétrie et d'invariance:

$$\begin{aligned} V^{(I)}(\vec{r}, \vec{p}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = & V_0^{(I)}(r) \\ & + V_{ss}^{(I)}(r) \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 / \hbar^2 \\ & + V_{\text{tens}}^{(I)}(r) \left[ 3(\vec{s}_1 \cdot \vec{r})(\vec{s}_2 \cdot \vec{r}) / r^2 - \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \right] / \hbar^2 \\ & + V_{\ell S}^{(I)}(r) (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \cdot \vec{\ell} / \hbar^2 \\ & + V_{\ell s}^{(I)}(r) (\vec{s}_1 \cdot \vec{\ell})(\vec{s}_2 \cdot \vec{\ell}) / \hbar^4 \\ & + V_{ps}^{(I)}(r) (\vec{s}_1 \cdot \vec{p})(\vec{s}_2 \cdot \vec{p}) / (\hbar mc)^2 \end{aligned}$$

$I$  = isospin total

$\vec{r}$  = position relative

$\vec{p}$  = quantité de mouvement relative

$\vec{\ell}$  =  $\vec{r} \wedge \vec{p}$  = moment cinétique relatif

$\vec{s}_i$  = spin du nucléon  $i$

OS, 17 septembre 2025

33

## Description du noyau

noyau = Z protons + N neutrons = A nucléons

**Notation:**  $\boxed{\begin{matrix} A \\ Z \end{matrix} X_N}$  ou bien  $\boxed{A X}$  où X = symbole chimique

Chaque « espèce nucléaire » (ou noyau) est définie par Z et A

### Hypothèses:

- ① la structure des nucléons (quarks) peut être ignorée
  - valable si  $E(\text{noyau}) \ll E(\text{nucléon})$   
où  $E$  = énergie en jeu (liaison, excitation, ...)
- ② le mouvement des nucléons dans le noyau est non-relativiste
  - valable si  $\beta(\text{nucléon}) \ll 1$   
où  $\beta c$  = vitesse

OS, 17 septembre 2025

34

# Tableau des isotopes

- « tableau de Mendeleev » de la physique nucléaire
  - nombreux isotopes
  - ~260 isotopes stables

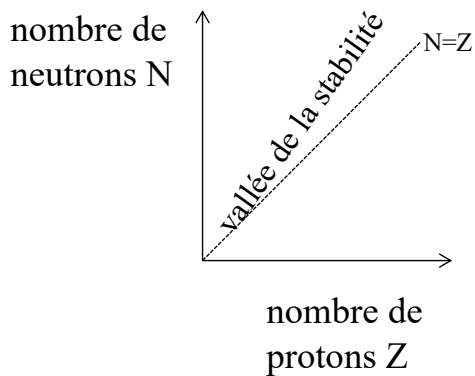
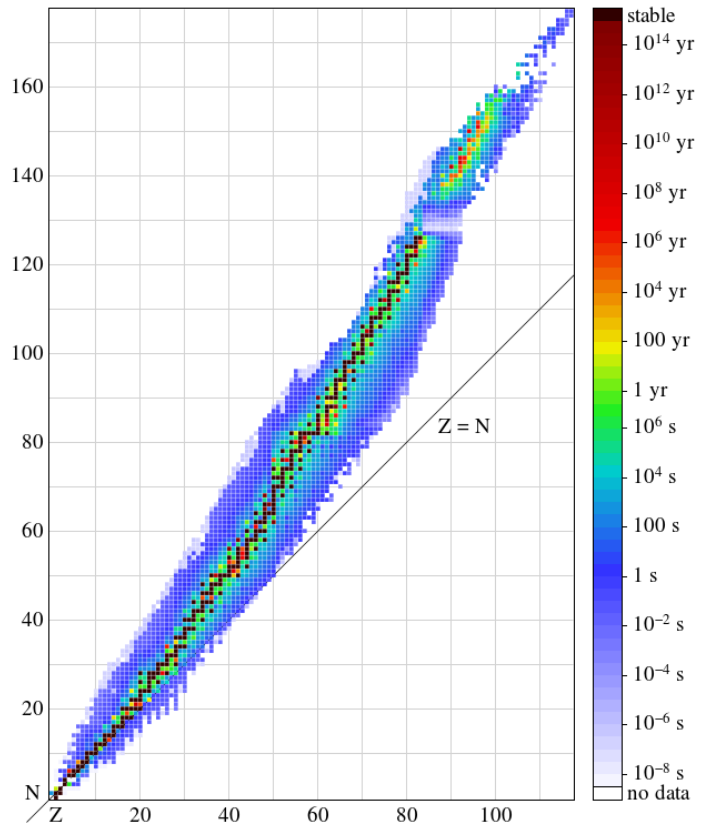


tableau interactif  
<http://www.nndc.bnl.gov/nudat3/>



OS, 17 septembre 2025

35

## Description du noyau (suite)

### A résoudre

- système quantique non-relativiste de A nucléons en interaction mutuelle

### Il suffit de:

- ① déterminer l'hamiltonien
- ② résoudre l'équation de Schrödinger
- ③ tenir compte du principe d'exclusion de Pauli

### Obstacles:

- interaction forte encore mal connue
- problème à A corps non soluble analytiquement si  $A > 3$

→ on doit faire des approximations  
et introduire des paramètres empiriques

OS, 17 septembre 2025

36

# Modèles nucléaires ...

- ... de la goutte liquide
- ... du gaz de Fermi
- ... à particules indépendantes
- ... en couches
- ... collectifs

## But:

- Prédiction des propriétés des noyaux —————> **élaboration**  
avec un minimum de paramètres empiriques
- Confrontation avec l'expérience —————> **justification**

masse, énergie de liaison, stabilité, spin-parité,  
moment magnétique dipolaire,  
moment électrique quadrupolaire  
niveaux excités (énergie, spin-parité, durée de vie ...)

## Distribution de charge dans les noyaux

mesurée par  
diffusion d'électrons  
 $E \sim 200\text{--}500 \text{ MeV}$   
(interaction é.m.)

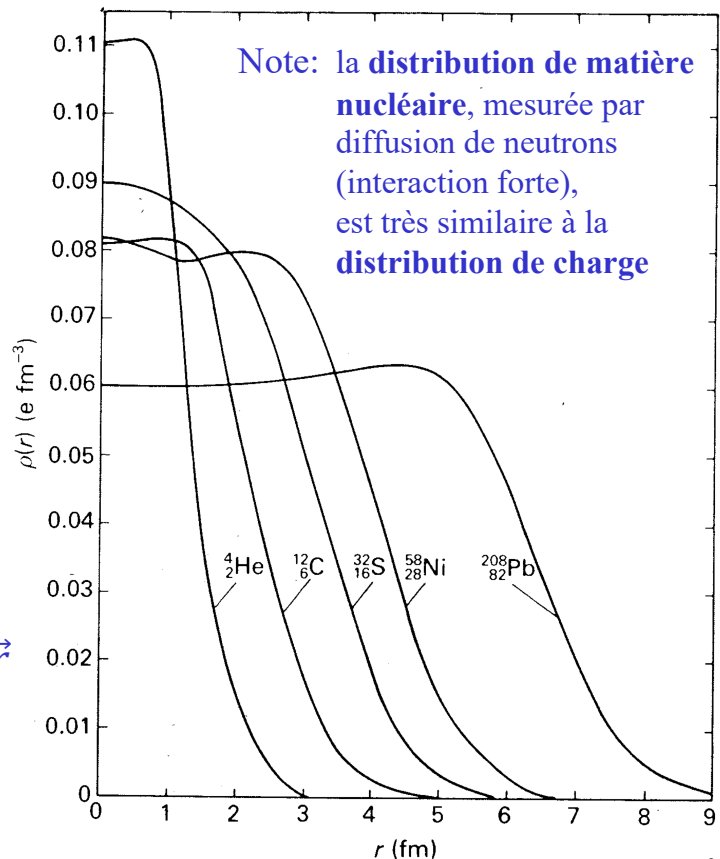
Effet d'une distribution de charge  $\rho(\vec{r})$ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow |F(q^2)|^2 \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

avec facteur de forme

$$F(q^2) = \frac{1}{Ze} \iiint \rho(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} d^3\vec{r}$$

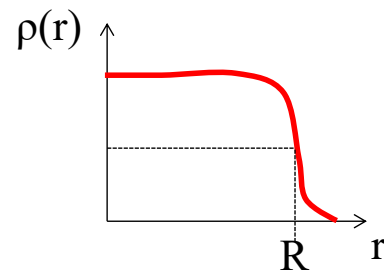
où  $q$  = impulsion transférée



# Taille des noyaux

- Relation empirique déduite des expériences de diffusion

$$R \approx r_0 A^{1/3} \quad \text{où } r_0 = 1.2 \text{ fm}$$



- Volume du noyau (supposé sphérique):  $\Omega = \frac{4}{3} \pi R^3 \approx \frac{4}{3} \pi r_0^3 A$
- Densité nucléaire à l'intérieur du noyau:

$$\rho = \frac{A}{\Omega} \approx \frac{1}{\frac{4}{3} \pi r_0^3} = 0.138 \text{ nucléons / fm}^3 = 1.38 \times 10^{38} \text{ nucléons / cm}^3$$

Volume proportionnel à A  
Densité similaire pour tous les noyaux !

# Masses nucléaires et atomiques

Noyau  ${}^A_Z X_N$  : Z protons + N neutrons = A nucléons

$$\text{masse noyau } {}^A_Z X_N = m(Z, A) = Zm_p + Nm_n - B(Z, A) / c^2$$

- $m_p = 938.272 \text{ MeV}/c^2 = \text{masse du proton}$
- $m_n = 939.565 \text{ MeV}/c^2 = \text{masse du neutron}$
- $B(Z, A) = \text{énergie de liaison du noyau} > 0$

$$\text{masse atome de } {}^A_Z X_N = M(Z, A) = m(Z, A) + Zm_e - L(Z) / c^2$$

- $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2 = \text{masse de l'électron}$
- $L(Z) \approx 15.73 Z^{7/3} \text{ eV} = \text{énergie de liaison des } Z \text{ électrons (négligeable)}$

$$\text{masse atome de } {}^A_Z X_N = M(Z, A) = Zm_H + Nm_n - B(Z, A) / c^2$$

- $m_H = \text{masse de l'atome d'hydrogène} \approx m_p + m_e$

# Unité de masse atomique

- Définition de l'unité de masse atomique:  
1/12 de la masse d'un atome de carbone 12 ( $^{12}\text{C}_6$ )

$$1 \text{ uma} = 1 \text{ u} = \frac{M(6,12)}{12} \approx 931.494 \text{ MeV} / c^2$$

- Avant la redéfinition de la mole le 20 mai 2019:

$$12 \text{ g de } ^{12}\text{C} = 1 \text{ mole de } ^{12}\text{C} = N_A \text{ atomes de } ^{12}\text{C}$$

où  $N_A$  = nombre d'Avogadro

$$1 \text{ uma} = 1 \text{ u} = 1 \text{ g} / N_A \approx 1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

- Après le 20 mai 2019:

mole redéfinie par  $N_A = 6.02214076 \times 10^{23}$  (exactement)  
donc

$$1 \text{ uma} = 1 \text{ u} \approx 1 \text{ g} / N_A \approx 1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

# Modèle de la goutte liquide

Modèle totalement empirique, dû à Von Weizsäcker (1935)

Analogie:

goutte liquide	↔	noyau
molécules	↔	nucléons
forces de van der Waals	↔	force nucléaire

- force à courte portée (**saturation**)
  - nucléons en interaction seulement avec leurs plus proches voisins
  - énergie de liaison d'un nucléon dans le noyau indépendante de A
- énergie de liaison diminuée pour les nucléons à la surface; effet proportionnel à l'aire  $S = 4\pi R^2 = 4\pi r_0^2 A^{2/3}$  (**tension superficielle de la goutte**)
- **répulsion coulombienne** entre les protons
- **énergie d'asymétrie** et **énergie d'appariement**

# Formule semi-empirique de la masse (1)

Von Weizsäcker (1935)

$$\begin{aligned}
 m(Z, A)c^2 &= Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2 - B(Z, A) \\
 &= Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2 \quad \text{masses} \\
 &\quad - a_v A \quad \text{-- énergie de volume} \\
 &\quad + a_s A^{2/3} \quad \text{-- énergie de surface} \\
 &\quad + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad \text{-- énergie de Coulomb} \\
 &\quad + a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A} \quad \text{-- énergie d'asymétrie} \\
 &\quad - \delta(Z, A) \quad \text{-- énergie d'appariement}
 \end{aligned}$$

$$\text{où } \delta(Z, A) = \begin{cases} +a_p A^{-3/4} & \text{si A et Z pairs} \\ 0 & \text{si A impair} \\ -a_p A^{-3/4} & \text{si A pair et Z impair} \end{cases}$$

N	Z	Nombre noyaux stables
pair	pair	156
pair	impair	48
impair	pair	50
impair	impair	5

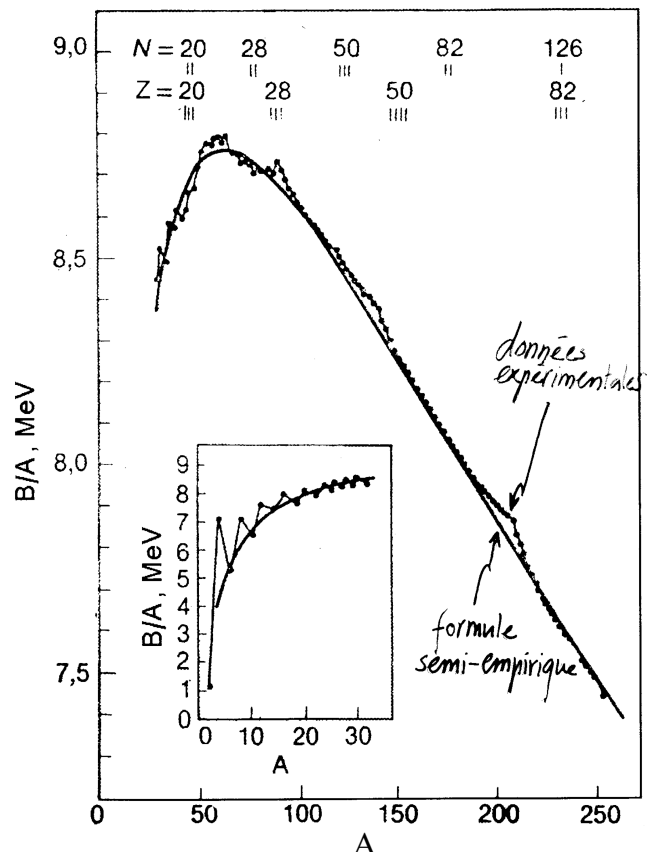
Un nombre pair de protons ou neutrons garantit une meilleure stabilité du noyau

# Formule semi-empirique de la masse (2)

- Ajustement des paramètres sur les masses mesurées des noyaux stables:

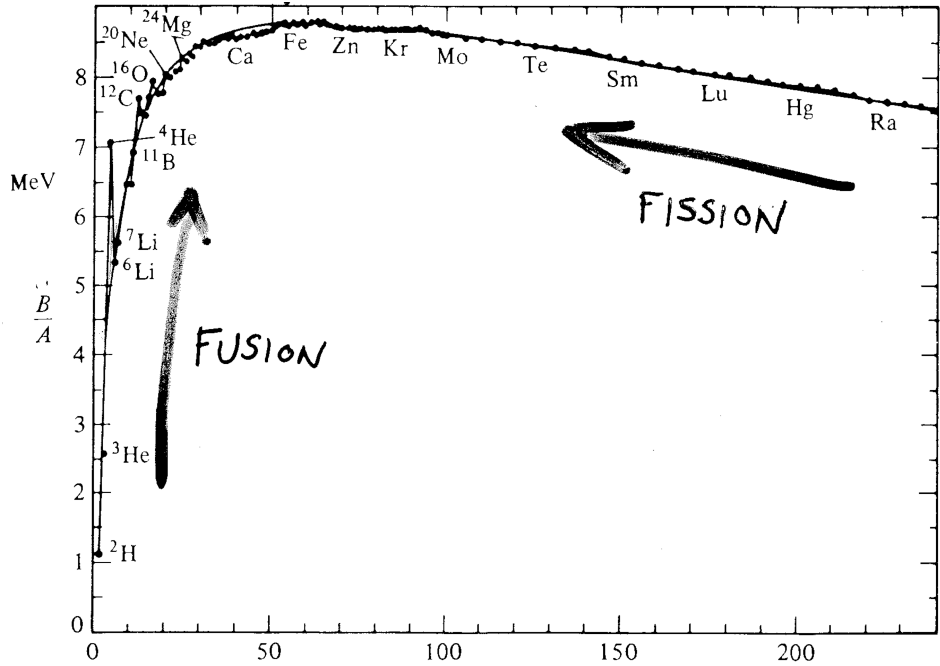
$$\begin{aligned}
 a_v &= 15.75 \text{ MeV} \\
 a_s &= 17.8 \text{ MeV} \\
 a_c &= 0.71 \text{ MeV} \\
 a_a &= 23.7 \text{ MeV} \\
 a_p &= 34 \text{ MeV}
 \end{aligned}$$

- Accord relativement bon, mais loin d'être parfait
  - excès d'énergie de liaison pour N, Z = 20, 28, 50, 82, 126



# Energie de liaison par nucléon (1)

$B/A \approx \text{constante}$   
 $\approx 8.5 \text{ MeV}$   
 (pour  $A > 12$ )

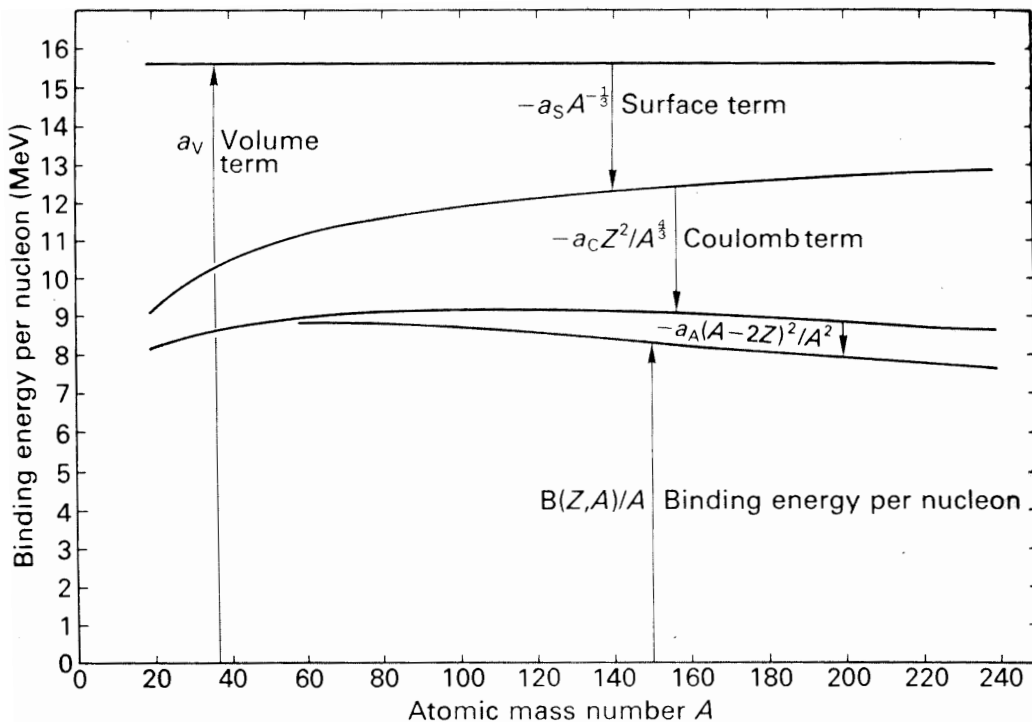


$^{56}\text{Fe}$  = noyau dans lequel les nucléons sont le plus liés  
 = isotope le plus abondant (avec le Si) pour  $A \geq 20$

# Energie de liaison par nucléon (2)

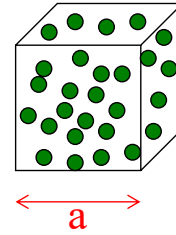
- Formule semi-empirique

$$\frac{B(Z, A)}{A} = a_v - a_s A^{-1/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{4/3}} - a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A^2} + \frac{\delta}{A}$$



# Modèle du gaz de Fermi (1)

- $Z$  protons et  $N$  neutrons
  - sans interaction entre eux
  - confinés dans une boîte (= noyau)
  - respectant le principe d'exclusion
- Paramètre empirique du modèle:  
 $a =$  dimension de la boîte



- Pour chaque nucléon:
  - fonction d'onde  $\psi = \psi(x, y, z)$  avec  $\begin{cases} \int_{\text{boîte}} |\psi|^2 dx dy dz = 1 \\ \psi = 0 \text{ sauf dans la boîte} \end{cases}$
  - hamiltonien  $H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$
  - équation de Schrödinger (aux valeurs propres)  $H\psi = T\psi$

# Modèle du gaz de Fermi (2)

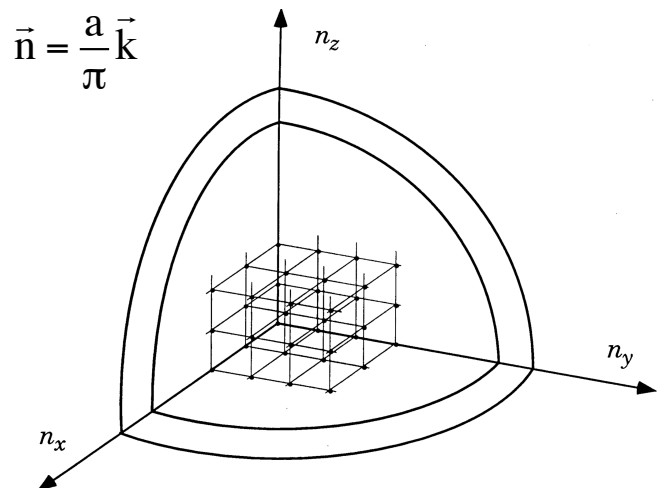
Spectre d'énergie:

$$T = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{a^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \text{ où } n_x, n_y, n_z \text{ entiers}$$

Nombre d'états avec module de  $\vec{n}$  entre  $n$  et  $n+dn$   
 = nombre d'états avec module de  $\vec{k}$  entre  $k$  et  $k+dk$ :

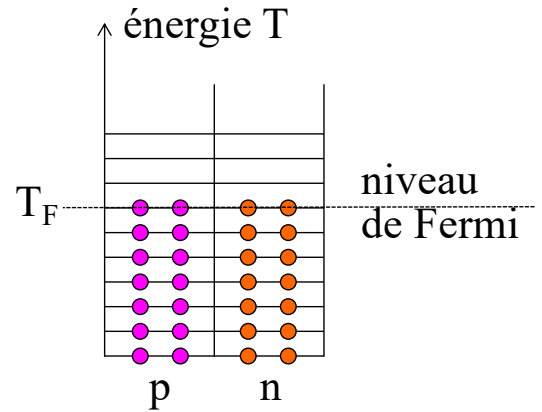
$$\begin{aligned} du(k) &= \frac{1}{8} \text{coquille} = \frac{1}{8} 4\pi n^2 dn \\ &= \frac{1}{8} 4\pi \left(\frac{a}{\pi}\right)^3 k^2 dk = \frac{a^3}{2\pi^2} k^2 dk \end{aligned}$$

$$du(k) = \frac{\Omega}{2\pi^2} k^2 dk \text{ où } \Omega = \text{volume de la boîte}$$



# Modèle du gaz de Fermi (3)

- Principe d'exclusion de Pauli:
  - 2 protons + 2 neutrons par niveau d'énergie (spin 1/2)
- Pour un noyau symétrique avec  $Z = N = A/2$ :
  - nombre d'états tels que le module de  $k$  soit inférieur à  $k_F$



$$\frac{A}{4} = u(k_F) = \int_0^{k_F} \frac{\Omega}{2\pi^2} k^2 dk = \frac{\Omega}{6\pi^2} k_F^3 = \frac{4}{3} \frac{\pi R^3}{6\pi^2} k_F^3 = \frac{2R^3}{9\pi} k_F^3$$

$$\Rightarrow k_F = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{A^{1/3}}{R} \approx \frac{3}{2r_0} \Rightarrow \begin{cases} k_F \approx 1.27 \text{ fm}^{-1} \\ p_F = \hbar k_F \approx 250 \text{ MeV}/c \\ T_F = \hbar^2 k_F^2 / (2m) \approx 33 \text{ MeV} \end{cases}$$

$r_0 = 1.2 \text{ fm}$   
paramètre empirique

constantes pour tous les noyaux !

# Modèle du gaz de Fermi (4)

- Energie cinétique moyenne d'un nucléon dans le noyau:

$$\langle T \rangle = \frac{\int_0^{A/4} T du}{\int_0^{A/4} du} = \dots = \frac{3}{5} T_F \approx 20 \text{ MeV}$$

- Energie de séparation  $S$  du nucléon le moins lié:

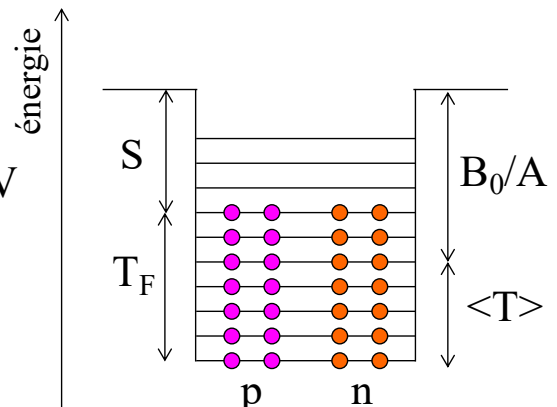
$S \approx 6 \text{ MeV}$   
~ constante pour tous les noyaux  
paramètre empirique

- Energie de liaison moyenne d'un nucléon:

$$\frac{B_0}{A} = T_F + S - \langle T \rangle \approx 33 + 6 - 20 = 19 \text{ MeV}$$

- Energie de liaison totale du noyau:

$$B_0 = a_v A \quad \text{où } a_v = 19 \text{ MeV}$$



# Modèle du gaz de Fermi (5)

- Energie de liaison brute:  $B_0 = a_v A$  où  $a_v = 19 \text{ MeV}$

- Corrections:

- ① Energie de répulsion coulombienne entre les protons

$$E_C = a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad \text{où } a_c \approx 0.72 \text{ MeV}$$

- ② Energie d'asymétrie (pour N différent de Z)

$$E_a = a_a \frac{(N - Z)^2}{A} \quad \text{où } a_a \approx 11 \text{ MeV}$$

- ③ Energie de surface

$$E_s = a_s A^{2/3} \quad \text{où } a_s \approx 16 \text{ MeV}$$

- Energie de liaison corrigée:

$$B = B_0 - E_C - E_a - E_s$$