

Relativité restreinte (rappels)

Relativité restreinte

$\xrightarrow{v/c \ll 1}$

Mécanique newtonienne

Postulats

$c = \text{constante}$
 $(c\Delta t)^2 - (\overline{\Delta x})^2$ invariant

temps et espace absolus
 Δt et $|\overline{\Delta x}|$ invariants

Grandeurs physiques

$$\vec{\beta} = \vec{v}/c, \quad \gamma = (1 - \vec{\beta}^2)^{-1/2}$$

$$\vec{p} = m\gamma\vec{\beta}c \quad \rightarrow \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

$$T = mc^2(\gamma - 1) \quad \rightarrow \quad T = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E = mc^2 + T = m\gamma c^2 \quad \rightarrow \quad E = E^{\text{interne}} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\vec{\beta} = \vec{p}c/E \quad \rightarrow \quad v = 2T/p$$

$$E^2 - \vec{p}^2c^2 = m^2c^4 \quad \rightarrow \quad T = \vec{p}^2 / (2m)$$

Lois physiques

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

conservation de \vec{p}
 conservation de E

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

conservation de \vec{p}
 conservation de E

Relativité restreinte (rappels)

- Energie potentielle de masse (Einstein, 1905): $E_{\text{masse}} = mc^2$

- Energie totale: $E = T + E_{\text{masse}} = mc^2(\gamma - 1) + mc^2 \Rightarrow E = m\gamma c^2$

- Vitesse d'une particule: $p = m\gamma\beta c$ et $E = m\gamma c^2 \Rightarrow \beta = \frac{pc}{E}$

- Relation entre énergie, quantité de mouvement et masse:

$$1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow E^2 - E^2\beta^2 = \frac{E^2}{\gamma^2} \Leftrightarrow E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$

- Masse nulle \Leftrightarrow vitesse c : $m = 0 \Leftrightarrow E = pc \Leftrightarrow \beta = 1$

- Unités:

$$\begin{array}{l} E \text{ en GeV} \\ pc \text{ en GeV} \Rightarrow p \text{ en GeV}/c \\ mc^2 \text{ en GeV} \Rightarrow m \text{ en GeV}/c^2 \end{array}$$

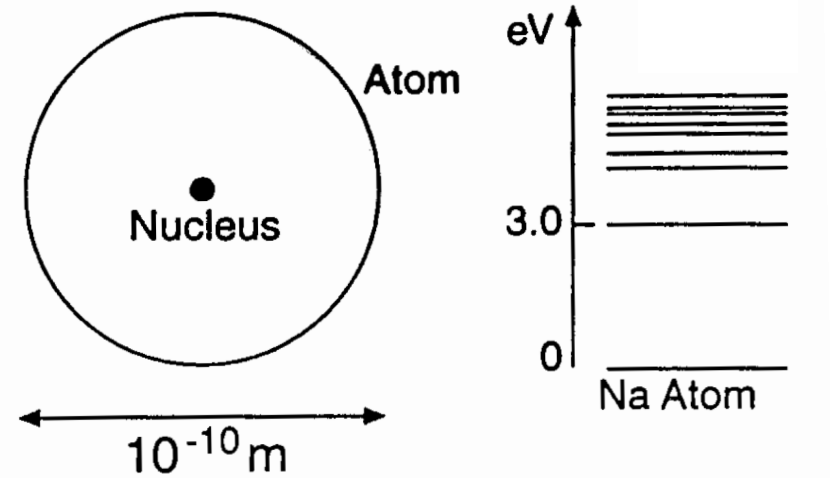
(on pose parfois $c=1$)

Dimensions et énergies (échelles)

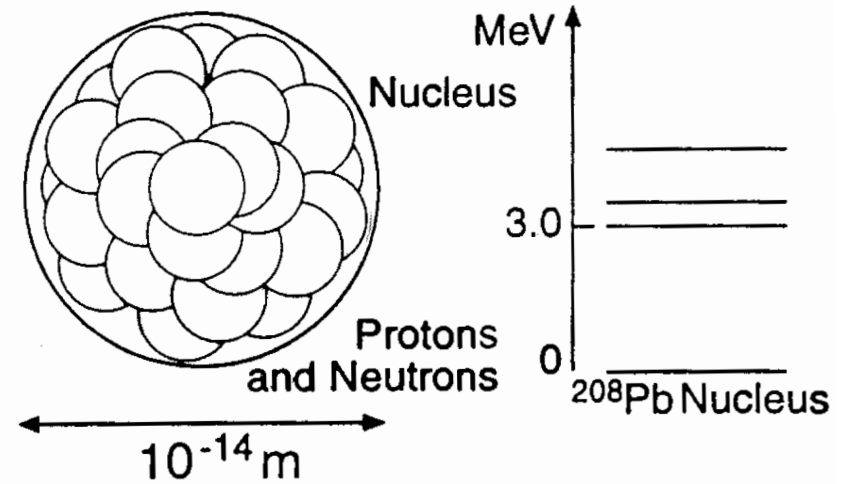
à savoir
par coeur

Les électrons et les quarks ont une taille $< 10^{-19}$ m et sont considérés comme des constituants fondamentaux de la matière

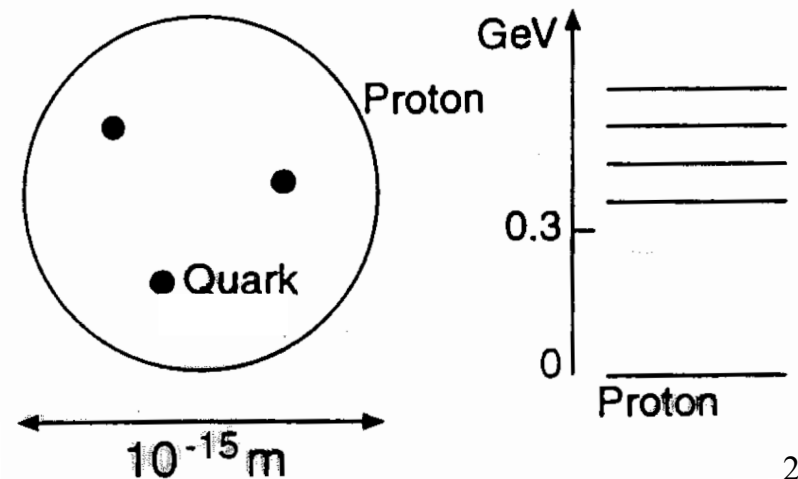
Atome
(forces é.m.)
 $\text{Å} = 10^{-10}$ m
eV



Noyau
(forces nucléaires)
 10^{-14} m
MeV



Nucléon
(forces de couleur)
fm = 10^{-15} m
GeV

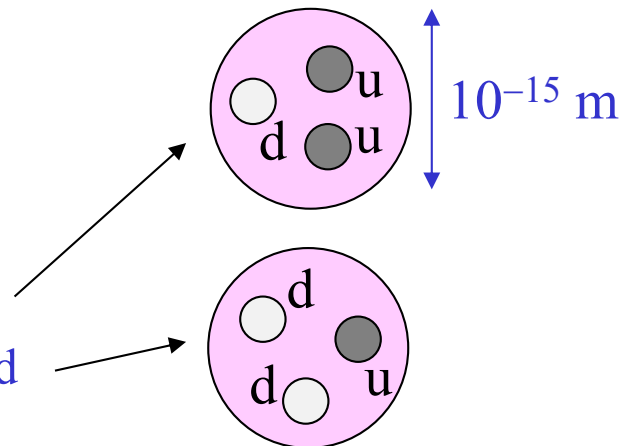


Constituants fondamentaux de la matière (fermions de spin $\frac{1}{2}$)

- Toute la matière connue est formée de combinaisons de 6 leptons et 6 quarks
- Pour chacune de ces 12 particules, il existe une anti-particule de charge électrique opposée (anti-matière)
- Ces constituants élémentaires n'ont pas de structure connue

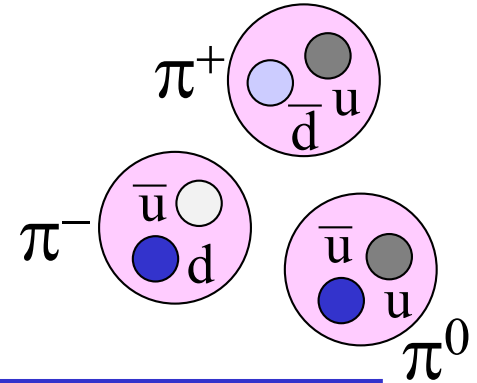
| | | | | Charge électrique [e] | Charge de couleur |
|---------|------------------|--------------------|---------------------|-----------------------|-------------------|
| Leptons | électron e | muon μ | tau τ | -1 | non |
| | neutrino ν_e | neutrino ν_μ | neutrino ν_τ | 0 | |
| Quarks | up u | charm c | top t | +2/3 | oui |
| | down d | strange s | bottom b | -1/3 | |

- La matière courante (stable) est formée seulement de trois types de particules élémentaires: e, u, d
 - Chaque atome contient des électrons et un noyau
 - Les noyau est fait de protons et de neutrons
 - Un proton est une combinaison de quarks u, u et d
 - Un neutron est une combinaison de quarks u, d et d



Particules-forces

- Les forces entre particules de matière et d'antimatière s'exercent par l'échange de particules-forces (bosons de spin entier)



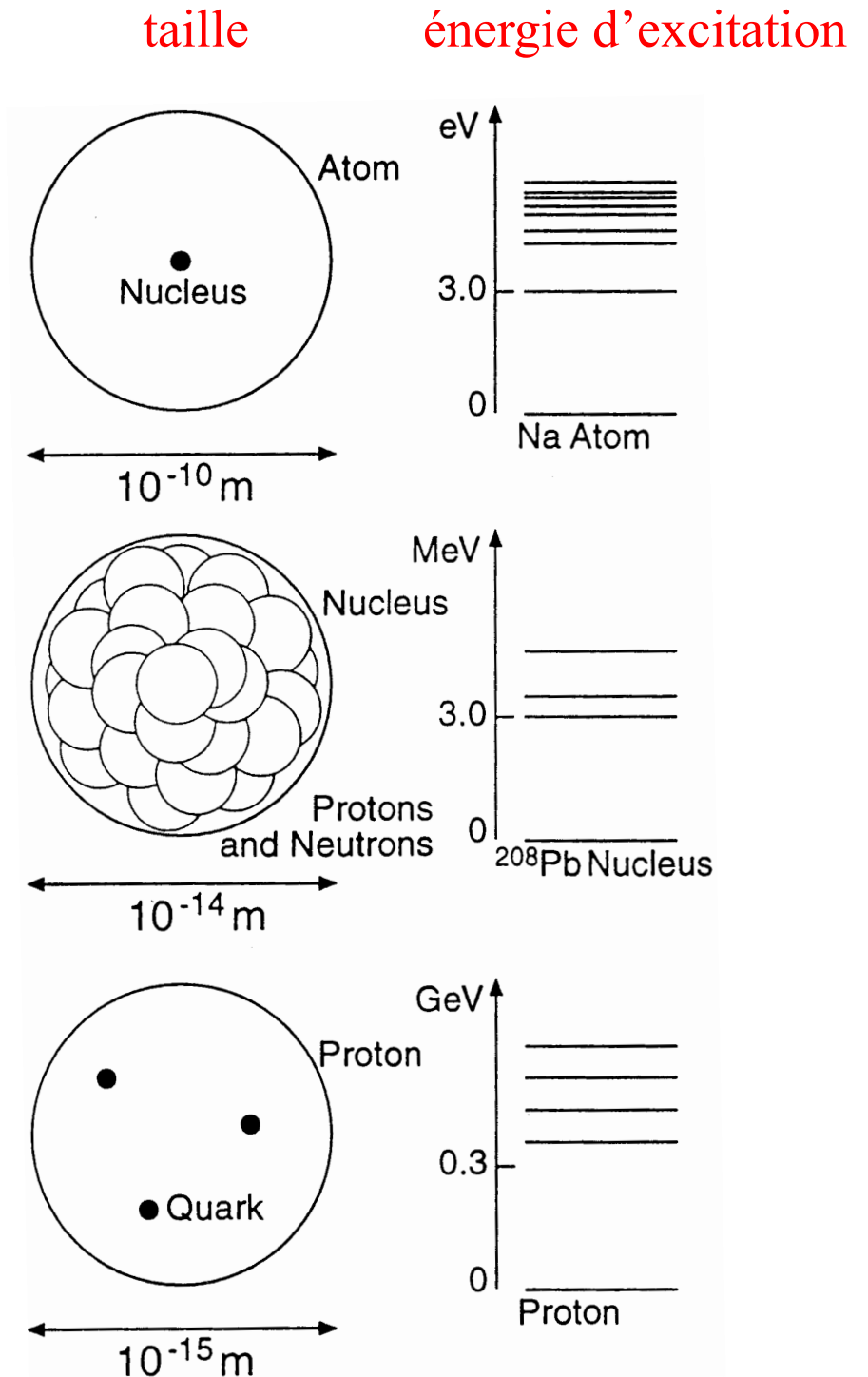
Modèle Standard
de la physique
des particules

| Interaction | Bosons d'échange | Particules sensibles |
|---|-----------------------------|---|
| Force de couleur [→ force forte] | 8 gluons [mésons π] | seulement quarks & gluons [neutrons, protons, ...] |
| Electromagnétisme | photon γ | particules chargées électriquement |
| Force faible | W^+, W^-, Z^0 | toutes |
| Interaction de Higgs | H | particules massives |
| | | |
| Gravitation | graviton | toutes |

- Bosons W et Z découverts en 1983
- Boson de Higgs découvert en 2012
- Ondes gravitationnelles découvertes en 2016

Structures ...

- Physique atomique:
 - force électromagnétique
 - atomes formé d'un noyau et d'électrons
 - Ångström, eV
- Physique nucléaire:
 - force nucléaire forte
 - noyaux formés de nucléons
 - ~10 fm, MeV
- Physique des particules élémentaires:
 - force de couleur
 - hadrons formés de quarks
 - fm, GeV



Nucléon (= proton ou neutron)

- **Le nucléon a un spin $s = 1/2$**
 - Espace des états de spin de dimension $2s+1 = 2$
 - Base de l'espace des états de spin $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$
formée d'états propres de \vec{s}^2 et s_z

$$\begin{aligned}\vec{s}^2|\uparrow\rangle &= s(s+1)\hbar^2|\uparrow\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\uparrow\rangle & s_z|\uparrow\rangle &= +\frac{1}{2}\hbar|\uparrow\rangle \\ \vec{s}^2|\downarrow\rangle &= s(s+1)\hbar^2|\downarrow\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\downarrow\rangle & s_z|\downarrow\rangle &= -\frac{1}{2}\hbar|\downarrow\rangle\end{aligned}$$

- **Le nucléon est un fermion**
 - il obéit à la statistique de Fermi-Dirac,
et donc au principe d'exclusion de Pauli

En mécanique quantique, deux particules identiques sont indistinguables. **L'état quantique d'un système de deux particules identiques doit être soit antisymétrique (cas des fermions) soit symétrique (cas des bosons) sous l'échange des deux particules.**

Systeme de deux nucleons de spin 1/2

- Base de l'espace de états de spin de dim. 4: $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$
 - pas états propres du spin total $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$
- Nouvelle base d'états propres du spin total: $\{|S; M_S\rangle\}$, $S = 0, 1$, $-S \leq M_S \leq S$
 $M_S =$ valeur propre de S_z/\hbar

$$|0; 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

état singulet $S=0$, antisymétrique

$$|1; +1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$$

$$|1; 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$$

triplet d'états $S=1$, symétriques
sous l'échange des deux nucléons

$$|1; -1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$$

ℓ est le moment cinétique orbital
relatif entre les deux nucléons

Si l'état de mouvement est symétrique (par ex. $\ell=0$)

- un système pp ou nn (fermions identiques) doit être dans un état antisymétrique, donc avoir $S=0$ ($S=1$ interdit)
- un système pn (fermions différents) peut avoir $S=0$ ou $S=1$

Interaction nucléon-nucléon: faits d'expérience

- Deuton:



le seul système lié de deux nucléons est le système pn dans l'état $S=1$ et $\ell=0$

⇒

le force entre un proton et un neutron dépend du spin

- Indépendance de charge des forces nucléaires:

- si les deux nucléons sont dans le même état de mouvement relatif et de spin total, et si on ignore les forces de Coulomb, alors

force entre p et p = force entre n et n = force entre p et n

- de plus:

$$m_p \simeq m_n$$

⇒

Le proton et le neutron sont très semblables; ils seraient indiscernables si la seule force en jeu était la force nucléaire forte

la force é.m.
“lève la dégénérescence”

Isospin du nucléon

- Le nucléon a un isospin $I = 1/2$

- Le nucléon a $2I+1 = 2$ états de charge possible

- état proton $|p\rangle$
 - état neutron $|n\rangle$
- } “doublet d’isospin”

- Espace des états d’isospin de dimension $2I+1 = 2$

- Base de l’espace des états d’isospin $\{|p\rangle, |n\rangle\}$
formée d’états propres de \vec{I}^2 et I_3

$$\vec{I}^2 |p\rangle = I(I+1) |p\rangle = \frac{3}{4} |p\rangle \quad I_3 |p\rangle = +\frac{1}{2} |p\rangle$$

$$\vec{I}^2 |n\rangle = I(I+1) |n\rangle = \frac{3}{4} |n\rangle \quad I_3 |n\rangle = -\frac{1}{2} |n\rangle$$

même
formalisme
que le spin

- opérateur de charge pour le nucléon: $Q = I_3 + 1/2$

$$Q |p\rangle = +1 |p\rangle \quad \text{valeur propre } +1$$

$$Q |n\rangle = 0 |n\rangle \quad \text{valeur propre } 0$$

Composition de deux isospins $\frac{1}{2}$

- Même formalisme que pour la composition de deux spins $\frac{1}{2}$

- Isospin total:

$$\vec{I} = \vec{I}^{(1)} + \vec{I}^{(2)}$$

- Les états propres de \vec{I}^2 et I_3 forment une base de l'espace des états d'isospin

$$\{ |I; M_I\rangle \}, \quad I = 0, 1, \quad -I \leq M_I \leq I$$

$M_I =$ valeur propre de I_3

$$|0; 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|pn\rangle - |np\rangle)$$

état singulet $I=0$, antisymétrique

$$|1; +1\rangle = |pp\rangle$$

$$|1; 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|pn\rangle + |np\rangle)$$

triplet d'états $I=1$, symétriques
sous l'échange des deux nucléons

$$|1; -1\rangle = |nn\rangle$$

Systeme de deux nucleons

- Etat de spin $|S; M_S\rangle$, avec $S = 0$ ou 1
- Etat d'isospin $|I; M_I\rangle$, avec $I = 0$ ou 1
- Etat de mouvement relatif $|\psi\rangle$
- L'etat complet $|\psi\rangle \otimes |S; M_S\rangle \otimes |I; M_I\rangle$ doit etre antisymetrique pour des fermions
 - Cas $\ell=0$ ($|\psi\rangle$ symetrique): 6 etats internes possibles

$$\begin{array}{l}
 \underbrace{|S = 0; M_S = 0\rangle}_{\text{antisym.}} \otimes \underbrace{|I = 1; M_I\rangle}_{\text{sym.}} \\
 \left\{ \begin{array}{l} |0;0\rangle \otimes |1;+1\rangle \\ |0;0\rangle \otimes |1; 0\rangle \\ |0;0\rangle \otimes |1;-1\rangle \end{array} \right. \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \otimes |pp\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|pn\rangle + |np\rangle) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \otimes |nn\rangle \end{array} \\
 \\
 \underbrace{|S = 1; M_S\rangle}_{\text{sym.}} \otimes \underbrace{|I = 0; M_I = 0\rangle}_{\text{antisym.}} \\
 \left\{ \begin{array}{l} |1;+1\rangle \otimes |0;0\rangle \\ |1; 0\rangle \otimes |0;0\rangle \\ |1;-1\rangle \otimes |0;0\rangle \end{array} \right. \begin{array}{l} |\uparrow\uparrow\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|pn\rangle - |np\rangle) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|pn\rangle - |np\rangle) \\ |\downarrow\downarrow\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|pn\rangle - |np\rangle) \end{array}
 \end{array}$$

Interaction forte et isospin

- Interaction dépend de l'isospin total
 - état lié pn, avec $\ell=0$ et $S=1 \Rightarrow I=0$
 - états pp et nn ont nécessairement $I=1$ puisque $I_3 = \pm 1$;
or pp ou nn n'est pas un état lié

| Systeme avec $\ell=0$ | I | M_I | S | |
|--------------------------|---|-------|---|--|
| pp | 1 | +1 | 0 | même force entre les deux nucléons |
| pn | 1 | 0 | 0 | |
| nn | 1 | -1 | 0 | |
| pn (deuton) | 0 | 0 | 1 | force différente |

Les forces nucléaires:

- peuvent dépendre de I
- sont indépendantes de M_I
- conservent l'isospin

indépendance de charge

invariance par rotation dans l'espace d'isospin (ou espace de charge)

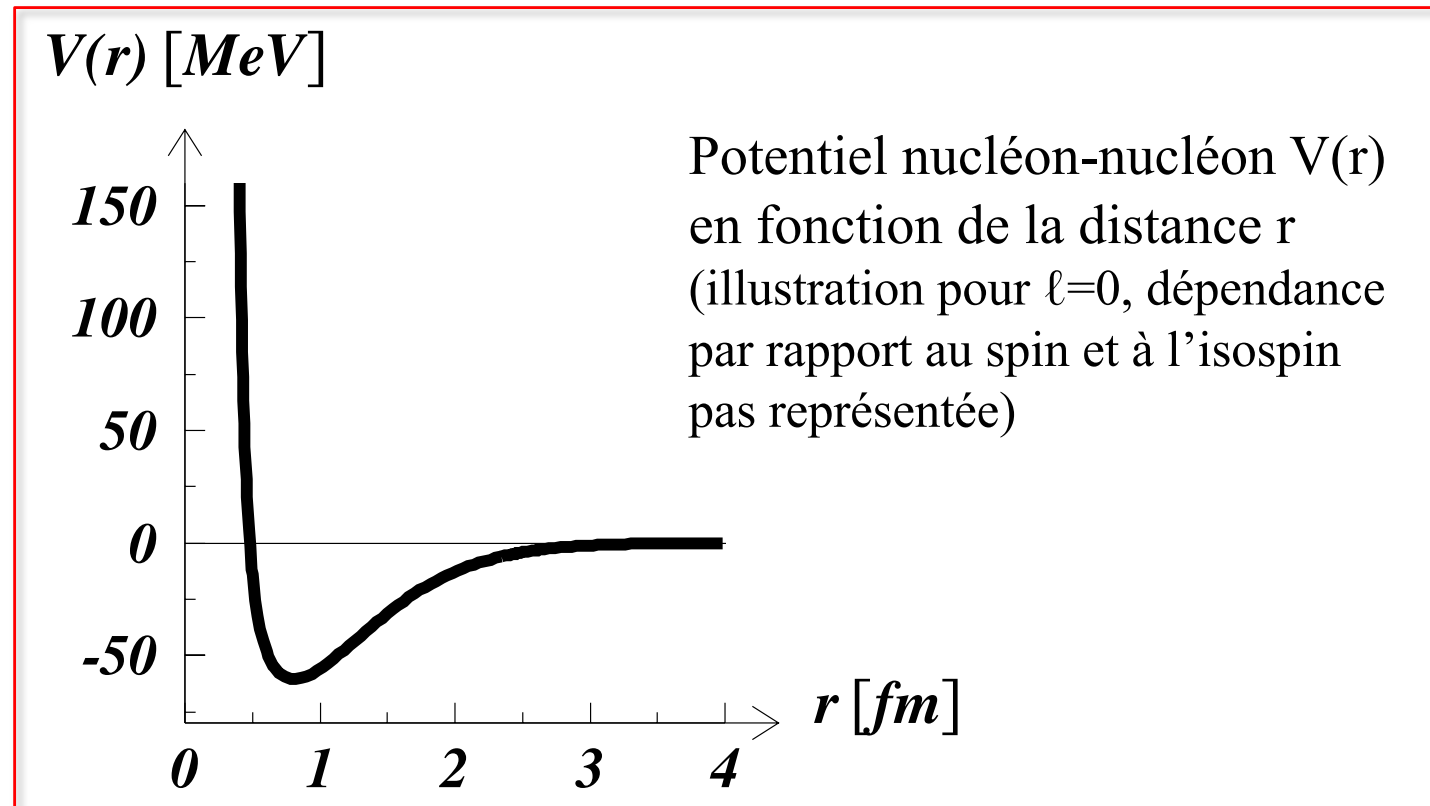
$\Leftrightarrow \vec{I}$ conservé

$\Leftrightarrow [H, I_1] = [H, I_2] = [H, I_3] = 0$

NB: les forces é.m et faible ne conservent pas (violent) l'isospin !

Force forte entre deux nucléons

- Force nucléaire forte:
 - globalement attractive, avec portée jusqu'à ~ 2 fm
 - très fortement répulsive en deça de ~ 0.4 fm
 - incompressibilité de la matière nucléaire
 - dépend du spin total et de l'isospin total



Force forte entre deux nucléons (suite)

- Forme générale du potentiel entre deux nucléons, sur la base d'arguments de symétrie et d'invariance:

$$\begin{aligned} V^{(I)}(\vec{r}, \vec{p}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = & V_0^{(I)}(r) \\ & + V_{ss}^{(I)}(r) \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 / \hbar^2 \\ & + V_{\text{tens}}^{(I)}(r) \left[3(\vec{s}_1 \cdot \vec{r})(\vec{s}_2 \cdot \vec{r}) / r^2 - \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \right] / \hbar^2 \\ & + V_{\ell S}^{(I)}(r) (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \cdot \vec{\ell} / \hbar^2 \\ & + V_{\ell s}^{(I)}(r) (\vec{s}_1 \cdot \vec{\ell})(\vec{s}_2 \cdot \vec{\ell}) / \hbar^4 \\ & + V_{ps}^{(I)}(r) (\vec{s}_1 \cdot \vec{p})(\vec{s}_2 \cdot \vec{p}) / (\hbar mc)^2 \end{aligned}$$

I = isospin total

\vec{r} = position relative

\vec{p} = quantité de mouvement relative

$\vec{\ell}$ = $\vec{r} \wedge \vec{p}$ = moment cinétique relatif

\vec{s}_i = spin du nucléon i

Description du noyau

noyau = Z protons + N neutrons = A nucléons

Notation: $\boxed{{}^A_Z X_N}$ ou bien $\boxed{{}^A X}$ où X = symbole chimique

Chaque « espèce nucléaire » (ou noyau) est définie par Z et A

Hypothèses:

- ① la structure des nucléons (quarks) peut être ignorée
 - valable si $E(\text{noyau}) \ll E(\text{nucléon})$
où E = énergie en jeu (liaison, excitation, ...)
- ② le mouvement des nucléons dans le noyau est non-relativiste
 - valable si $\beta(\text{nucléon}) \ll 1$
où $\beta c = \text{vitesse}$

Tableau des isotopes

- « tableau de Mendeleev » de la physique nucléaire
 - nombreux isotopes
 - ~260 isotopes stables

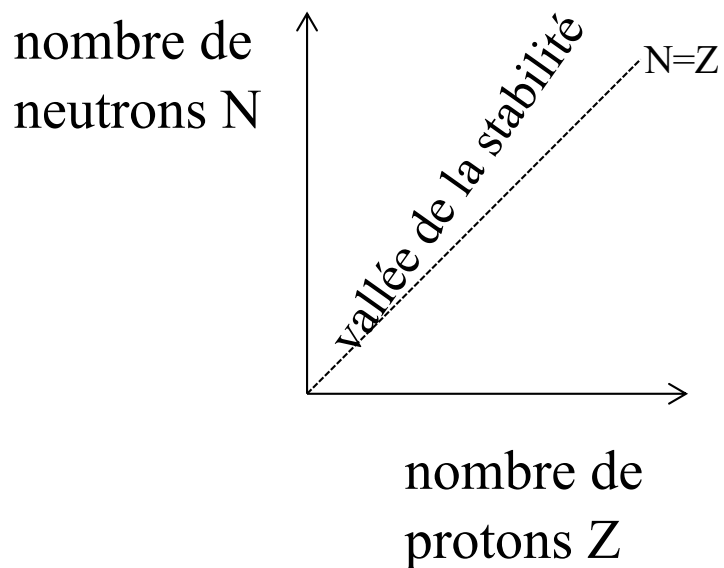
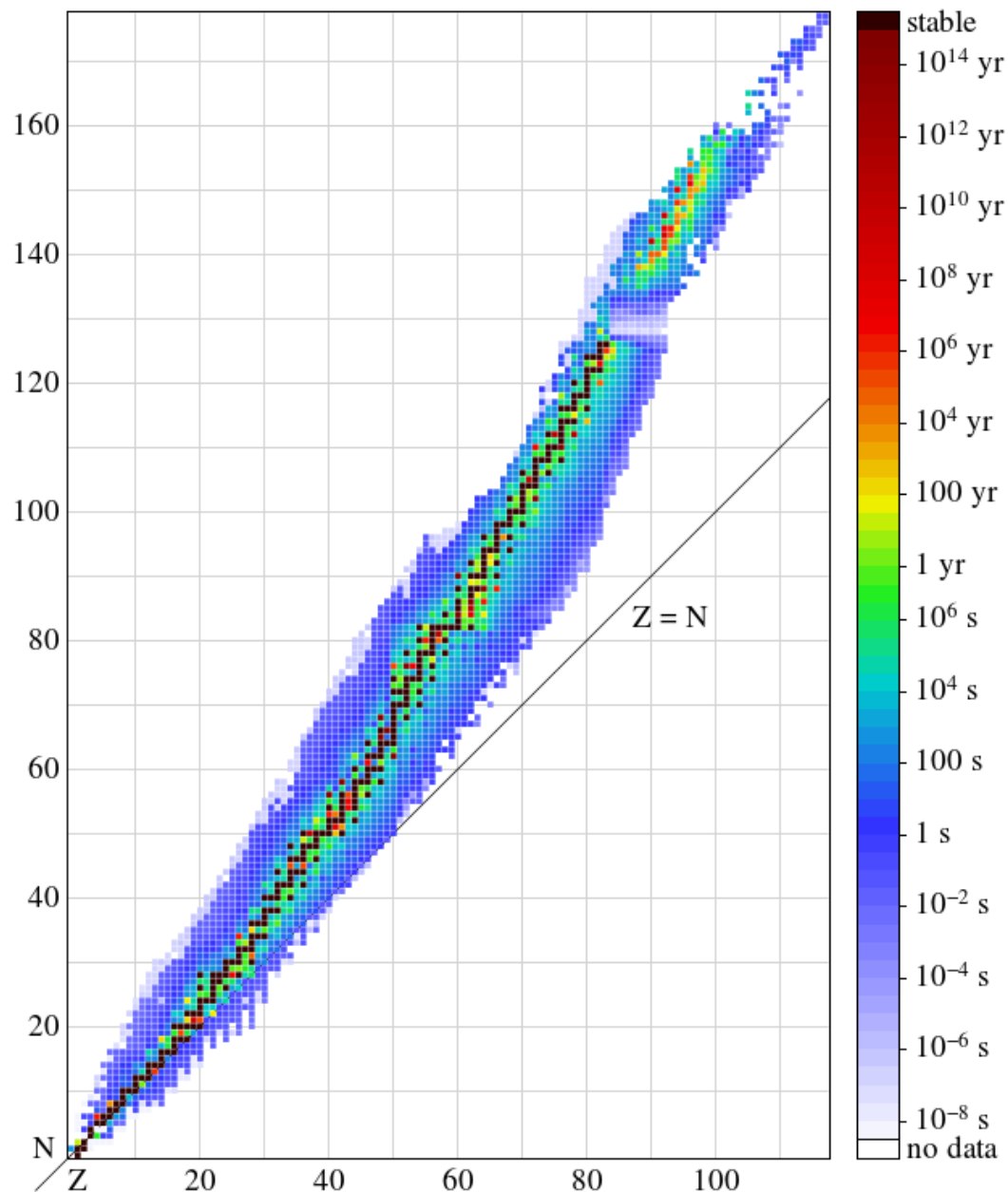


tableau interactif
<http://www.nndc.bnl.gov/nudat3/>



Description du noyau (suite)

□ A résoudre

- système quantique non-relativiste de A nucléons en interaction mutuelle

□ Il suffit de:

- ① déterminer l'hamiltonien
- ② résoudre l'équation de Schrödinger
- ③ tenir compte du principe d'exclusion de Pauli

□ Obstacles:

- interaction forte encore mal connue
- problème à A corps non soluble analytiquement si $A > 3$

→ on doit faire des approximations
et introduire des paramètres empiriques

Modèles nucléaires ...

... de la goutte liquide

... du gaz de Fermi

... à particules indépendantes

... en couches

... collectifs

But:

- Prédiction des propriétés des noyaux —————→ **élaboration**
avec un minimum de paramètres empiriques
- Confrontation avec l'expérience —————→ **justification**

masse, énergie de liaison, stabilité, spin-parité,
moment magnétique dipolaire,
moment électrique quadrupolaire
niveaux excités (énergie, spin-parité, durée de vie ...)

Distribution de charge dans les noyaux

mesurée par
diffusion d'électrons
 $E \sim 200\text{--}500 \text{ MeV}$
(interaction é.m.)

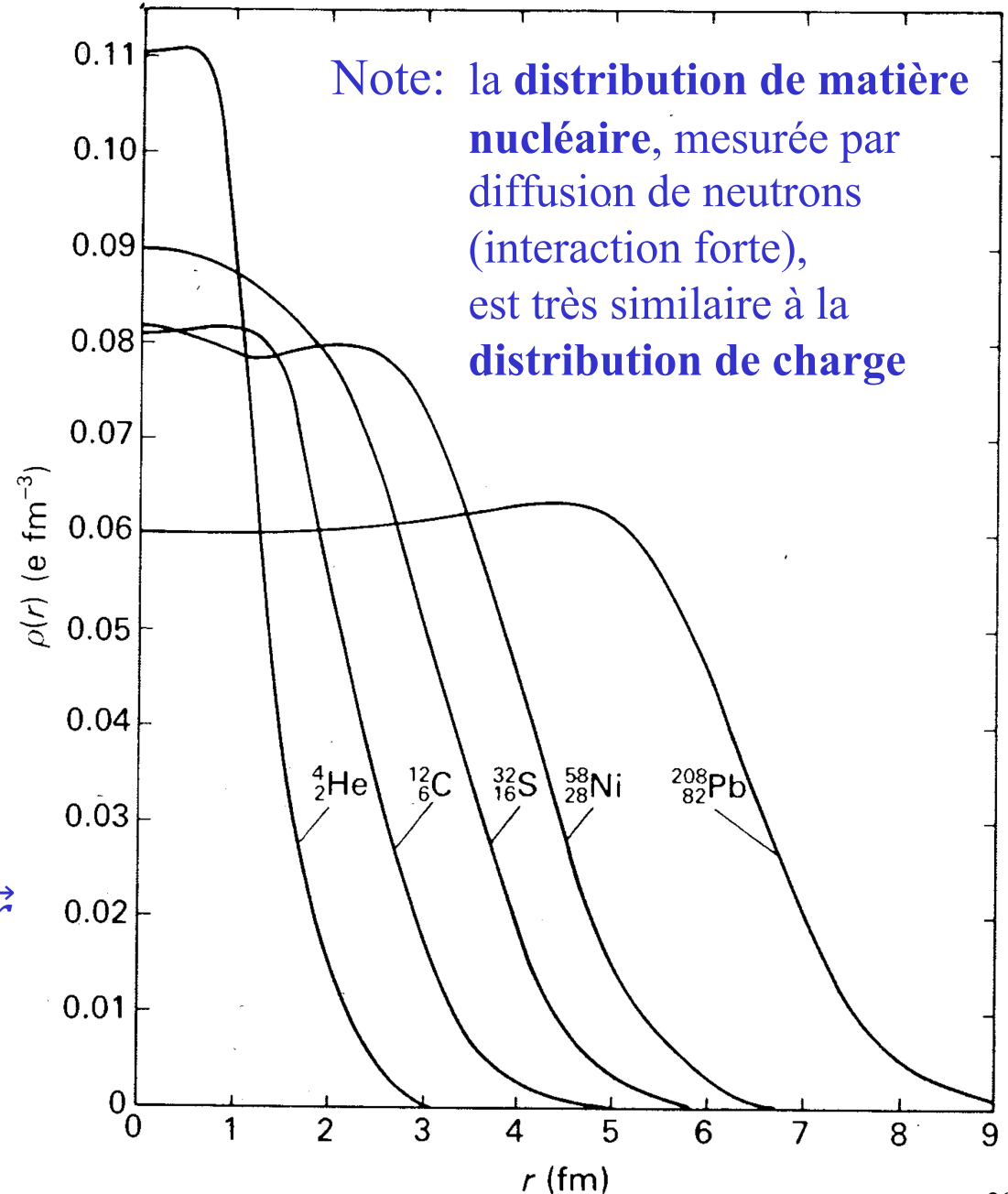
Effet d'une distribution de charge $\rho(\vec{r})$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow |F(q^2)|^2 \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

avec facteur de forme

$$F(q^2) = \frac{1}{Ze} \iiint \rho(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} d^3\vec{r}$$

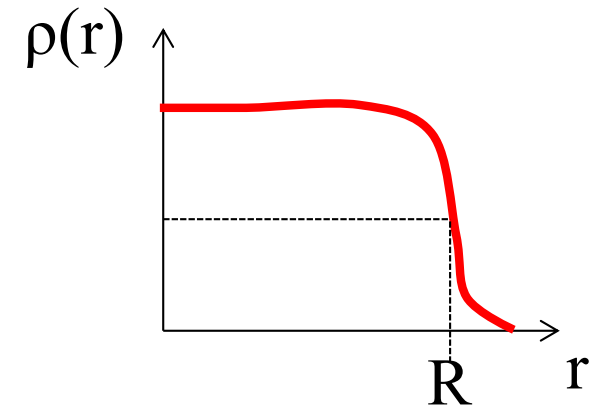
où q = impulsion transférée



Taille des noyaux

- Relation empirique déduite des expériences de diffusion

$$R \approx r_0 A^{1/3} \quad \text{où } r_0 = 1.2 \text{ fm}$$



- Volume du noyau (supposé sphérique): $\Omega = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx \frac{4}{3}\pi r_0^3 A$
- Densité nucléaire à l'intérieur du noyau:

$$\rho = \frac{A}{\Omega} \approx \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} = 0.138 \text{ nucléons / fm}^3 = 1.38 \times 10^{38} \text{ nucléons / cm}^3$$

Volume proportionnel à A
Densité similaire pour tous les noyaux !

Masses nucléaires et atomiques

Noyau ${}^A_Z\text{X}_N$: Z protons + N neutrons = A nucléons

$$\text{masse noyau } {}^A_Z\text{X}_N = m(Z, A) = Zm_p + Nm_n - B(Z, A) / c^2$$

- $m_p = 938.272 \text{ MeV}/c^2 =$ masse du proton
- $m_n = 939.565 \text{ MeV}/c^2 =$ masse du neutron
- $B(Z, A) =$ énergie de liaison du noyau > 0

$$\text{masse atome de } {}^A_Z\text{X}_N = M(Z, A) = m(Z, A) + Zm_e - L(Z) / c^2$$

- $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2 =$ masse de l'électron
- $L(Z) \approx 15.73 Z^{7/3} \text{ eV} =$ énergie de liaison des Z électrons (négligeable)

$$\text{masse atome de } {}^A_Z\text{X}_N = M(Z, A) = Zm_H + Nm_n - B(Z, A) / c^2$$

- $m_H =$ masse de l'atome d'hydrogène $\approx m_p + m_e$

Unité de masse atomique

- Définition de l'unité de masse atomique:

1/12 de la masse d'un atome de carbone 12 ($^{12}_6\text{C}_6$)

$$1 \text{ uma} = 1 \text{ u} = \frac{M(6,12)}{12} \approx 931.494 \text{ MeV} / c^2$$

- Avant la redéfinition de la mole le 20 mai 2019:

$12 \text{ g de } ^{12}\text{C} = 1 \text{ mole de } ^{12}\text{C} = N_A \text{ atomes de } ^{12}\text{C}$
où $N_A =$ nombre d'Avogadro

$$1 \text{ uma} = 1 \text{ u} = 1 \text{ g} / N_A \approx 1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

- Après le 20 mai 2019:

mole redéfinie par $N_A = 6.02214076 \times 10^{23}$ (exactement)
donc

$$1 \text{ uma} = 1 \text{ u} \approx 1 \text{ g} / N_A \approx 1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Modèle de la goutte liquide

Modèle totalement empirique, dû à Von Weizsäcker (1935)

Analogie:

| | | |
|-------------------------|---|-----------------|
| goutte liquide | ↔ | noyau |
| molécules | ↔ | nucléons |
| forces de van der Waals | ↔ | force nucléaire |

- force à courte portée (**saturation**)
 - nucléons en interaction seulement avec leurs plus proches voisins
 - énergie de liaison d'un nucléon dans le noyau indépendante de A
- énergie de liaison diminuée pour les nucléons à la surface; effet proportionnel à l'aire $S = 4\pi R^2 = 4\pi r_0^2 A^{2/3}$ (**tension superficielle de la goutte**)
- **répulsion coulombienne** entre les protons
- **énergie d'asymétrie** et **énergie d'appariement**

Formule semi-empirique de la masse (1)

Von Weizsäcker (1935)

$$\begin{aligned}
 m(Z, A)c^2 &= Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2 - B(Z, A) \\
 &= Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2 \quad \text{masses} \\
 &\quad - a_v A \quad \text{– énergie de volume} \\
 &\quad + a_s A^{2/3} \quad \text{– énergie de surface} \\
 &\quad + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad \text{– énergie de Coulomb} \\
 &\quad + a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A} \quad \text{– énergie d'asymétrie} \\
 &\quad - \delta(Z, A) \quad \text{– énergie d'appariement}
 \end{aligned}$$

$$\text{où } \delta(Z, A) = \begin{cases} +a_p A^{-3/4} & \text{si } A \text{ et } Z \text{ pairs} \\ 0 & \text{si } A \text{ impair} \\ -a_p A^{-3/4} & \text{si } A \text{ pair et } Z \text{ impair} \end{cases}$$

| N | Z | Nombre noyaux stables |
|--------|--------|-----------------------------|
| pair | pair | 156 |
| pair | impair | 48 |
| impair | pair | 50 |
| impair | impair | 5 |

Un nombre pair de protons ou neutrons garantit une meilleure stabilité du noyau

Formule semi-empirique de la masse (2)

- Ajustement des paramètres sur les masses mesurées des noyaux stables:

$$a_v = 15.75 \text{ MeV}$$

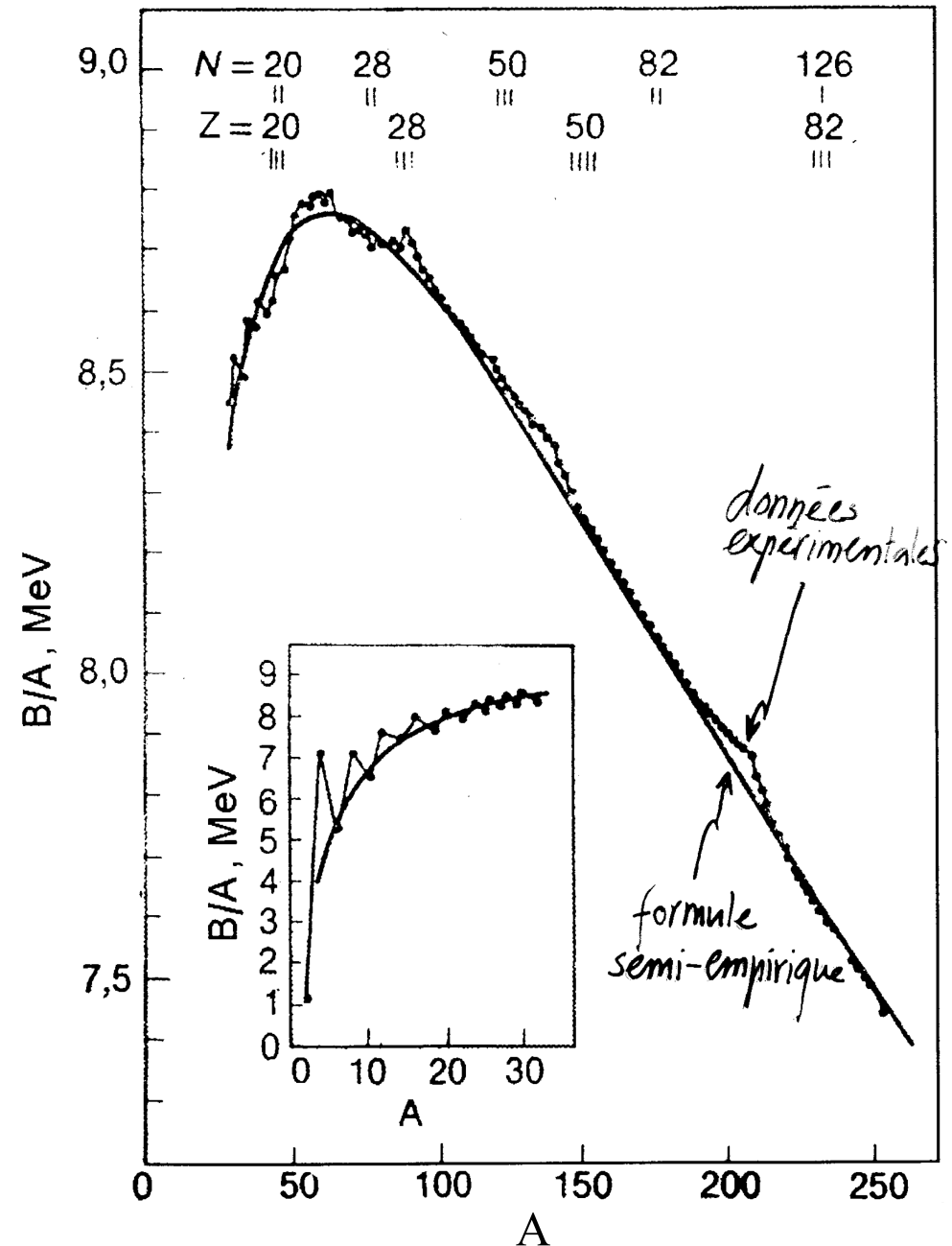
$$a_s = 17.8 \text{ MeV}$$

$$a_c = 0.71 \text{ MeV}$$

$$a_a = 23.7 \text{ MeV}$$

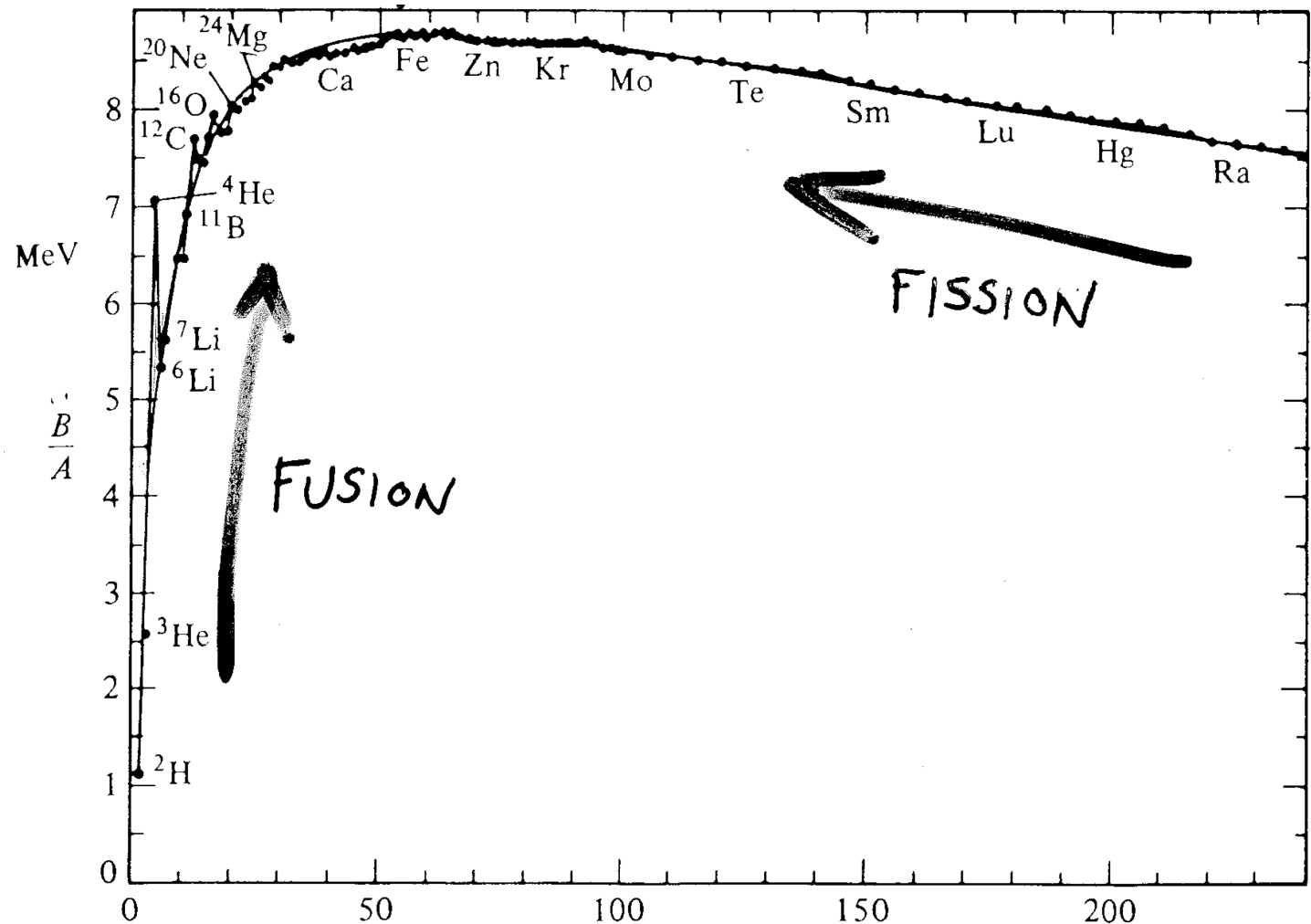
$$a_p = 34 \text{ MeV}$$

- Accord relativement bon, mais loin d'être parfait
 - excès d'énergie de liaison pour $N, Z = 20, 28, 50, 82, 126$



Energie de liaison par nucléon (1)

$B/A \approx \text{constante}$
 $\approx 8.5 \text{ MeV}$
(pour $A > 12$)

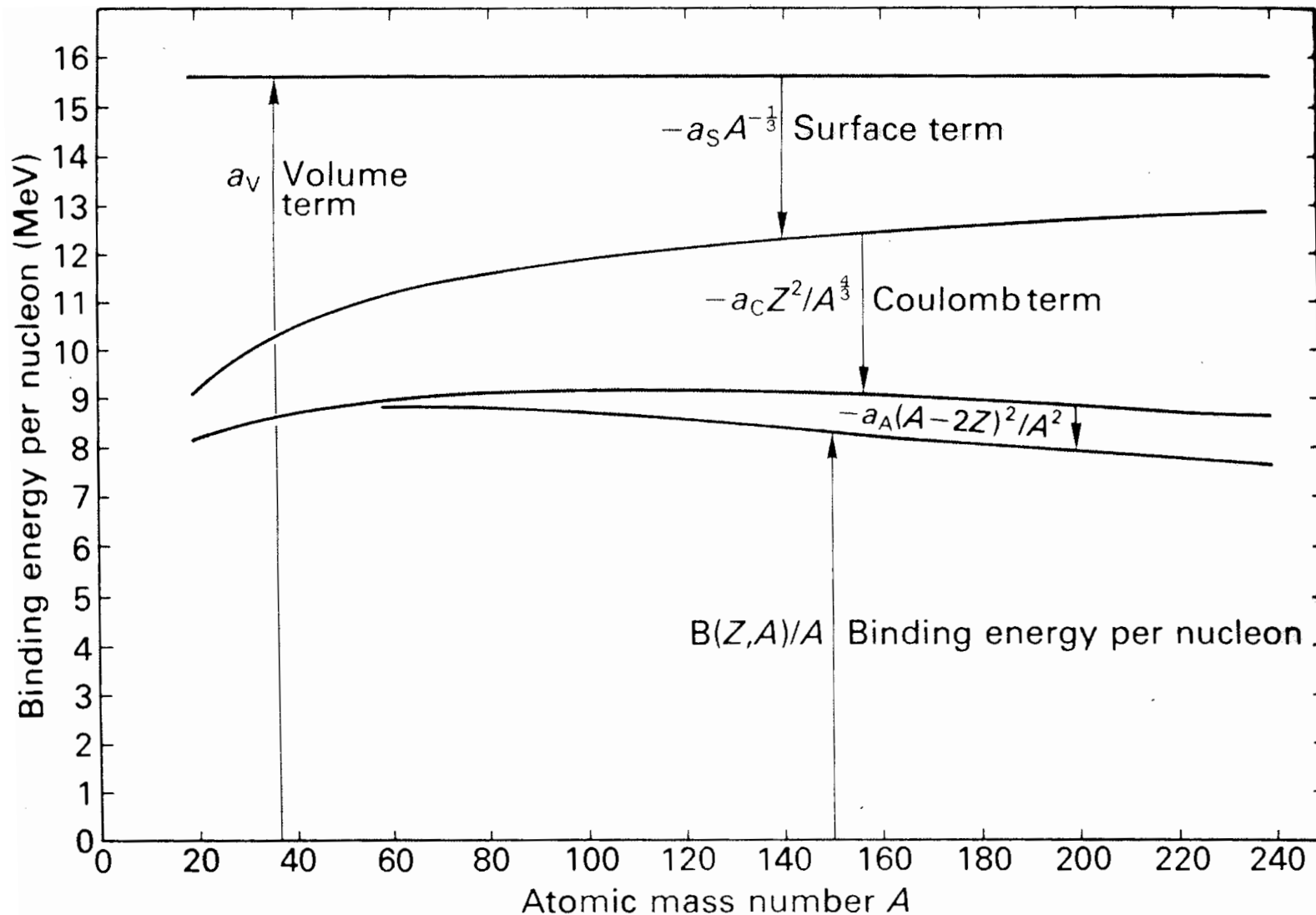


^{56}Fe = noyau dans lequel les nucléons sont le plus liés
= isotope le plus abondant (avec le Si) pour $A \geq 20$

Energie de liaison par nucléon (2)

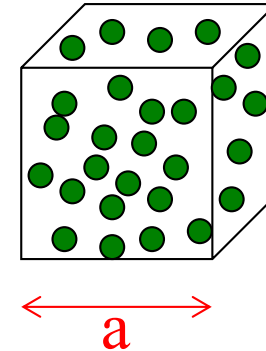
- Formule semi-empirique

$$\frac{B(Z, A)}{A} = a_v - a_s A^{-1/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{4/3}} - a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A^2} + \frac{\delta}{A}$$



Modèle du gaz de Fermi (1)

- Z protons et N neutrons
 - sans interaction entre eux
 - confinés dans une boîte (= noyau)
 - respectant le principe d'exclusion
- Paramètre empirique du modèle:
 $a =$ dimension de la boîte



- Pour chaque nucléon:
 - fonction d'onde $\psi = \psi(x, y, z)$ avec
$$\begin{cases} \int_{\text{boîte}} |\psi|^2 dx dy dz = 1 \\ \psi = 0 \text{ sauf dans la boîte} \end{cases}$$
 - hamiltonien
$$H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$$
 - équation de Schrödinger (aux valeurs propres)
$$H\psi = T\psi$$

Modèle du gaz de Fermi (2)

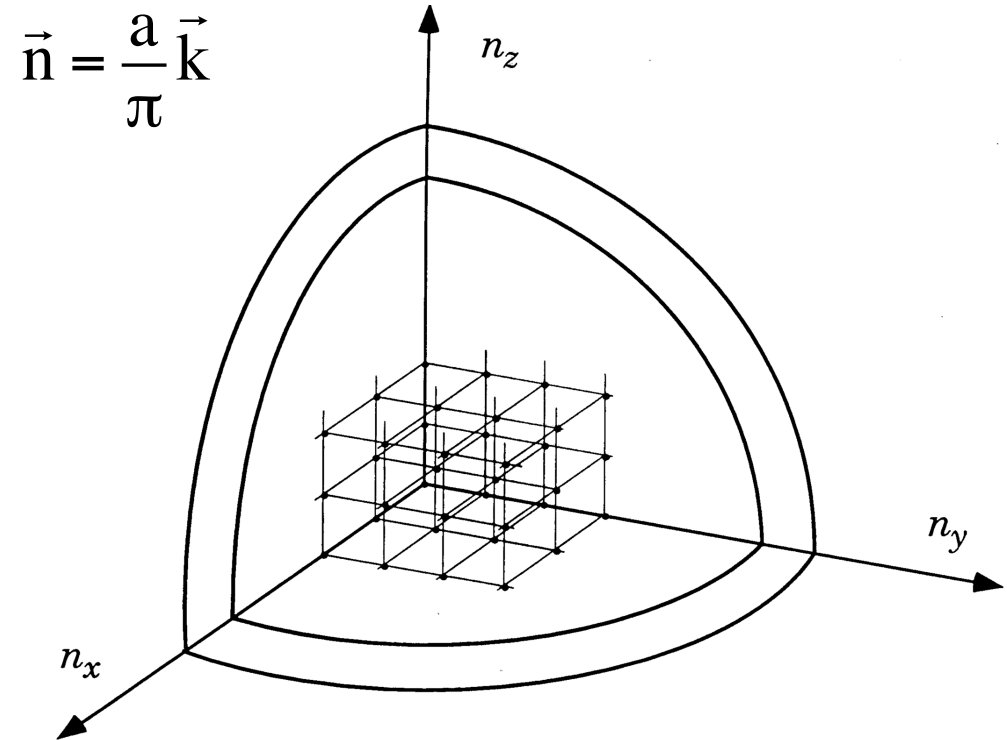
Spectre d'énergie:

$$T = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{a^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad \text{où } n_x, n_y, n_z \text{ entiers}$$

Nombre d'états avec
module de \vec{n} entre n et $n+dn$
= nombre d'états avec
module de \vec{k} entre k et $k+dk$:

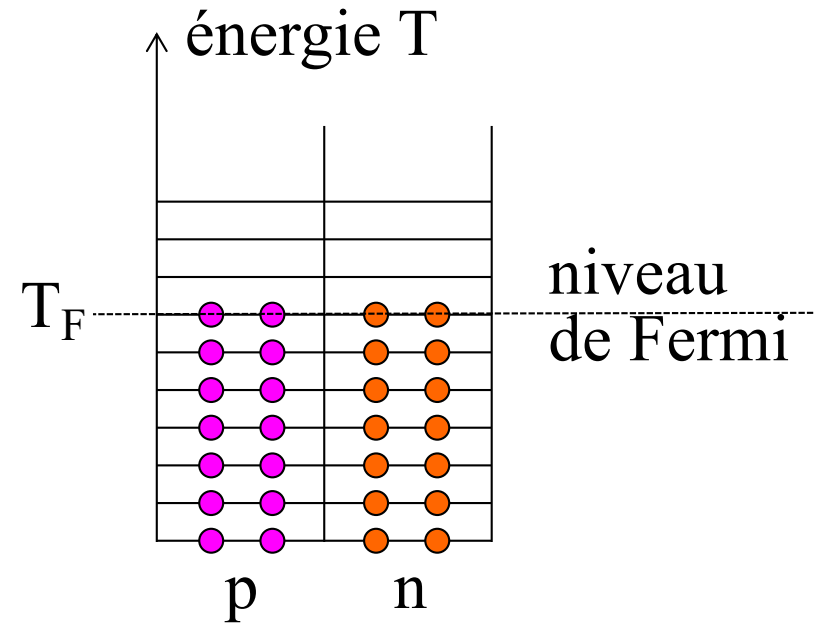
$$\begin{aligned} du(k) &= \frac{1}{8} \text{coquille} = \frac{1}{8} 4\pi n^2 dn \\ &= \frac{1}{8} 4\pi \left(\frac{a}{\pi}\right)^3 k^2 dk = \frac{a^3}{2\pi^2} k^2 dk \end{aligned}$$

$$du(k) = \frac{\Omega}{2\pi^2} k^2 dk \quad \text{où } \Omega = \text{volume de la boîte}$$



Modèle du gaz de Fermi (3)

- Principe d'exclusion de Pauli:
 - 2 protons + 2 neutrons par niveau d'énergie (spin 1/2)
- Pour un noyau symétrique avec $Z = N = A/2$:
 - nombre d'états tels que le module de k soit inférieur à k_F



$$\frac{A}{4} = u(k_F) = \int_0^{k_F} \frac{\Omega}{2\pi^2} k^2 dk = \frac{\Omega}{6\pi^2} k_F^3 = \frac{4}{3} \frac{\pi R^3}{6\pi^2} k_F^3 = \frac{2R^3}{9\pi} k_F^3$$

$$\Rightarrow k_F = \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \frac{A^{1/3}}{R} \approx \frac{3}{2r_0}$$

$$r_0 = 1.2 \text{ fm}$$

paramètre empirique

$$\Rightarrow \begin{cases} k_F \approx 1.27 \text{ fm}^{-1} \\ p_F = \hbar k_F \approx 250 \text{ MeV}/c \\ T_F = \hbar^2 k_F^2 / (2m) \approx 33 \text{ MeV} \end{cases}$$

constantes pour tous les noyaux !

Modèle du gaz de Fermi (4)

- Energie cinétique moyenne d'un nucléon dans le noyau:

$$\langle T \rangle = \frac{\int_0^{A/4} T du}{\int_0^{A/4} du} = \dots = \frac{3}{5} T_F \approx 20 \text{ MeV}$$

- Energie de séparation S du nucléon le moins lié:

$$S \approx 6 \text{ MeV}$$

~ constante pour tous les noyaux

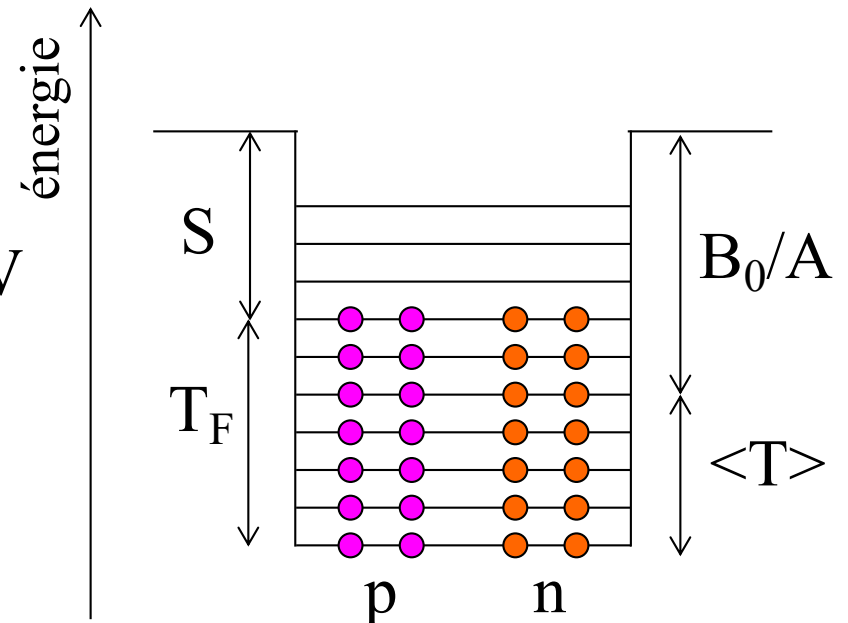
paramètre empirique

- Energie de liaison moyenne d'un nucléon:

$$\frac{B_0}{A} = T_F + S - \langle T \rangle \approx 33 + 6 - 20 = 19 \text{ MeV}$$

- Energie de liaison totale du noyau:

$$B_0 = a_v A \quad \text{où} \quad a_v = 19 \text{ MeV}$$



Modèle du gaz de Fermi (5)

- Energie de liaison brute: $B_0 = a_v A$ où $a_v = 19 \text{ MeV}$

- Corrections:

- ① Energie de répulsion coulombienne entre les protons

$$E_C = a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad \text{où } a_C \approx 0.72 \text{ MeV}$$

- ② Energie d'asymétrie (pour N différent de Z)

$$E_a = a_a \frac{(N - Z)^2}{A} \quad \text{où } a_a \approx 11 \text{ MeV}$$

- ③ Energie de surface

$$E_s = a_s A^{2/3} \quad \text{où } a_s \approx 16 \text{ MeV}$$

- Energie de liaison corrigée:

$$B = B_0 - E_C - E_a - E_s$$