Résumé de Combinatoire

Ilan Baud †

En combinatoire, on s'intéresse aux combinaisons d'ensembles finis ou, autrement dit, aux configurations de collections finies d'objets. La combinatoire étudie également le dénombrement de ces configurations. Dans ce document, on se concentrera principalement sur la définition et le dénombrement des configurations avec une approche intuitive. Il faut savoir également que certains cas requièrent la contrainte que les objets considérés soient répétés ou non un nombre différent de fois pour chaque objet. Dans ce document, on considérera dans un premier temps que des collections d'objets non-répétés et dans un second temps la possibilité que les objets puissent être répétés.

1 Collection d'objets non-répétés

Dans cette partie du document, on considère des ensembles finis E de cardinal n composés d'objets différents les uns des autres notés x_i où $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Afin de pleinement comprendre la combinatoire, il est sûrement important de bien définir les concepts que l'on va étudier et d'expliquer ensuite la façon de dénombrer.

1.1 Permutation

Définition. La notion de permutation exprime l'idée de réarrangement d'objets. En effet, une permutation d'objets rangés dans un certain ordre correspond à un changement de l'ordre de ces objets. On peut de manière équivalente voir la permutation comme le fait de placer les n objets à disposition dans n cases.

Des exemples de permutations des objets de l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ seraient :

$$(a, b, c, d), \text{ ou } (a, b, d, c), \text{ ou encore } (c, a, d, b). \tag{1.1}$$

Dénombrement. Pour placer les x_i dans n cases sans mettre deux fois le même objet, on doit choisir un élément de E pour la première case et il y a n possibilités. Il y a ensuite $n - 1$ choix possibles pour la deuxième place puisqu'un élément a été assigné à la première place et qu'on ne veut pas de répétition. Il y en a ensuite $n - 2$ pour la troisième, etc. Il n'y a plus qu'un seul choix d'élément pour la dernière place. Donc au total $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$ permutations.

Conclusion. Il y a donc $n!$ permutations différentes de n objets discernables dans n cases.

1.2 Arrangement

1.2.1 Sans remise

Définition. L'arrangement, défini pour tout entier naturel n et tout entier naturel $k \leq n$, est le fait de placer k objets de nos n objets à disposition (les x_i) dans k cases. C'est-à-dire qu'on va faire comme une permutation mais on va volontairement "oublier" des objets lorsque l'on fait un arrangement. On voit ici que la différence avec la permutation est qu'on n'a plus besoin de placer tous les objets. Souvent l'arrangement est résumé en "**choix en tenant compte de l'ordre**".

†. Pour me faire parvenir une erreur ou un commentaire : ilan.baud@epfl.ch.

Exemple. Des exemples d'arrangements des objets de l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ seraient :

$$(a, b), \text{ ou } (a, b, c, d), \text{ ou } (a, c, b, d), \text{ ou encore } (c). \tag{1.2}$$

Notons que souvent on s'intéresse aux arrangements dans le même nombre de cases k. Des exemples arrangements du même ensemble $\{a, b, c, d\}$ dans $k = 3$ cases nous donnerait :

$$(a, b, c), \text{ ou } (a, c, b), \text{ ou } (d, a, c), \text{ ou encore } (d, c, b). \tag{1.3}$$

Dénombrement. En suivant le même chemin de pensée que pour la permutation, on voit que si on veut choisir k objets de nos n objets de notre ensemble de base, on a pour la $1^{\text{ère}}$ case $n - (1 - 1) = n$ différentes possibilités. Pour la $2^{\text{ème}}$ case on a $n-(2-1) = n-1$, pour la $3^{\text{ème}}$ case on a $n-(3-1) = n-2$, etc. On arrête une fois qu'on arrive à la k-ième case (la dernière) où il nous reste $n - (k - 1)$ possibilités. Donc au total $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \ldots \times (n - k + 1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ arrangements.

Note. On peut remarquer que si on a $k = n$ cases, on est exactement dans le même cas que la permutation. On peut donc vérifier si notre façon de compter retrouve bien l'expression qu'on avait pour la permutation :

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!. \tag{1.4}$$

1.2.2 Avec remise

Définition. Un arrangement avec remise représente simplement un arrangement où l'on n'élimine pas l'objet dernièrement pris des éléments que l'on peut tirer. On remarque donc que pour le cas avec remise, le nombre de tirages k peut être plus grand que le nombre d'éléments à tirer n contrairement à un tirage sans remise.

Exemple. Des exemples d'arrangements avec remises de l'ensemble $\{a, b, c\}$ avec $k = 4$ seraient :

$$(a, a, b, c), \text{ ou } (a, b, c, b), \text{ ou } (c, c, a, c), \text{ ou encore } (b, b, b, b). \tag{1.5}$$

Dénombrement. Lorsqu'on tire le premier objet, on a n possibilités. Cet objet étant remis dans le lot, on aura à nouveau n possibilités différentes pour le second tirage. Ainsi, pour k tirages, on a $n \times n \times n \times ... = n^k$ arrangements différents.

1.3 Combinaison

Définition. La combinaison est une façon de choisir un nombre donné d'objets dans E, lorsque les objets sont discernables et que l'on ne se soucie pas de l'ordre dans lequel les objets sont placés ou énumérés. Autrement dit, la combinaison est un cas spécifique de l'arrangement où l'ordre dans lequel apparaissent les objets dans nos k cases ne nous intéresse pas. Si vous avez bien compris les deux concepts précédents, vous pouvez le voir comme un arrangement où les permutations des cases sont considérées équivalentes. Souvent la combinaison est résumée en "**choix sans tenir compte de l'ordre**" et on peut à nouveau distinguer le cas sans et avec remise des éléments tirés.

1.3.1 Sans remise

Exemples. Toutes les combinaison de $k = 3$ tirages de l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ seraient :

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\} \text{ et } \{a, c, d\}. \tag{1.6}$$

La seule combinaison possible pour $k = 4$ serait :

$$\{a, b, c, d\} \tag{1.7}$$

Toutes les combinaison de $k = 1$ tirages de l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ seraient :

$$\{a\},\ \{b\},\ \{c\} \text{ et } \{d\}. \tag{1.8}$$

Dénombrement. Le dénombrement pour une combinaison sans remise découle facilement de ce qui a été discuté ci-dessus en considérant que c'est un arrangement où l'on a compté en trop toutes les permutations des k cases devenues équivalentes pour une combinaison. Ainsi en reprenant le nombre d'arrangements sans remise, on y retire les permutations des k cases :

$$\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{k!} \equiv \binom{n}{k}, \tag{1.9}$$

où l'on a introduit une notation importante de la combinatoire, celle du coefficient binomial.

1.3.2 Avec remise

Exemples. Considérons à nouveau l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$. Si nous choisissons $k = 2$ éléments avec remise (et sans ordre), les combinaisons possibles sont :

$$\{a, a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, c\}, \{c, d\}, \{d, d\}. \tag{1.10}$$

On remarque que contrairement au cas sans remise, il est maintenant possible de sélectionner plusieurs fois le même élément. De manière générale, chaque combinaison correspond à un sous-ensemble de E de taille k.

Dénombrement. On cherche à compter le nombre de façons de choisir k éléments parmi n, avec remise et sans ordre. Cela revient à déterminer combien de solutions entières non négatives admet l'équation

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k, \tag{1.11}$$

où x_i désigne le nombre de fois que l'élément i est choisi. Ce dénombrement spécifique est donné par le *théorème des étoiles et bâtons* que nous nous contenterons d'intuiter.

Théorème des étoiles et bâtons. On représente les k objets à choisir par des *étoiles* $\star$. Puisque nous avons n types d'objets possibles, nous allons séparer ces étoiles en n groupes grâce à $n-1$ séparateurs, appelés *bâtons* $|$.

— Exemple : pour $n = 3$ et $k = 4$, une configuration comme

$$\star\star \mid \star \mid \star$$

représente le choix de 2 fois l'élément 1, 1 fois l'élément 2 et 1 fois l'élément 3.

— Chaque solution de l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ correspond donc à une disposition particulière de $k = 4$ étoiles et de $n - 1 = 2$ bâtons.

De manière générale, le problème consiste à compter le nombre de façons d'arranger k étoiles et $n-1$ bâtons sur une ligne. Le total d'objets est $k + n - 1$, et il suffit de choisir la position des k étoiles (ou, de façon équivalente, celles des $n - 1$ bâtons) :

$$\binom{n+k-1}{k}. \tag{1.12}$$

1.4 Résumé

Opération	Remise	Dénombrement
Permutation	-	$n!$
Arrangement	sans	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$
	avec	n^k
Combinaison	sans	$\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\ k!}$
	avec	$\dbinom{n+k-1}{k} = \dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!\ k!}$

TABLE 1 – Résumé des dénombrements.

2 Collection d'objets qui se répètent

Pour faciliter la compréhension, on supposera, a contrario de l'axiome d'égalité de la théorie des ensembles, que la répétition d'objets dans un ensemble forme un nouvel ensemble, c'est-à-dire que par exemple

$$\{x, y, z\} \neq \{x, x, y, z\}. \tag{2.1}$$

Puisque la théorie des ensembles est fondamentale aux mathématiques modernes, on va motiver une façon de by-pass cet horrible enfreint par supposer que ces éléments répétés sont moralement différents. Pour reprendre notre exemple en (2.1), en suivant ce chemin de pensée, on sous-entend que

$$\{x, x, y, z\} \overset{\text{moralement}}{\equiv} \{x_a, x_b, y, z\} \quad \neq \quad \{x_a, y, z\} \overset{\text{moralement}}{\equiv} \{x, y, z\}. \tag{2.2}$$

2.1 Permutations

Si on considère des répétitions, on doit définir n_i tel qu'il et la répétition de l'élément x_i. Par exemple, si on considère qu'on peut prendre 3 fois l'objet x_2 dans notre permutation, alors $n_2 = 3$. Le nombre total d'objets que l'on va chercher à permuter est donc la somme sur tous les n_i et puisqu'on cherche à permuter tous ces objets, on doit donc avoir que le nombre de cases est la somme sur les répétitions, $N_c = \sum_i n_i$.

Intuition. La manière la plus simple de compter le nombre possible de permutations dans ce cas-ci est de faire comme si les x_i répétés étaient distincts. Ce qui nous ferait un total $\sum_i n_i = N_c$ éléments hypothétiquement différents. On a alors vu que le nombre de permutations dans ce cas est la factorielle de tous les éléments ou autrement dit $(\sum_i n_i)! = N_c!$.

Puisque certaines de ces permutations sont maintenant équivalentes (celles où on a pris des éléments égaux comme s'ils étaient différents), on doit les soustraire au nombre de permutations total. Il y a en fait $n_1! \times n_2! \times ... \times n_{N_E}! = \prod_i n_i!$ façons de permuter les objets identiques au total.

Dénombrement. Ainsi il y a $\dfrac{(\sum_i n_i)!}{\prod_i n_i!} = \dfrac{N_c!}{\prod_i n_i!}$ permutations différentes.