
Mécanique analytique, Série 7

Assistants et tuteurs :

jeanne.bourgeois@epfl.ch
 luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch
 nathan.brunet@epfl.ch

lorenzo.fioroni@epfl.ch
 filippo.ferrari@epfl.ch
 jonas.daverio@epfl.ch

leo.goutte@epfl.ch
 mathias.findrihan@epfl.ch
 remi.thomas@epfl.ch

Exercice 1 : Couplage quadratique et coordonnées normales

On considère un système à deux degrés de liberté (x, y) de masse m (identique sur les deux axes), dont l'énergie cinétique et potentielle sont données respectivement par

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

$$V = k(x - y)^2, \quad k > 0.$$

- (a) Trouver les moments conjugués p_x et p_y . Écrire les équations de Hamilton pour (x, y, p_x, p_y) et montrer que c'est un système de quatre équations différentielles couplées.
- (b) Trouver une transformation canonique à des nouvelles coordonnées $u = u(x, y)$ et $v = v(x, y)$, de manière à découpler les degrés de liberté (u, p_u) et (v, p_v) . On appelle ces coordonnées « normales ».
- (c) Exprimer le Hamiltonien en fonction des coordonnées normales (u, v, p_u, p_v) et montrer que la transformation est en effet canonique.
- (d) Ecrire les équations de Hamilton et trouver la solution dans le cas général.

Exercice 2 : $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{H}$

Pour chaque lagrangien, trouver l'hamiltonien correspondant et établir les équations de Hamilton.

- a) **Pendule en rotation** ($r = R = \text{const}$ et $\dot{\phi} = \omega = \text{const}$)

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}mR^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) - mgR \cos \theta \quad (1)$$

- b) **Pendule sphérique** ($r = R = \text{const}$)

$$\mathcal{L}(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}mR^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - mgR \cos \theta \quad (2)$$

- c) **Système de ressorts**

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2} (x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2) \quad (3)$$

d) **Pendule en déplacement**

$$\mathcal{L}(u, \dot{u}, \phi, \dot{\phi}) = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{u}^2 + \frac{m_2 l^2}{2} \dot{\phi}^2 + m_2 l \dot{\phi} \cos \phi + m_2 g l \cos \phi \quad (4)$$

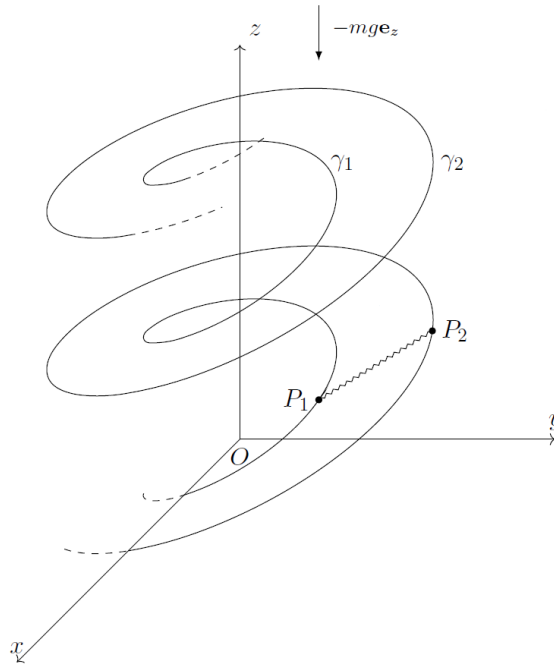
Exercice 3 : Toboggans liés par un ressort

On considère deux particules P_1 et P_2 , les deux ayant une masse m , contraintes à se déplacer respectivement sur deux courbes γ_1 et γ_2 . Les deux courbes sont paramétrées dans l'espace cartésien comme

$$\gamma_1 : x(\theta_1) = r \cos \theta_1, \quad y(\theta_1) = r \sin \theta_1, \quad z(\theta_1) = h\theta_1, \quad \theta_1 \in \mathbb{R},$$

$$\gamma_2 : x(\theta_2) = 2r \cos \theta_2, \quad y(\theta_2) = 2r \sin \theta_2, \quad z(\theta_2) = h\theta_2, \quad \theta_2 \in \mathbb{R},$$

où $h, r > 0$. Les deux particules sont soumises à la force de gravité $\mathbf{F}_g = -mg\mathbf{e}_z$ et sont reliées par un ressort élastique, de masse négligeable, ayant une constante élastique $K > 0$ et une longueur au repos ℓ_0 . Le système est illustré dans la figure.



1. Ecrire le lagrangien et les équations d'Euler-Lagrange du système.
2. Montrer que l'énergie totale est conservée et l'exprimer en fonction de θ_1 , θ_2 , $\dot{\theta}_1$, et $\dot{\theta}_2$.
3. Trouver les moments conjugués p_{θ_1} et p_{θ_2} .
4. Ecrire le Hamiltonien du système et les équations de Hamilton.
5. Trouver pour quelles valeurs de l'accélération de gravité g il peut y avoir des solutions telles que $\theta_1(t) = \theta_2(t)$ à tout temps t .
6. Donner l'expression explicite de ces solutions.