
Mécanique analytique, Série 5

Assistants et tuteurs :

jeanne.bourgeois@epfl.ch
luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch
nathan.brunet@epfl.ch

lorenzo.fioroni@epfl.ch
filippo.ferrari@epfl.ch
jonas.daverio@epfl.ch

leo.goutte@epfl.ch
mathias.findrihan@epfl.ch
remi.thomas@epfl.ch

Exercice 1 : Problème de la surface minimale de révolution

Considérer la surface de révolution obtenue en prenant une courbe dans un plan (x, y) passant par deux points extrêmes donnés, $P(1, 0)$ et $Q(\cosh(2), 2)$, et en la faisant tourner autour de l'axe y . Trouver la courbe pour laquelle l'aire de la surface est minimale. Pour ce faire, paramétriser la courbe selon $(x(y), y)$ ou $(x, y(x))$, et utiliser une quantité conservée pour résoudre le système.

Indications :

- Pour que la paramétrisation $y(x)$ soit valable, on suppose que cette fonction est définie sur l'intervalle $[x_P, x_Q]$ et est monotone.
- Pour résoudre l'intégrale, effectuer le changement de variable $x = a \cosh(\theta)$ avec a et $\theta = \theta(y)$ à définir.

Exercice 2 : Problème de la brachistochrone

Sous l'action de la pesanteur, un point matériel glisse sans frottement sur un rail de masse négligeable situé dans le plan vertical (x, y) . Si le point matériel est initialement immobile à l'origine \mathcal{O} , trouver la courbe donnant la forme du rail pour que le point matériel se déplace de l'origine au point $\mathcal{P}(x_0, y_0)$ en un temps minimal.

Indications :

- Utiliser la conservation de l'énergie pour obtenir la vitesse v de la masse en un point quelconque de la trajectoire en fonction de y .
- Choisir la paramétrisation $(x(y), y)$ ou $(x, y(x))$.
- Utiliser une quantité conservée pour résoudre le système.
- Est-il possible que la forme idéale du rail passe par un point plus bas que y_0 ?

Exercice 3 : Bille glissant sur un fil rigide dans un plan vertical

On considère une bille de masse m glissant sans frottement sur un fil contenu dans un plan vertical (x, y) , l'axe y étant orienté vers le bas. La géométrie du fil est donnée par une contrainte holonome scéléronome

$$y = y(x),$$

et la bille est soumise à la pesanteur d'accélération g . On note $(x(t), y(t))$ la trajectoire. Sauf mention contraire, on prendra comme conditions initiales $x(0) = 0$, $y(0) = y_0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

1. Coordonnée généralisée.

- Choisir une coordonnée généralisée unique qui élimine explicitement la contrainte $y = y(x)$ et exprimer $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de cette coordonnée et de son dérivé temporel.

2. Lagrangien.

- Écrire l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V (avec y mesuré vers le bas), puis le Lagrangien L en fonction de la coordonnée généralisée choisie et de sa dérivée temporelle.

3. Équations de Lagrange.

- Écrire l'équation d'Euler–Lagrange pour la coordonnée généralisée et en déduire l'équation du mouvement le long du fil.
- Montrer que l'énergie mécanique est conservée et donner l'intégrale première correspondante.

4. Cas particulier : fil rectiligne.

- On considère que le fil a une forme rectiligne $y = b - ax$ avec $a > 0$. En posant $y_0 = b$ et en supposant une vitesse initiale nulle, résoudre explicitement l'équation du mouvement pour $x(t)$ et $y(t)$.
- Discuter la constante d'accélération effective le long de x .

5. Cas particulier : cycloïde.

- On considère que le fil a la forme d'une cycloïde (brachistochrone). En posant $y_0 = 0$ et en supposant une vitesse initiale nulle au sommet $x = 0$ de la cycloïde, résoudre explicitement la dynamique.
- Indication : on peut utiliser ici la paramétrisation de la cycloïde obtenue dans l'exercice précédent :

$$x(\varphi) = x_0 + R(\varphi - \sin \varphi), \quad y(\varphi) = y_0 + R(1 - \cos \varphi),$$

avec $R > 0$ et φ pris comme coordonnée généralisée.

6. Force de contrainte.

- A partir du formalisme Lagrangien, en utilisant l'équation du mouvement obtenue ci-dessus, déduire les deux composantes R_x et R_y de la force de contrainte exercée par le fil sur la bille.