
Mécanique analytique, Série 2

Assistants et tuteurs :

jeanne.bourgeois@epfl.ch
 luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch
 nathan.brunet@epfl.ch

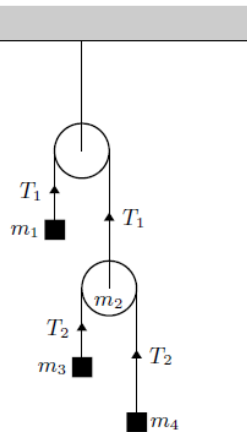
lorenzo.fioroni@epfl.ch
 filippo.ferrari@epfl.ch
 jonas.daverio@epfl.ch

leo.goutte@epfl.ch
 mathias.findrihan@epfl.ch
 remi.thomas@epfl.ch

Nous allons ici reprendre les trois exercices de la semaine dernière et les résoudre à l'aide du formalisme Lagrangien. Le but est d'apprécier l'efficacité de ce formalisme.

Exercice 1 : Machine d'Atwood

Considérer le dispositif de double poulie, présenté ci-contre, soumis à la seule action de la pesanteur.



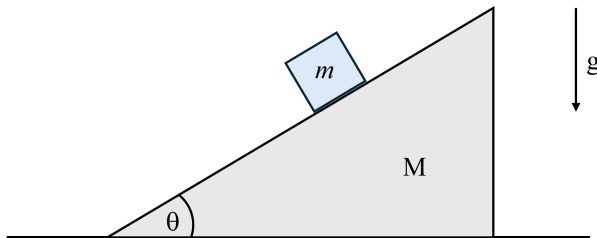
- Donner les contraintes de ce système.
- Écrire le Lagrangien de ce système en choisissant les positions des masses m_1 et m_3 comme coordonnées généralisées.
- Dériver les équations du mouvement de ces masses et déterminer l'accélération des masses m_1 et m_3 .

Cette description est évidemment une idéalisation qui néglige énormément d'effets. En lister quelques-uns, donner un paramètre sans dimensions qui permet d'estimer l'importance de la contribution négligée et donner la limite dans laquelle elle s'annule.

Exercice 2 : Bloc sur une cale glissante

Une cale (coin) de masse M est posée sur une table horizontale parfaitement lisse et peut glisser sans frottement le long de l'axe x . Sa face supérieure est un plan incliné faisant un angle fixe θ avec

l'horizontale. Un petit bloc de masse m glisse sans frottement sur le plan incliné. On note $X(t)$ la position horizontale de la cale (mesurée le long de $+x$ à partir d'un repère fixe du laboratoire), et $q(t)$ la position du bloc mesurée le long du plan (on prend q croissant vers le haut de la pente). La gravité est dirigée vers le bas et de module g .



- Ecrire les coordonnées généralisées dans le référentiel inertiel du laboratoire.
- Ecrire l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction des coordonnées généralisées.
- Ecrire les équations de Lagrange qui régissent le mouvement du système.

Exercice 3 : Bille sur un cercle en rotation imposée

Une bille de masse m glisse sans frottement sur un cercle rigide de rayon R . Le cercle est situé dans un plan vertical dont la normale tourne autour de l'axe vertical avec un azimut prescrit $\psi(t)$ et une vitesse angulaire $\dot{\psi} = \Omega(t)$ (c.-à-d., le support est activement entraîné; on ne résout pas pour Ω). La gravité agit vers le bas avec l'accélération g . On note $\theta(t)$ la position angulaire de la bille mesurée à partir du point le plus bas du cercle ($\theta = 0$ en bas).

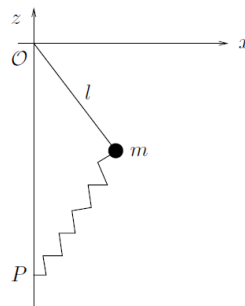
Pour la solution avec le formalisme Lagrangien, on peut décrire le mouvement directement dans le référentiel inertiel du laboratoire.

- Ecrire les énergies cinétique et potentielle du système, dans le référentiel du laboratoire.
- Ecrire le Lagrangien et l'équation de Lagrange.

Voici quelques exercices additionnels à résoudre avec le formalisme de Lagrange.

Exercice 4 : Variation autour du pendule #1

Considérer un pendule de centre O , de longueur l avec au bout une masse m . À cette dernière on attache un ressort de constante d'élasticité k et de longueur au repos d ($d \leq l$). L'autre extrémité du ressort est fixée au point P de l'axe vertical Oz , situé à une distance $2l$ du point O . Le système ne se déplace que dans le plan vertical et est soumis à la gravité. Écrire le Lagrangien du système.



Exercice 5 : Variation autour du pendule #2

Dans un plan vertical (xy) , on considère un pendule simple (longueur l , masse m) dont le point de suspension se déplace, à vitesse angulaire constante ω ($\varphi = \omega t$), sur un cercle vertical de rayon R .

- Paramétrer le système à l'aide de coordonnées généralisées ; combien en faut-il ?
- Ecrire le Lagrangien du système.
- S'agit-il d'un système conservatif ?

