
Mécanique analytique, Série 1

Assistants et tuteurs :

jeanne.bourgeois@epfl.ch
 luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch
 nathan.brunet@epfl.ch

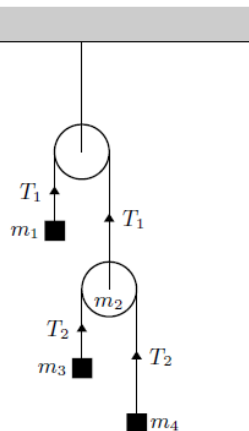
lorenzo.fioroni@epfl.ch
 filippo.ferrari@epfl.ch
 jonas.daverio@epfl.ch

leo.goutte@epfl.ch
 mathias.findrihan@epfl.ch
 remi.thomas@epfl.ch

Exercice 1 : Machine d'Atwood

Le but de cet exercice est de comprendre comment on élimine les contraintes dans un système mécanique pour se réduire à une description en termes de seules coordonnées généralisées.

Considérez le dispositif suivant soumis à la seule action de la pesanteur :

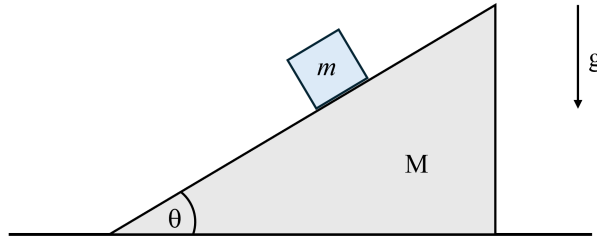


- Paramétrer les positions des masses et donner les contraintes de ce système.
- Écrire les équations de Newton pour les quatre masses et déterminer leur accélération.
- Que peut-on dire de l'accélération de m_1 si les masses m_1 et m_2 sont égales ? Et si les masses satisfont l'égalité $m_1 = m_2 + m_3 + m_4$?
- Quelles sont les limites de cette description ?
- Obtenir maintenant les mêmes équations du mouvement en partant du principe de conservation de l'énergie. Réfléchir sur la difficulté des deux approches pour obtenir les équations du mouvement.

Exercice 2 : Bloc sur une cale glissante

Le but de cet exercice est de comprendre comment on peut utiliser des référentiels non inertiels. Faire attention au fait que le mouvement de la cale est inconnu a priori et doit être résolu en même temps que celui du bloc.

Une cale (coin) de masse M est posée sur une table horizontale parfaitement lisse et peut glisser sans frottement le long de l'axe x . Sa face supérieure est un plan incliné faisant un angle fixe θ avec l'horizontale. Un petit bloc de masse m glisse sans frottement sur le plan incliné. On note $X(t)$ la position horizontale de la cale (mesurée le long de $+x$ à partir d'un repère fixe du laboratoire), et $q(t)$ la position du bloc mesurée le long du plan (on prend q croissant vers le haut de la pente). La gravité est dirigée vers le bas et de module g .



- (a) En utilisant uniquement la mécanique newtonienne, établir les équations du mouvement du système couplé cale–bloc et obtenir des expressions explicites pour l'accélération horizontale de la cale \ddot{X} , l'accélération du bloc le long du plan \ddot{q} , et la réaction normale N entre le bloc et le plan.
- (b) Montrer que ces accélérations sont constantes et intégrer pour déterminer $X(t)$ et $q(t)$ pour des conditions initiales arbitraires $X(0)$, $\dot{X}(0)$, $q(0)$, $\dot{q}(0)$.

Vous pouvez, si vous le préférez, travailler dans un référentiel non inertiel qui translate avec la cale (sans rotation) : dans ce cas, inclure la force inertielle (de d'Alembert) agissant sur le bloc et préciser les vecteurs unitaires (par ex. la tangente \hat{t} et la normale \hat{n} au plan) ainsi que les projections utilisées.

Exercice 3 : Bille sur un cercle en rotation imposée

Le but de cet exercice est de comprendre comment, dans un système non conservatif, on ne peut pas utiliser la conservation de l'énergie pour obtenir les équations du mouvement, et on est obligé d'utiliser la deuxième loi de Newton. Le formalisme Lagrangien qu'on verra plus tard permet de retrouver les équations du mouvement même dans ce cas non conservatif.

Une bille de masse m glisse sans frottement sur un cercle rigide de rayon R . Le cercle est situé dans un plan vertical dont la normale tourne autour de l'axe vertical avec un azimut prescrit $\psi(t)$ et une vitesse angulaire $\dot{\psi} = \Omega(t)$ (c.-à-d., le support est activement entraîné; on ne résout pas pour Ω). La gravité agit vers le bas avec l'accélération g . On note $\theta(t)$ la position angulaire de la bille mesurée à partir du point le plus bas du cercle ($\theta = 0$ en bas).

- (a) On introduit une base horizontale dépendant du temps $\{\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t)\}$ qui tourne avec le plan du cercle :

$$\mathbf{e}_1 = \cos \psi \mathbf{e}_x + \sin \psi \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1,$$

de sorte que $\dot{\mathbf{e}}_1 = \Omega \mathbf{e}_2$ et $\dot{\mathbf{e}}_2 = -\Omega \mathbf{e}_1$. Écrire la position $\mathbf{r}(t)$ de la bille sur le cercle et calculer la vitesse $\mathbf{v}(t)$ et l'accélération $\mathbf{a}(t)$.

- (b) On introduit une nouvelle base composée de \mathbf{e}_2 , du vecteur \mathbf{t} tangent au cercle et du vecteur \mathbf{n} radial, de sorte que la position de la bille peut s'écrire $\mathbf{r} = R \mathbf{n}$.

Le cercle exerce des réactions inconnues nécessaires pour (i) maintenir la bille dans le plan du cercle et (ii) imposer le contact radial avec le fil circulaire. Décomposer la force de contact en une composante radiale dans le plan et une composante hors du plan. On note qu'il n'y a aucune force tangentielle le long du cercle (absence de frottement).

- (c) Utiliser la deuxième loi de Newton appliquée à la bille et projeter selon trois directions ortho-normées :

- la tangente au cercle (ce qui donne l'équation scalaire pour $\theta(t)$),
- la direction radiale dans le plan (donne la réaction radiale N_r),
- la direction hors du plan (donne la réaction normale au plan N_p).

Dériver explicitement l'équation différentielle pour $\theta(t)$ et les expressions de N_r et N_p en fonction de $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \Omega, \dot{\Omega}$.

- (d) Vérifier que l'équation tangentielle contient $\Omega(t)$ mais pas $\dot{\Omega}$. Identifier où $\dot{\Omega}$ apparaît et interpréter physiquement. Commenter brièvement la condition de contact pour la bille.
- (e) On suppose maintenant $\Omega(t) \equiv \Omega_0$ (constante). Trouver les angles d'équilibre θ_* .