

---

## Mécanique analytique, Série 0

---

*Assistants et tuteurs :*

jeanne.bourgeois@epfl.ch  
luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch  
nathan.brunet@epfl.ch

lorenzo.fioroni@epfl.ch  
filippo.ferrari@epfl.ch  
jonas.daverio@epfl.ch

leo.goutte@epfl.ch  
mathias.findrihan@epfl.ch  
remi.thomas@epfl.ch

### Exercice 1 : Fonctions de plusieurs variables

**Méthode : différentiation d'une fonction de plusieurs variables**

La définition d'une fonction  $f(\alpha, \alpha')$  où  $\alpha'$  est la dérivée de  $\alpha$  doit en réalité s'interpréter comme la définition de  $f(x, y)$  où  $x$  et  $y$  sont deux variables muettes, indépendantes. Dans ce contexte,  $\alpha'$  n'est donc pas une fonction de  $\alpha$  (et vice versa), et l'on aura  $\partial\alpha'/\partial\alpha = 0$  et  $\partial\alpha/\partial\alpha' = 0$ .

a) Soit la fonction  $f$  définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto f(x, y)$$

avec  $x, y$  deux variables indépendantes. Exprimer la différentielle totale  $df$ .

b) On considère maintenant que  $y$  est également une fonction de  $x$ . Comment est modifiée la différentielle totale ?

c) Soit maintenant la fonction  $g$  définie par

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, \dot{y}) \longmapsto g(x, y, \dot{y})$$

où  $y$  est désormais une fonction de deux variables,  $y(x, t)$ , et où  $\dot{y} = dy/dt$ . On suppose d'abord que  $x$  ne dépend pas de  $t$ . Calculer  $dg/dt$  ainsi que  $\partial g/\partial t$ . Ce résultat change-t-il si  $x$  est une fonction de  $t$  ?

d) Considérons maintenant la fonction suivante :

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$$

où  $q$  et  $\dot{q}$  sont des fonctions du temps  $t$ .

Calculez explicitement

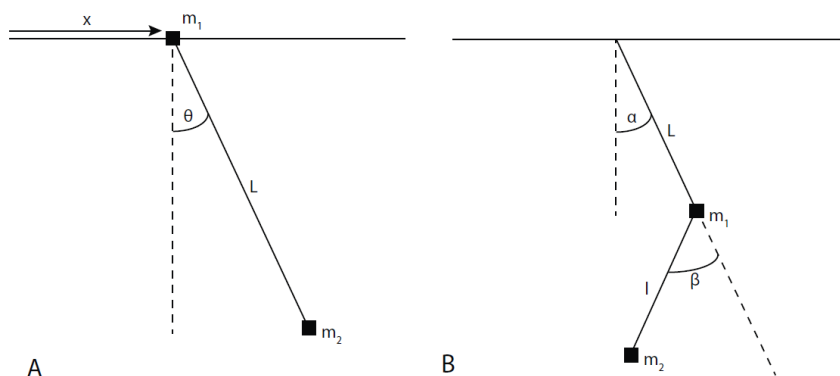
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

De quel type d'équation s'agit-il ?

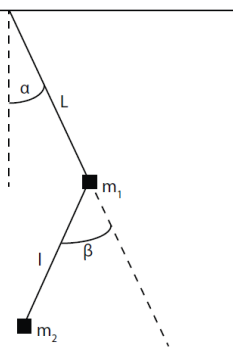
## Exercice 2 : Systèmes de coordonnées divers

**Coordonnées** Dans ce cours, nous serons souvent amenés à caractériser des systèmes en utilisant différents types de coordonnées (cartésiennes, polaires, cylindriques, sphériques). Il n'est pas inhabituel de définir un système avec un mélange de plusieurs types de coordonnées. Le but de cet exercice est de vous entraîner à la manipulation de ces grandeurs.

Pour les deux systèmes ci-dessous, calculer l'énergie totale en fonction des coordonnées indiquées.



B



a) Le point matériel  $m_1$  est libre de se déplacer sans frottements sur un axe horizontal. Le point matériel  $m_2$  est attaché au point  $m_1$  par un fil inextensible (considéré toujours tendu) de longueur  $L$ . Calculer l'énergie totale en fonction de  $x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}$  et  $L$  en tenant compte de la gravité.

b) Pendule composé : On considère les deux fils toujours tendus. Calculer l'énergie totale en fonction de  $\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, L$  et  $l$  en tenant compte de la gravité.

Avec les exercices qui suivent vous allez tester vos connaissances en analyse et algèbre linéaire, ainsi que d'introduire la notion, très importante en physique, d'analyse dimensionnelle. Si vous constatez que la plupart des exercices vous sont obscurs, c'est le moment de nous faire signe en contactant un des assistants ou des tuteurs. On vous donnera alors des conseils pour vous mettre à niveau pour le cours.

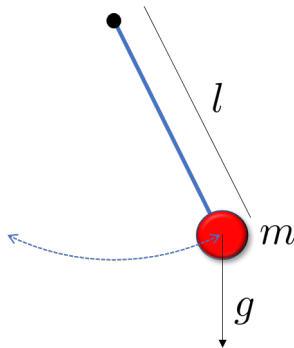
Exercice 3 : Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

Calculez (s'ils existent) les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 : Analyse dimensionnelle : la pendule

Considérez une pendule de longueur  $l$  et masse  $m$ , soumise à l'accélération de gravité  $g$ . Les propriétés physiques de la pendule vont être des fonctions de ces trois quantité, car il n'y en a pas d'autre qui caractérise le système.



Sans résoudre les équations du mouvement, mais seulement à l'aide de l'analyse dimensionnelle, dire comment la période  $T$  des oscillations de la pendule dépend de  $l$ ,  $m$  et  $g$ .

Exercice 5 : Analyse dimensionnelle : Energie de l'explosion d'une bombe atomique

En juillet 1945 au New Mexico, USA, la première bombe nucléaire a été détonée en guise de test des résultats du projet Manhattan. En 1947, des photos ultrarapides de l'explosion ont été rendues publiques (voir figure). En 1950, le physicien anglais G. I. Taylor a publié une étude où, à l'aide de la seule analyse dimensionnelle, il a réussi à estimer l'énergie de l'explosion, alors que cette donnée était encore strictement classifiée.

En utilisant les données visibles dans la photo, estimer l'énergie  $E$  de l'explosion. Pour cela il faut savoir que les quantités physiques qui entrent en jeu sont le rayon  $r$  de l'explosion, le temps  $t$ , l'énergie  $E$ , et la densité de l'air qui entoure l'explosion. Cette dernière vaut  $\rho = 1.25 \text{ kg/m}^3$ . On rappelle que l'unité d'énergie dans le SI est le Joule qui vaut  $1 \text{ kg}\times\text{m}^2/\text{s}^2$ , et que 1 Kilotonne équivaut à  $4.2 \times 10^{12}$  Joules.

