
Mécanique analytique, Corrigé 1

Assistants et tuteurs :

jeanne.bourgeois@epfl.ch
 luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch
 nathan.brunet@epfl.ch

lorenzo.fioroni@epfl.ch
 filippo.ferrari@epfl.ch
 jonas.daverio@epfl.ch

leo.goutte@epfl.ch
 mathias.findrihan@epfl.ch
 remi.thomas@epfl.ch

Exercice 1 : Machine de Atwood

- (a) En choisissant un axe vertical z dirigé vers le bas, les équations de Newton prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 = m_1 g - T_1 \\ m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g - T_1 + 2T_2 \\ m_3 \ddot{z}_3 = m_3 g - T_2 \\ m_4 \ddot{z}_4 = m_4 g - T_2 \end{cases} \quad (1)$$

Les conditions d'inextensibilité des deux cordes se traduisent en deux conditions sur les accélérations. En effet, en notant z_0 la hauteur de la plus haute poulie et R_i le rayon de la i -ème poulie, on peut exprimer la longueur des cordes comme :

$$\begin{aligned} L_1 &= (z_1 - z_0) + (z_2 - z_0) + \pi R_1 \\ L_2 &= (z_3 - z_2) + (z_4 - z_2) + \pi R_2 \end{aligned} \quad (2)$$

En prenant la seconde dérivée par rapport au temps, on obtient les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 &= -\ddot{z}_2 = a_1 \\ \ddot{z}_3 &= a_3 \\ \ddot{z}_4 &= -2a_1 - a_3 \end{aligned} \quad (3)$$

On obtient alors le système suivant de quatre équations pour les quatre inconnues a_1 , a_3 , T_1 et T_2 :

$$\begin{cases} m_1 a_1 = m_1 g - T_1 \\ m_2 a_1 = -m_2 g + T_1 - 2T_2 \\ m_3 a_3 = m_3 g - T_2 \\ m_4 (2a_1 + a_3) = -m_4 g + T_2 \end{cases} \quad (4)$$

(b) Les solutions du système précédent sont

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left[\frac{(m_1 - m_2)(m_3 + m_4) - 4m_3m_4}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + 4m_3m_4} \right] g \\
a_3 &= \left[\frac{(m_1 + m_2)m_3 + (m_2 - 3m_1 + 4m_3)m_4}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + 4m_3m_4} \right] g \\
T_1 &= \left[\frac{2m_1(4m_3m_4 + m_2(m_3 + m_4))}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + 4m_3m_4} \right] g \\
T_2 &= \left[\frac{4m_1m_3m_4}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + 4m_3m_4} \right] g
\end{aligned} \tag{5}$$

(c) Vérifions quelques propriétés des solutions :

- i) Si $m_2 = m_1$ on a $a_1 < 0$. En d'autres mots, la masse 1 ne peut que monter, comme on s'y attend.
- ii) Si $m_1 = m_2 + m_3 + m_4$ on a $a_1 \propto (m_3 - m_4)^2$. On constate donc que si m_3 et m_4 sont différentes, le mouvement autour de la poulie 2 va "alléger" le sous-système formé de m_2 , m_3 et m_4 . Si, au contraire, $m_3 = m_4$, on trouve $a_1 = a_2 = 0$.

(d) Cette description est valable pour une longueur de corde formellement infinie. Il ne peut en aucun cas décrire ce qu'il se passe lorsqu'une des masses viendra percuter une poulie par exemple. Une autre hypothèse que nous avons faite ici est que les rayons des poulies tendent à zéro, ou également que les masses des poulies tendent à zéro. Autrement, il aurait fallu considérer la rotation des poulies comme degrés de liberté additionnels, introduire leur moments d'inertie et écrire leurs équations du mouvement en présence des couples appliqués par les masses.

(e) Pour obtenir la même solution à partir de la conservation de l'énergie, écrivons l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

L'énergie cinétique est

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{z}_3^2 + \frac{1}{2}m_4\dot{z}_4^2. \tag{1}$$

En utilisant les contraintes de vitesse $\dot{z}_2 = -\dot{z}_1$, $\dot{z}_4 = -2\dot{z}_1 - \dot{z}_3$, on obtient

$$T = (m_1 + m_2 + 2m_4)\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}(m_3 + m_4)\dot{z}_3^2 + 2m_4\dot{z}_1\dot{z}_3. \tag{2}$$

Pour l'énergie potentielle $V = \sum_i m_i g z_i$, avec $z_2 = c_2 - z_1$ et $z_4 = c_4 - 2z_1 - z_3$, où c_2 et c_4 sont des constantes, on obtient

$$\begin{aligned}
V &= m_1 g z_1 + m_2 g (c_2 - z_1) + m_3 g z_3 + m_4 g (c_4 - 2z_1 - z_3) \\
&= \text{const} + (m_1 - m_2 - 2m_4)g z_1 + (m_3 - m_4)g z_3.
\end{aligned} \tag{3}$$

La conservation de l'énergie s'écrit $\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T + V) = 0$. En différentiant et en regroupant les coefficients des vitesses indépendantes \dot{z}_1, \dot{z}_3 , on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \left[2(m_1 + m_2 + 2m_4)\dot{z}_1 + 2m_4\dot{z}_3 + (m_1 - m_2 - 2m_4)g \right] \dot{z}_1 \\
&\quad + \left[(m_3 + m_4)\dot{z}_3 + 2m_4\dot{z}_1 + (m_3 - m_4)g \right] \dot{z}_3 = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Puisque \dot{z}_1 et \dot{z}_3 sont indépendantes, les deux crochets doivent s'annuler séparément, ce qui donne le système d'équations du mouvement :

$$\boxed{\begin{aligned} 2(m_1 + m_2 + 2m_4) \ddot{z}_1 + 2m_4 \ddot{z}_3 &= -(m_1 - m_2 - 2m_4) g, \\ 2m_4 \ddot{z}_1 + (m_3 + m_4) \ddot{z}_3 &= -(m_3 - m_4) g. \end{aligned}} \quad (5)$$

Les accélérations des autres masses s'en déduisent par les contraintes :

$$\ddot{z}_2 = -\ddot{z}_1, \quad \ddot{z}_4 = -2\ddot{z}_1 - \ddot{z}_3. \quad (6)$$

Cette solution coïncide bien sûr avec celle obtenue avec les équations de Newton, mais c'était beaucoup moins laborieux de la déduire par la conservation de l'énergie.

Exercice 2 : Bloc sur une cale glissante

- (a) Soit $X(t)$ la position horizontale du coin de masse M , et $q(t)$ la coordonnée du bloc de masse m mesurée *le long de l'inclinaison* (positive vers le haut de la pente). Le plan fait un angle constant θ avec l'horizontale. La gravité est $\mathbf{g} = -g \hat{\mathbf{y}}$.

Vecteurs unitaires utiles le long et normal à la surface :

$$\hat{\mathbf{t}} = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \hat{\mathbf{n}} = (-\sin \theta, \cos \theta).$$

On travaille dans un référentiel S' qui se translate avec le coin (sans rotation). Dans S' , le bloc est en

$$(x', y') = (q \cos \theta, q \sin \theta),$$

et le référentiel a une accélération constante (mais inconnue) $\ddot{X}(t) \hat{\mathbf{x}}$ par rapport au laboratoire. Le bloc subit :

- le poids $m\mathbf{g}$,
- la réaction normale $N \hat{\mathbf{n}}$ du plan,
- la force inertielle $-m\ddot{X} \hat{\mathbf{x}}$.

Dynamique tangentielle. Projection de la deuxième loi de Newton sur $\hat{\mathbf{t}}$:

$$m\ddot{q} = (m\mathbf{g} - m\ddot{X} \hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\mathbf{t}} = -mg \sin \theta - m\ddot{X} \cos \theta. \quad (7)$$

Contrainte normale. Pas de mouvement à travers le plan :

$$0 = (m\mathbf{g} - m\ddot{X} \hat{\mathbf{x}} + N\hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \Rightarrow N = mg \cos \theta - m\ddot{X} \sin \theta. \quad (8)$$

Équation du coin. La seule force horizontale sur le coin est la composante horizontale de la force de contact du bloc :

$$M\ddot{X} = N \sin \theta. \quad (9)$$

En éliminant N entre (8) et (9) on obtient

$$(M + m \sin^2 \theta) \ddot{X} = mg \sin \theta \cos \theta \Rightarrow \boxed{\ddot{X} = \frac{mg \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta}}.$$

En insérant ceci dans (7) :

$$\ddot{q} = -g \sin \theta - \ddot{X} \cos \theta = -g \sin \theta \frac{M + m}{M + m \sin^2 \theta}.$$

La réaction normale s'écrit alors

$$N = \frac{mMg \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta}.$$

(b) Puisque \ddot{X} et \ddot{q} sont constants, les mouvements sont

$$X(t) = X_0 + \dot{X}_0 t + \frac{1}{2} \ddot{X} t^2, \quad q(t) = q_0 + \dot{q}_0 t + \frac{1}{2} \ddot{q} t^2.$$

Exercice 3 : Bille sur un cercle en rotation imposée

(a) On définit des vecteurs unitaires horizontaux dépendant du temps

$$\mathbf{e}_1(t) = \cos \psi \mathbf{e}_x + \sin \psi \mathbf{e}_y, \quad (10)$$

$$\mathbf{e}_2(t) = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1, \quad (11)$$

de sorte que

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \Omega \mathbf{e}_2, \quad \dot{\mathbf{e}}_2 = -\Omega \mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{e}}_z = \mathbf{0}. \quad (12)$$

La position de la bille sur le cercle s'écrit

$$\mathbf{r} = R(\sin \theta \mathbf{e}_1 - \cos \theta \mathbf{e}_z). \quad (13)$$

En dérivant,

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = R(\dot{\theta} \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \Omega \mathbf{e}_2 + \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_z), \quad (14)$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = R\left[(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta - \Omega^2 \sin \theta) \mathbf{e}_1 + (2\dot{\theta} \Omega \cos \theta + \dot{\Omega} \sin \theta) \mathbf{e}_2 + (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \mathbf{e}_z\right]. \quad (15)$$

(b) Deux directions orthonormées dans le plan du cercle utiles sont

$$\text{tangente : } \mathbf{t} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_z, \quad \text{radiale (vers l'extérieur) : } \mathbf{n} = \sin \theta \mathbf{e}_1 - \cos \theta \mathbf{e}_z. \quad (16)$$

On note que $\mathbf{r} = R \mathbf{n}$.

Le cercle peut exercer une force N_r dans le plan normale au fil (radiale, vers l'intérieur) et une force N_p normale au plan. On écrit donc

$$\mathbf{F}_c = N_r(-\mathbf{n}) + N_p \mathbf{e}_2. \quad (17)$$

Ici, N_r assure la contrainte de circularité : c'est la réaction radiale qui maintient la bille sur le cercle en compensant la composante radiale des autres forces. N_p correspond à la réaction normale au plan : elle empêche la bille de quitter le plan de mouvement. Il n'y a **aucune** composante tangentielle le long de \mathbf{t} , car il n'y a pas de frottement.

- (c) En plus de la force de contact, on considère la force de gravité $\mathbf{F}_g = -mg\mathbf{e}_z$.
 La loi de Newton $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_c$ est projetée selon les directions orthonormées.
Direction tangentielle : Comme \mathbf{F}_c n'a pas de composante tangentielle,

$$m\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{F}_g \cdot \mathbf{t}. \quad (18)$$

On calcule les projections :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = R[\ddot{\theta} - \Omega^2 \sin \theta \cos \theta], \quad (19)$$

$$\mathbf{F}_g \cdot \mathbf{t} = -mg \sin \theta. \quad (20)$$

Ainsi

$$\boxed{mR(\ddot{\theta} - \Omega^2 \sin \theta \cos \theta) = -mg \sin \theta} \iff \boxed{\ddot{\theta} = \Omega(t)^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{R} \sin \theta}. \quad (21)$$

On note que tout terme en $\dot{\Omega}$ s'annule dans l'équation tangentielle.

Direction hors du plan :

$$m\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2 = N_p \implies \boxed{N_p = mR(2\dot{\theta}\Omega \cos \theta + \dot{\Omega} \sin \theta)}. \quad (22)$$

Direction radiale dans le plan :

$$m\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = -N_r + \mathbf{F}_g \cdot \mathbf{n}, \quad (23)$$

avec

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = -R(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta), \quad (24)$$

$$\mathbf{F}_g \cdot \mathbf{n} = mg \cos \theta. \quad (25)$$

Donc

$$\boxed{N_r = mR(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta) + mg \cos \theta}. \quad (26)$$

- (d) Comme nous l'avons noté ci-dessus, l'équation pour θ ne dépend pas de l'accélération angulaire $\dot{\Omega}$. En revanche, celle-ci a un impact direct sur la force de réaction N_p qui contraint la bille à rester sur le cercle.

La condition pour que la bille reste en contact avec le cercle est que $N_r \geq 0$.

- (e) Si $\dot{\Omega} = 0$, on a $\ddot{\theta} = \Omega_0^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{R} \sin \theta$. En imposant la condition d'équilibre $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, on obtient

$$\boxed{\theta = 0 \vee \theta = \pi \text{ (équilibre instable)} \quad \text{or} \quad \theta = \pm \arccos\left(\frac{g}{R\Omega_0^2}\right) \text{ (équilibre stable)}} \quad (27)$$

- (f) Optionnel : Si un petit couple visqueux $-c\dot{\theta}$ agit autour du centre du cercle (équivalent à une force tangentielle $-(c/R)\dot{\theta}$), la projection tangentielle devient

$$mR(\ddot{\theta} - \Omega^2 \sin \theta \cos \theta) = -mg \sin \theta - \frac{c}{R}\dot{\theta}, \quad (28)$$

ou, plus clairement,

$$\boxed{mR^2\ddot{\theta} + c\dot{\theta} = mR^2\Omega(t)^2 \sin \theta \cos \theta - mgR \sin \theta}. \quad (29)$$