Mécanique analytique, Corrigé 0

Assistants et tuteurs :

jeanne.bourgeois@epfl.ch lorenzo.fioroni@epfl.ch leo.goutte@epfl.ch
luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch filippo.ferrari@epfl.ch mathias.findrihan@epfl.ch
nathan.brunet@epfl.ch jonas.daverio@epfl.ch remi.thomas@epfl.ch

Exercice 1 : Fonctions de plusieurs variables

a) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, qui à (x, y) associe $f(x, y)$. Sa différentielle est

$$df \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}\, dx \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}\, dy. \tag{1}$$

b) Si à présent y n'est plus une variable indépendante de x, mais une fonction $y : x \mapsto y(x)$, la fonction que l'on considère est différente. Appelons-la $\hat{f}$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ désormais, qui à x associe $\hat{f}(x) = f\big(x, y(x)\big)$. En vertu de la loi de composition des dérivées, le calcul de la dérivée de cette fonction est donné par :

$$\frac{d\hat{f}}{dx} \;=\; \frac{\partial f}{\partial x} \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}. \tag{2}$$

Par un léger abus de langage/notation, on notera aussi df/dx cette quantité, que l'on nommera <u>dérivée totale</u> de f par rapport à x. On notera que cette quantité diffère de la dérivée partielle $\partial f/\partial x$, et que la définition d'une telle dérivée totale n'a de sens que si y est définie explicitement comme dépendant de x (et alors la dérivée totale de f par rapport à x n'est autre que la dérivée usuelle de $f(x) = f(x, y(x))$ par rapport à x). L'abus de langage qui consiste à ajouter la notion de dérivée totale aux notions usuelles de dérivée et de dérivées partielles provient du raccourci qui consiste à employer une même notation pour une lettre muette y (variable indépendante de x) et la fonction $y : x \mapsto y(x)$, ou le même symbole pour les fonctions f (à deux variables) et $\hat{f}$ (à une variable). Cet abus de langage est néanmoins standard, et c'est pourquoi un exercice est utile à propos de cette notion. En cas de doute dans vos calculs, n'hésitez pas à revenir sur ce type de distinction entre f et $\hat{f}$. Enfin, pour répondre à la question de l'énoncé, et en vertu de cette définition d'une dérivée totale, la différentielle (« totale ») de f par rapport à x s'écrit alors

$$df \;=\; \left(\frac{\partial f}{\partial x} \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}\right) dx. \tag{3}$$

On notera qu'il n'apparaît ici plus qu'un déplacement infinitésimal dx, ce qui s'interprète en remarquant que le déplacement dy est contraint par la forme de $y(x)$ (au lieu d'être un déplacement indépendant) et qu'en fait il s'agit de la variation infinitésimale d'une fonction $\hat{f}$ à un seul paramètre.

c) À la lumière de la question précédente, il s'agit de comprendre la chose suivante : l'énoncé définit en fait une fonction

$$g : (x_1, x_2, x_3) \longmapsto g(x_1, x_2, x_3), \tag{4}$$

de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, qui a pour dérivées partielles $\partial_1 g = \partial g/\partial x_1$, $\partial_2 g = \partial g/\partial x_2$ et $\partial_3 g = \partial g/\partial x_3$, et une fonction

$$\tilde{g} : t \longmapsto \tilde{g}(t) = g\big(x(t),\, y(x(t), t),\, \dot{y}(x(t), t)\big), \tag{5}$$

où $x : t \mapsto x(t)$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et y est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de dérivées partielles $\partial_1 y$ et $\partial_2 y$. La dérivée totale $\dot{y} = dy/dt$ est définie comme la dérivée usuelle de $\tilde{y} : t \mapsto \tilde{y}(t) = y(x(t), t)$, c'est-à-dire $d\tilde{y}/dt = \dot{y}$. Cette dernière est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\dot{y} : t \longmapsto \dot{y}(t) = \partial_1 y\big(x(t), t\big)\,\frac{dx}{dt} + \partial_2 y\big(x(t), t\big). \tag{6}$$

Par composition des dérivées, on a

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{g}}{dt} &= \partial_1 g\,\frac{dx}{dt} + \partial_2 g\,\frac{d\tilde{y}}{dt} + \partial_3 g\,\frac{d\,\dot{\tilde{y}}}{dt} \\
&= \partial_1 g\,\frac{dx}{dt} + \partial_2 g\,\frac{d\tilde{y}}{dt} + \partial_3 g\,\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} \\
&= \partial_1 g\,\frac{dx}{dt} + \partial_2 g\left(\partial_1 y\,\frac{dx}{dt} + \partial_2 y\right) + \partial_3 g\left(\partial_1^2 y\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\,\partial_{12} y\,\frac{dx}{dt} + \partial_2^2 y + \partial_1 y\,\frac{d^2x}{dt^2}\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Par économie de notation (ou abus, selon le point de vue), on note ceci

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{\partial g}{\partial \dot{y}}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial x}\,\frac{d^2 x}{dt^2}\right). \tag{8}$$

Si x ne dépend pas de t, la dérivée de x par rapport à t s'annule : $dx/dt = 0$, d'où

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \dot{y}}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{9}$$

Comme g dépend explicitement de x, y et $\dot{y}$, mais seulement implicitement de t, par contre, on obtient

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0. \tag{10}$$

Si x dépend explicitement de t, alors la dérivée partielle $\partial g/\partial t$ est encore nulle (car g ne dépend qu'implicitement de t), mais la dérivée totale voit apparaître les termes supplémentaires de l'équation (8).
Remarque : vous allez voir dans le cours des exemples de fonctions avec lesquelles on travaillera tantôt dans l'espace abstrait, tantôt dans une restriction de cet espace paramétrée par le temps (voir cours sur le lagrangien).

d) La fonction $\mathcal{L}$ considérée ici s'appelle un Lagrangien. Nous allons voir au cours du semestre que cet objet est à la base d'une nouvelle formulation de la mécanique classique. Dans cet exercice, il s'agit simplement de se familiariser avec la dérivation par rapport à ses différents arguments. Comme vu précédemment, la fonction $\mathcal{L}$ dépend de q et de sa dérivée $\dot{q}$. Lors des dérivations partielles, ces deux variables sont à considérer comme indépendantes. Il vient

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\ddot{q} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -kq \tag{3}$$

et donc

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = m\ddot{q} + kq = 0 \tag{4}$$

que l'on peut réécrire

$$\ddot{q} + \frac{k}{m}q = \ddot{q} + \omega^2 q = 0 \tag{5}$$

où l'on reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.

Exercice 2 : Systèmes de coordonnées divers

1. Nous rappelons ici que pour une masse ponctuelle, l'énergie cinétique est définie par

$$E_{Cin} = \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{6}$$

où v est la norme du vecteur vitesse $\mathbf{v}$ de la masse. L'énergie potentielle de gravitation prend (pour des objets sur la surface de la Terre) la forme bien connue

$$E_{Pot,G} = mgh \tag{7}$$

où l'on prendra bien soin de donner le bon signe à h.

A) L'énergie totale du système est composée des énergies des deux masses m_1 et m_2. Traîtons d'abord la masse m_1. Sa vitesse étant horizontale selon x, son énergie cinétique vaut

$$E_{Cin,1} = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}^2 \tag{8}$$

La masse étant contrainte à se déplacer sur une droite horizontale, son énergie potentielle sera constante

$$E_{Pot,1} = C \tag{9}$$

Pour calculer l'énergie cinétique de m_2, il faut d'abord exprimer sa vitesse vectorielle en fonction des coordonnées x et θ. Calculons d'abord les coordonnées cartésiennes x_2 et y_2 de sa position en fonction de x et θ :

$$x_2 = x + L\sin\theta \tag{10}$$

$$y_2 = -L\cos\theta \tag{11}$$

Sa vitesse en coordonnées cartésiennes sera donc donnée par

$$v_2^x = \frac{d}{dt}x_2 = \dot{x} + \dot{\theta}L\cos\theta \tag{12}$$

$$v_2^y = \frac{d}{dt}y_2 = \dot{\theta}L\sin\theta \tag{13}$$

Le carré de la norme de la vitesse prend donc la forme

$$\mathbf{v}_2^2 = (v_2^x)^2 + (v_2^y)^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}L\cos\theta + \dot{\theta}^2L^2\cos^2\theta + \dot{\theta}^2L^2\sin^2\theta = \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}L\cos\theta + \dot{\theta}^2L^2 \tag{14}$$

et son énergie cinétique

$$E_{Cin,2} = \frac{m_2 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\theta}^2 L^2}{2} + m_2 \dot{x}\dot{\theta} L \cos\theta \tag{15}$$

L'énergie potentielle de gravitation de m_2 est donnée par mgh, où l'on doit être attentif à définir correctement le signe de h. Puisque nous savons que le minimum de l'énergie potentielle gravitationnelle se trouve lorsque la masse est au plus bas, autrement dit en $\theta = 0$, il vient

$$E_{Pot,2} = -mgL\cos\theta \tag{16}$$

Finalement, l'énergie totale est donc donnée par :

$$E_{Tot} = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2 \dot{\theta}^2 L^2}{2} + m_2 \dot{x}\dot{\theta} L \cos\theta - mgL\cos\theta \tag{17}$$

où l'on a fixé la constante (arbitraire) C à zéro.

B) Nous allons procéder de façon similaire au point précédent, à savoir, d'abord écrire les positions cartésiennes des masses en fonction des variables du problème, puis dériver et calculer les énergies. Avec un peu d'entraînement, ces étapes deviendront automatiques, mais il est important de savoir comment effectuer ces calculs de base si l'on se trouve confronté à un problème pour lequel il n'est pas immédiatement facile d'écrire un terme cinétique.

Pour m_1, on a

$$x_1 = L\sin\alpha \tag{18}$$

$$y_1 = -L\cos\alpha \tag{19}$$

$$v_1^x = \frac{d}{dt}x_1 = \dot{\alpha} L \cos\alpha \tag{20}$$

$$v_1^y = \frac{d}{dt}y_1 = \dot{\alpha} L \sin\alpha \tag{21}$$

Et donc

$$E_{Cin,1} = \tfrac{1}{2} m_1 L^2 \dot{\alpha}^2 \tag{22}$$

On reconnaît ici la relation entre la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ et la vitesse tangentielle d'un mouvement circulaire $v_T = \dot{\alpha} L$. L'énergie potentielle de m_1 a été calculée au point A) et vaut

$$E_{Pot,1} = -m_1 g L \cos\alpha \tag{23}$$

Pour m_2, on obtient

$$x_2 = L\sin\alpha + l\sin(\alpha + \beta) \tag{24}$$

$$y_2 = -L\cos\alpha - l\cos(\alpha + \beta) \tag{25}$$

$$v_2^x = \frac{d}{dt}x_2 = \dot{\alpha} L \cos\alpha + (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) l \cos(\alpha + \beta) \tag{26}$$

$$v_2^y = \frac{d}{dt}y_2 = \dot{\alpha} L \sin\alpha + (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) l \sin(\alpha + \beta) \tag{27}$$

$$E_{Cin,2} = \tfrac{1}{2} m_2 \Big(\dot{\alpha}^2 L^2 + (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 l^2 + 2\dot{\alpha}(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) L l \big(\cos\alpha \cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \sin(\alpha + \beta) \big) \Big) \tag{28}$$

$$E_{Pot,2} = -m_2 g\big(L\cos\alpha + l\cos(\alpha+\beta)\big) \tag{29}$$

Et l'on obtient finalement :

$$E_{Tot} = \tfrac{m_1+m_2}{2}L^2\dot\alpha^2 + \tfrac{(\dot\alpha+\dot\beta)^2}{2}l^2 m_2 + m_2\dot\alpha(\dot\alpha+\dot\beta)Ll\cos\beta \tag{11}$$

$$-(m_1+m_2)gL\cos\alpha - m_2 gl\cos(\alpha+\beta) \tag{12}$$

Exercice 3 : Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

Les valeurs propres de M sont obtenues en résolvant l'équation :

$$\begin{aligned} \det(M-\lambda\mathbb{1}) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad (1-\lambda)^2 - 2i = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \lambda_1 = 2+i \text{ et } \lambda_2 = -i \end{aligned}$$

On peut aisément déterminer deux vecteurs propres $\vec{v}_{1,2}$ correspondant aux valeurs propres $\lambda_{1,2}$ en résolvant :

$$M\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$$

$\vec{v}_1 = (1, 1-i)^T$ et $\vec{v}_2 = (1, -1+i)^T$ sont deux vecteurs propres possibles correspondant aux valeurs propres λ_1 etλ_2 respectivement.

Exercice 4 : Analyse dimensionnelle : la pendule

On remarque que g est une accélération. Elle a les dimensions d'une longueur divisée par un temps au carré : LT^{-2}. Les deux autres grandeurs ont les dimensions d'une longueur est d'une masse respectivement. Si on multiplie les trois grandeurs élevées à des puissances à déterminer, on obtient les dimensions suivantes :
$l^x m^y g^z = L^x M^y L^z T^{-2z} = L^{x+z}M^yT^{-2z}$
On souhaite obtenir une période, donc un temps T. On pose donc

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \\ -2z=1 \end{cases}$$

d'où $z = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$.
La période sera donc $T = C\sqrt{\frac{l}{g}}$ et C est une constante sans dimension. En effet, on sait que pour des petits angles d'oscillation, on a $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.
En physique, très souvent les constantes sans dimensions qui interviennent dans l'analyse dimensionnelle, sont de l'ordre de l'unité. Si dans une théorie, une telle constante doit prendre une valeur très grande ou très petite (par rapport à 1) pour expliquer les observations expérimentales, alors on dit que la théorie n'est pas "naturelle". Dans ce cas, souvent, une meilleure théorie existe.

Exercice 5 : Analyse dimensionnelle : Energie de l'explosion d'une bombe atomique

Il est raisonnable que, à l'instant zéro, l'énergie est concentrée dans un petit volume et produise dans les instants qui suivent une onde de choc qui s'étale avec une forme sphérique.

Les quantités physiques en question sont r, t, E et ρ. Les dimensions des deux dernières sont :
$[E] = ML^2T^{-2}$
$[\rho] = ML^{-3}$
On peut donc poser que le rayon r de l'explosion est fonction de t, E et ρ.
On pose :

$$r = C\rho^x E^y t^z$$

L'analyse dimensionnelle donne :

$$L = (ML^{-3})^x (ML^2T^{-2})^y T^z$$

D'où on déduit :

$$\begin{cases} 1 = -3x + 2y \\ 0 = x + y \\ 0 = -2y + z \end{cases}$$

On peut résoudre par substitution :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = \frac{1}{5} \\ z = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Donc $r = C\rho^{-\frac{1}{5}} E^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}}$.
On peut résoudre pour E : $E = C' \frac{r^5 \rho}{t^2}$ où C' est une autre constante sans dimension. A remarquer que si $C \approx 1$, alors $C' \approx 1$ aussi. Il s'avère que la constante C' dans ce cas est très proche 1, si on la dérive d'une théorie physique. De la figure, on estime $r \approx 120$ m à $t = 0.025$ sec. On a donc :

$$E = C' \cdot 4.98 \cdot 10^{13} \text{ Joules}$$
$$E \approx 5 \cdot 10^{13} \text{ Joules}$$
$$E \approx 12 \text{ kilotonnes}$$

La vraie énergie de cette bombe était de 20 kilotonnes, en bon accord avec cette analyse dimensionnelle.