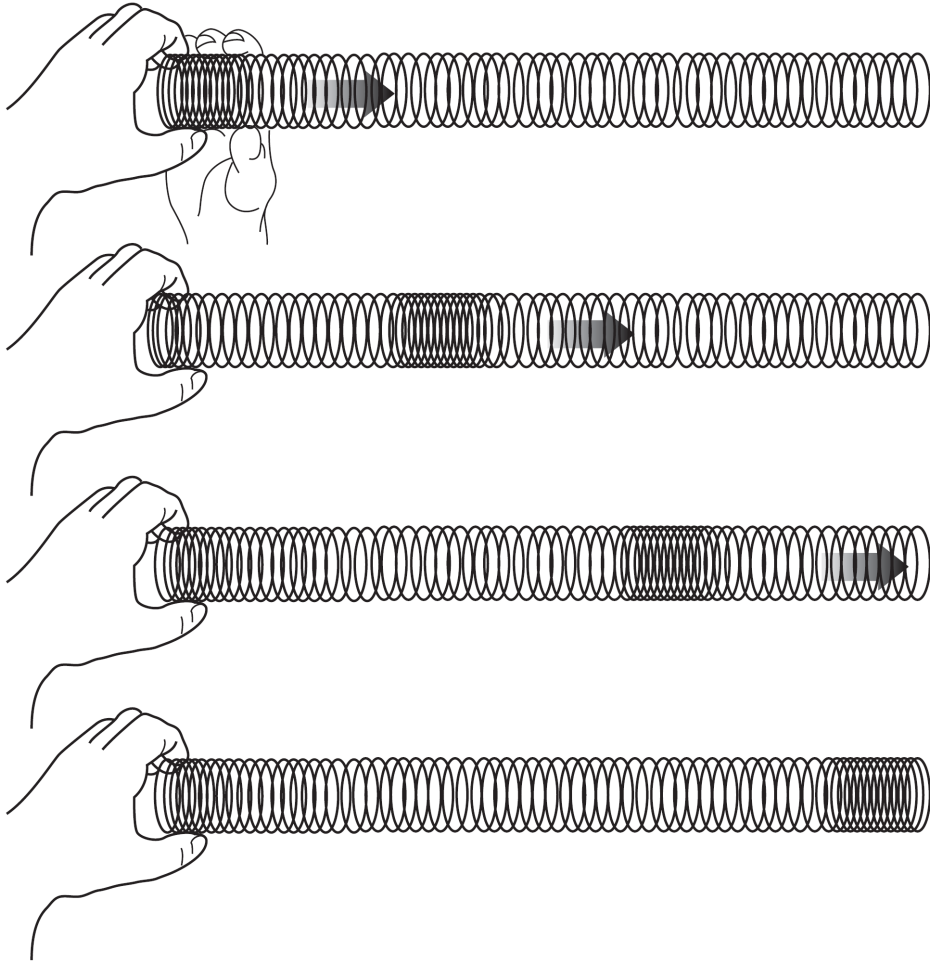
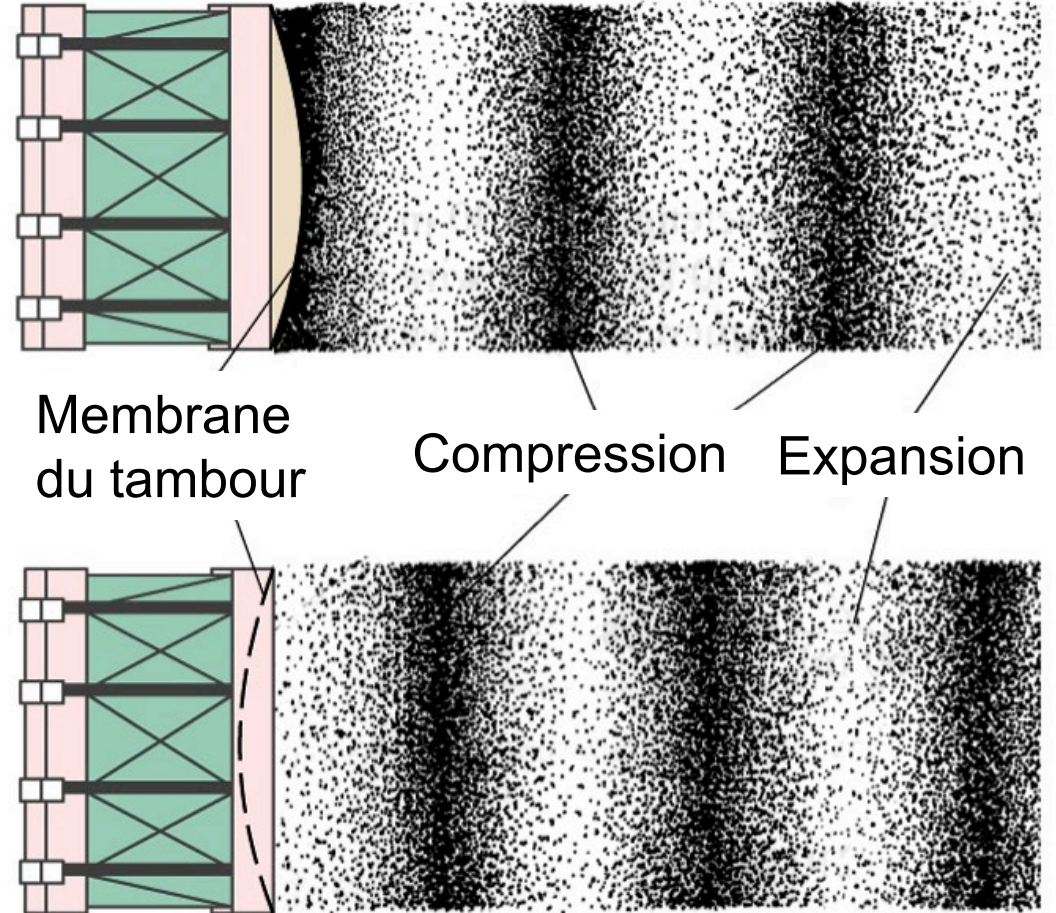


Semaine 10:
Ondes

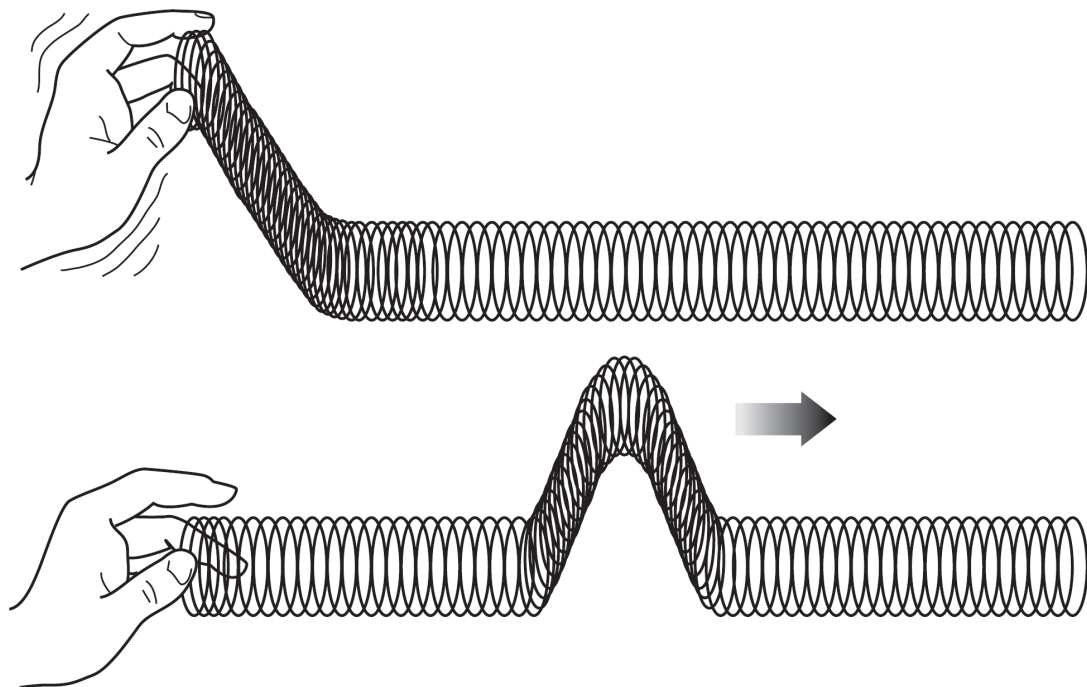
Onde longitudinale dans un ressort



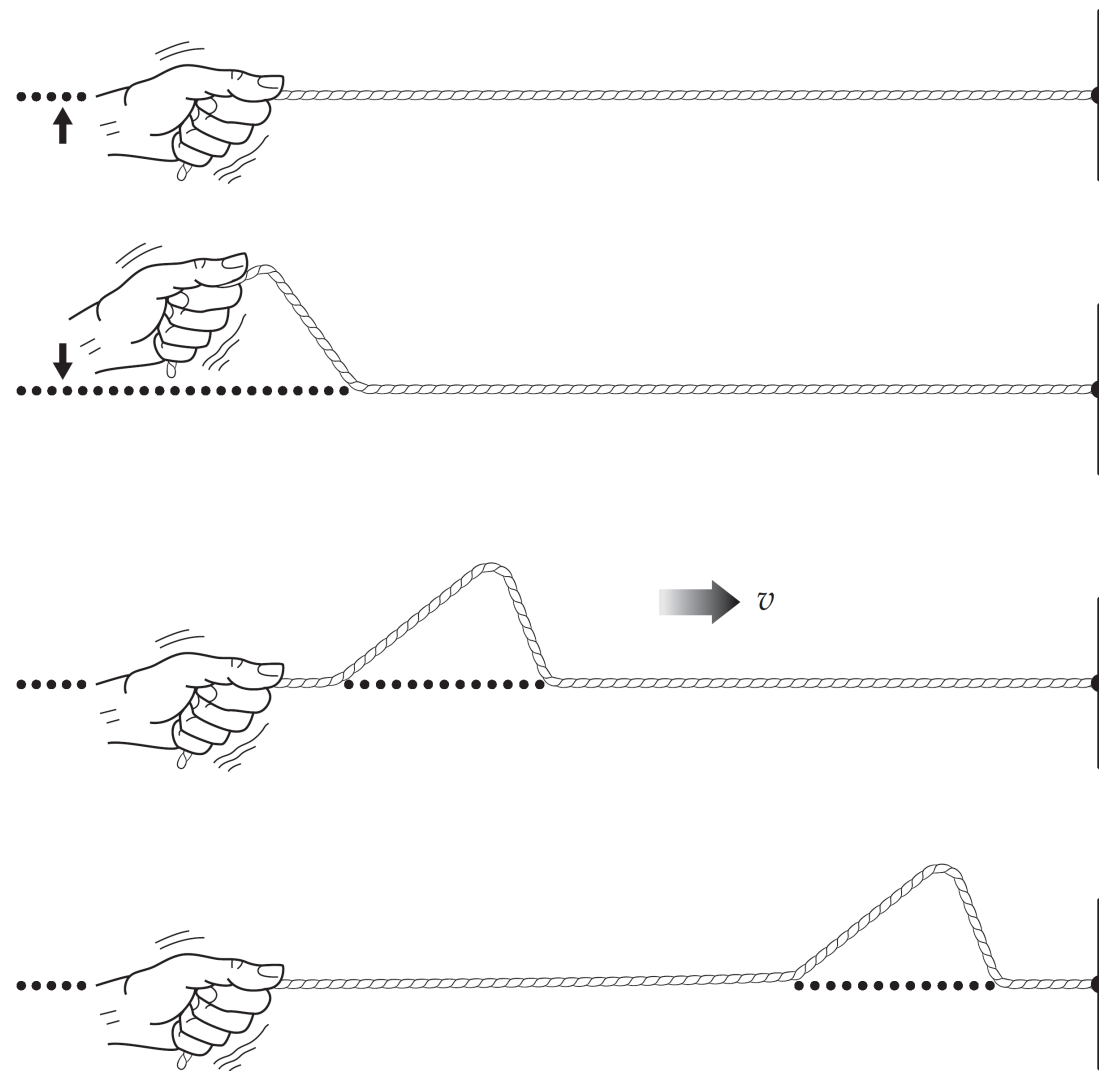
Onde longitudinale dans un gas



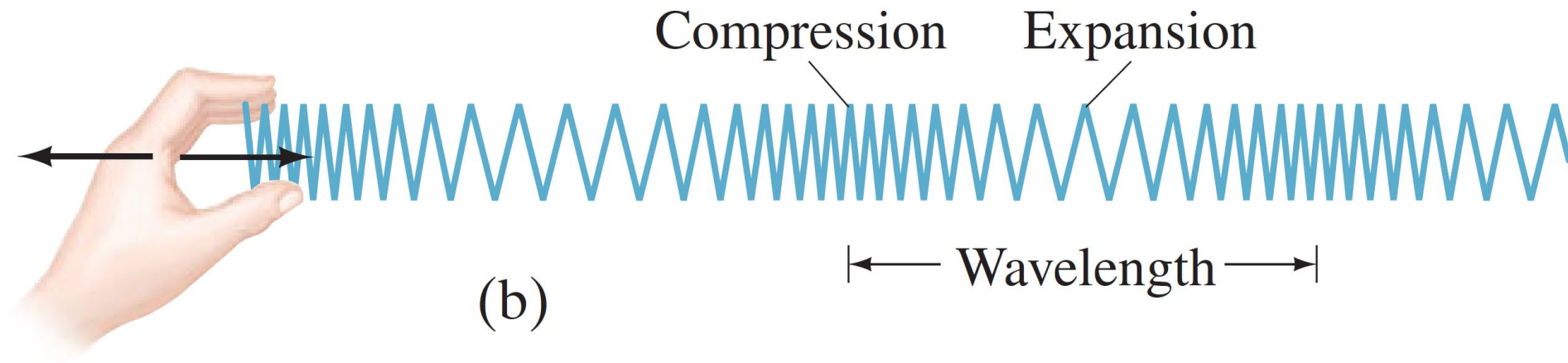
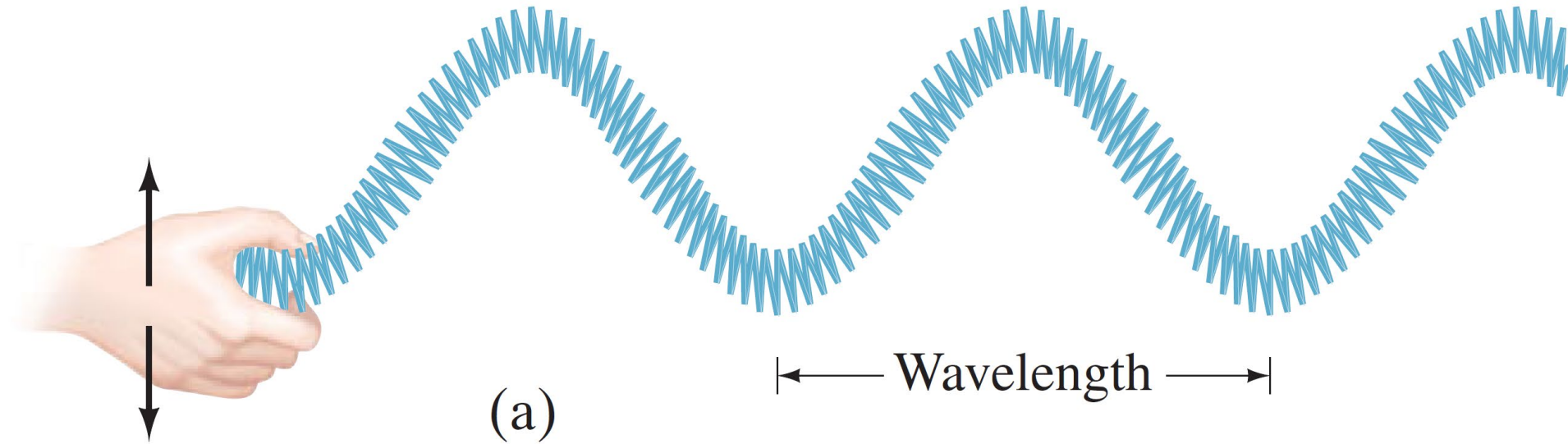
Onde transversal dans un ressort



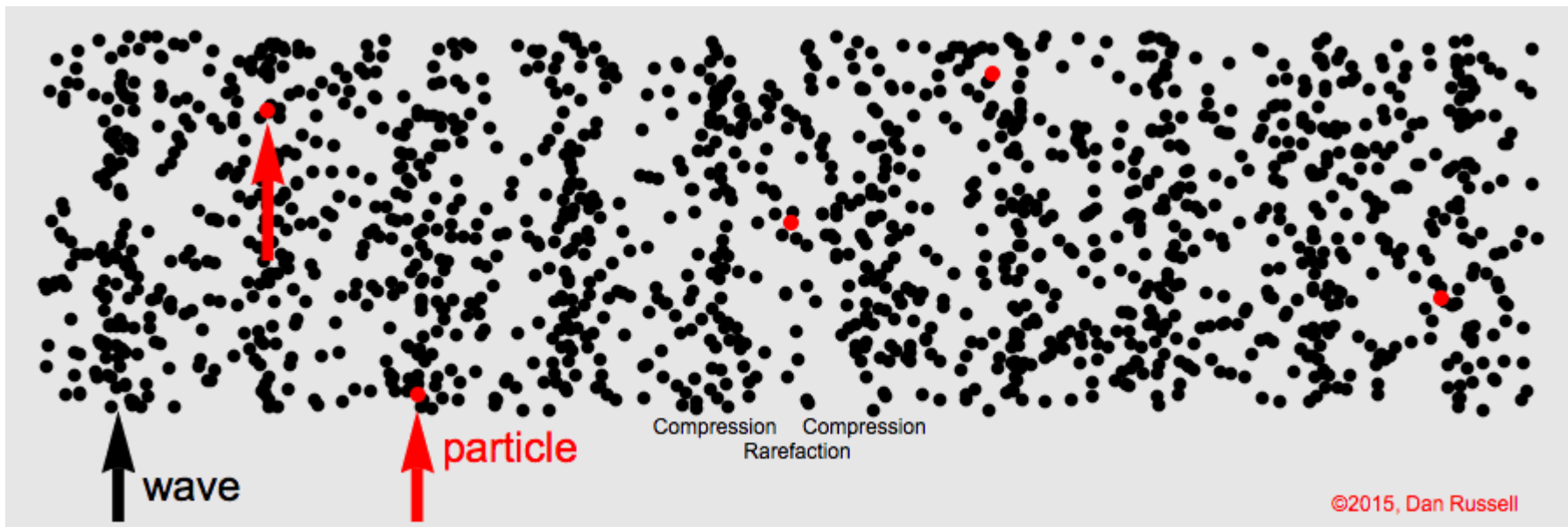
Onde transversal dans une corde



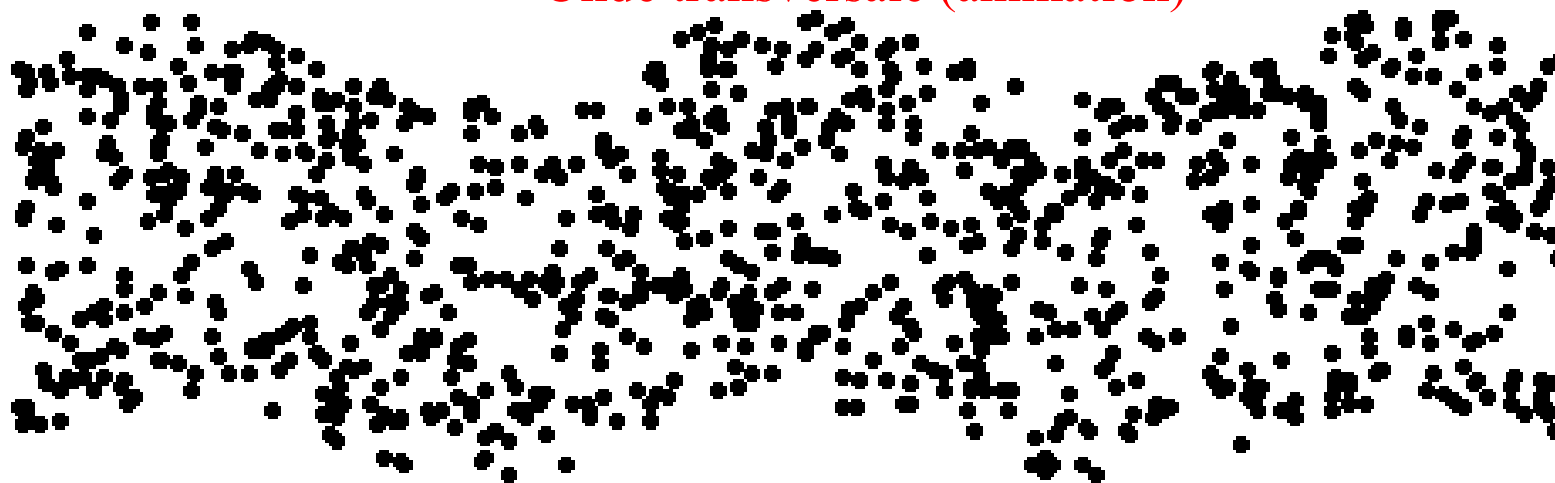
Onde longitudinale et onde transversal dans un ressort



Onde longitudinale (animation)

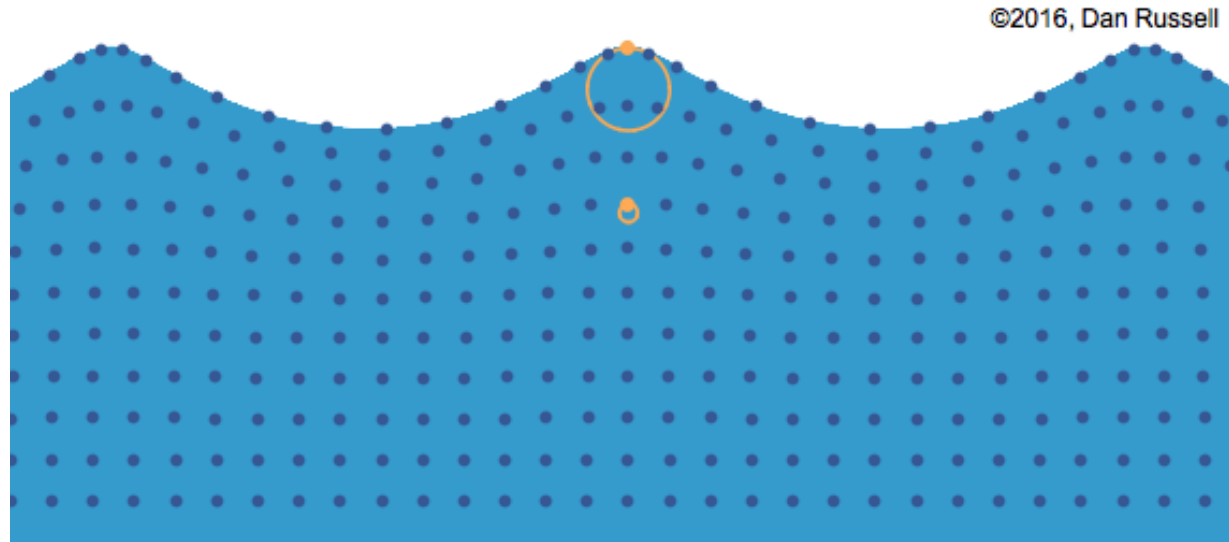


Onde transversale (animation)



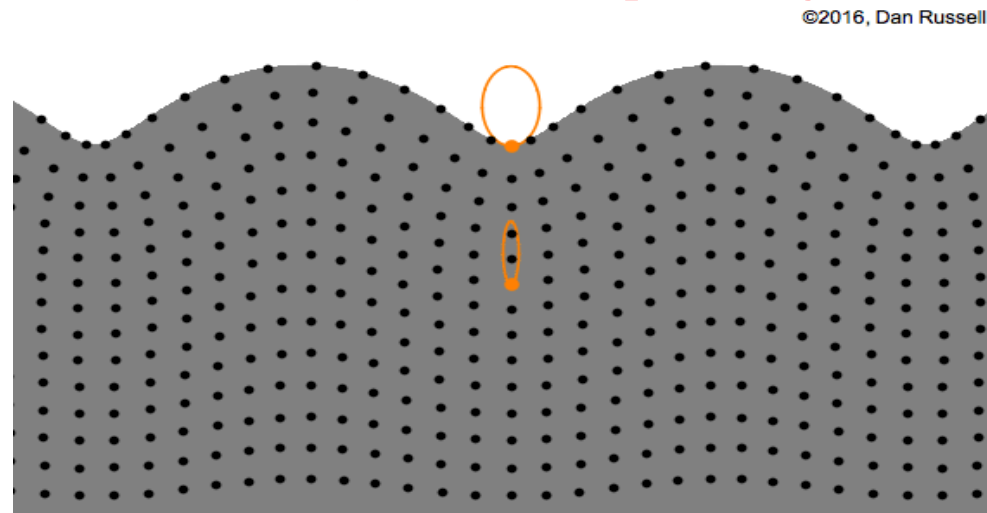
Onde de surface dans un liquide (transversale plus longitudinale) (animation)

Circulaire

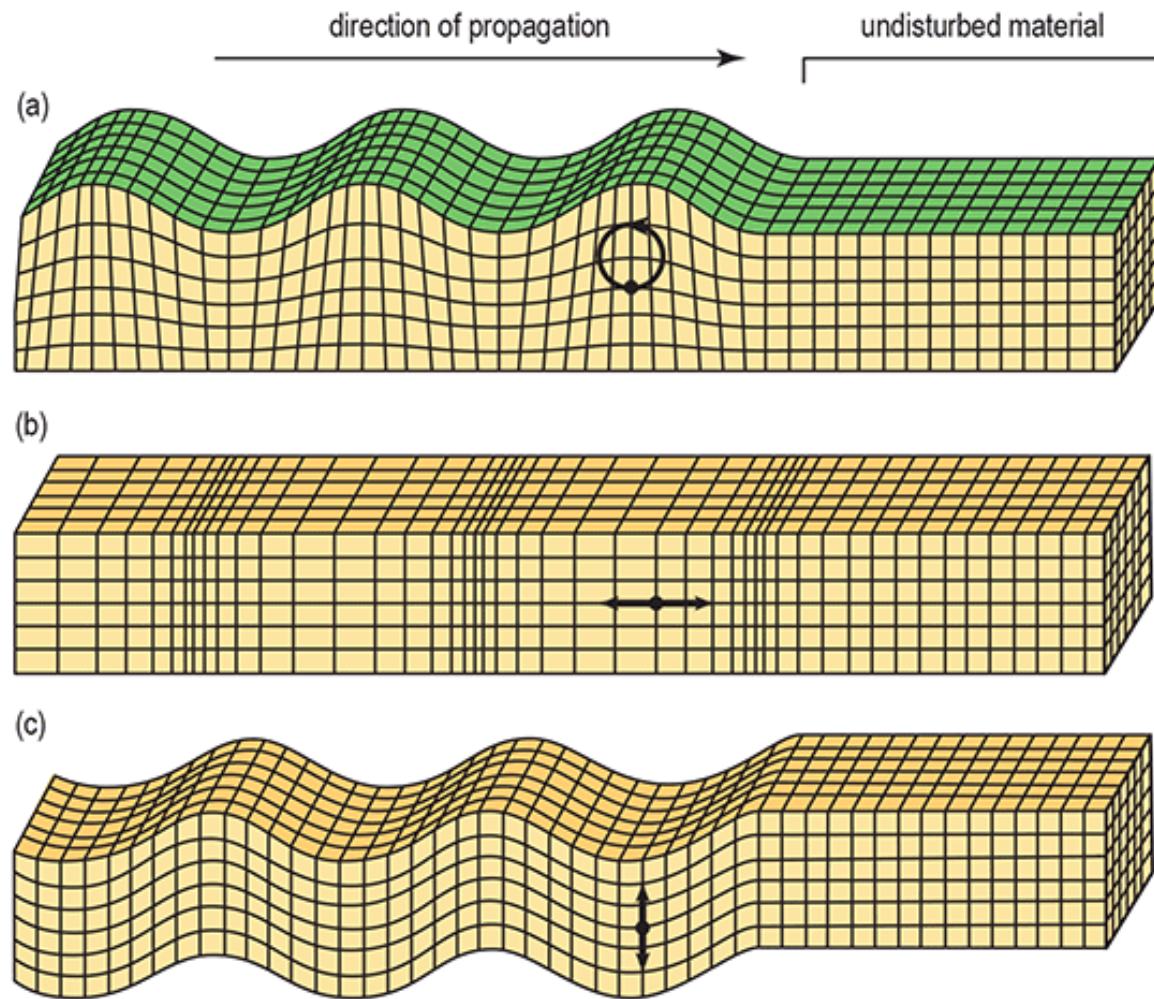


Onde de surface dans un solide (transversale plus longitudinale) (animation)

Eliptique



Ondes dans un solide



Onde de «surface»

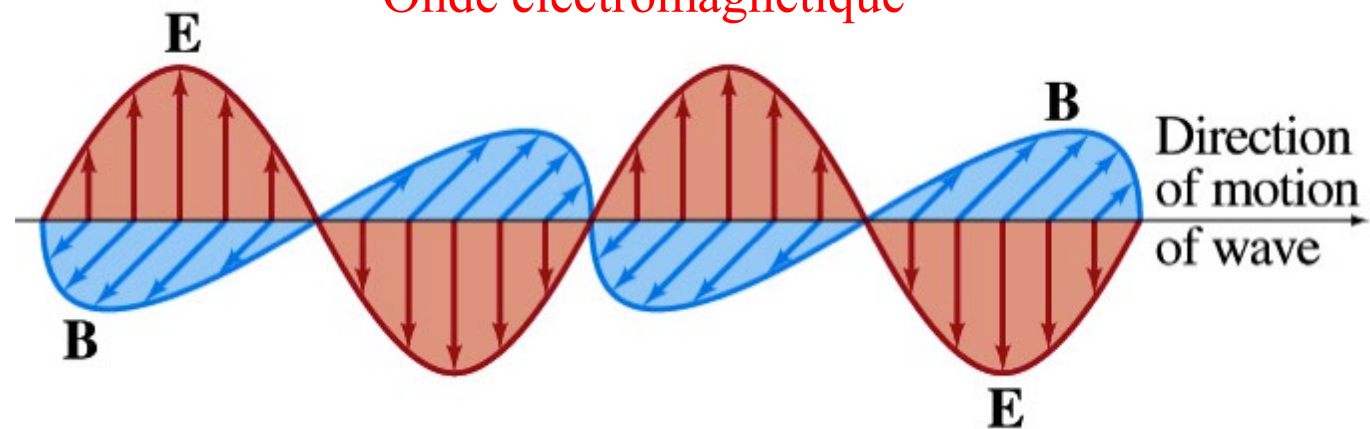
Onde longitudinale

Onde transversale

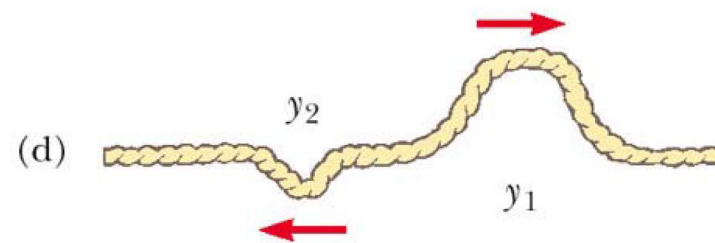
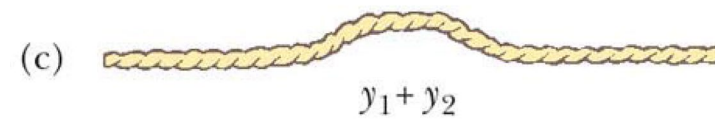
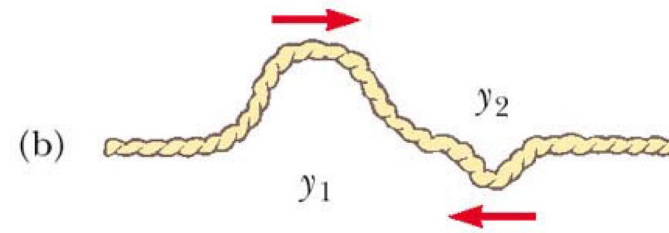
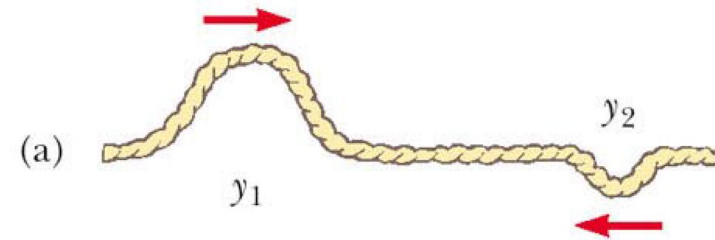
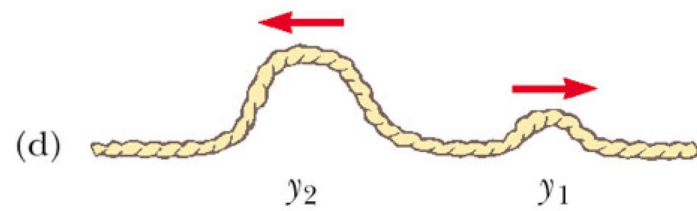
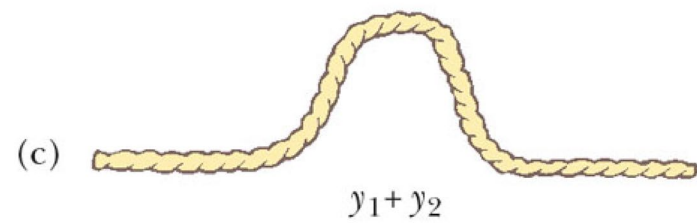
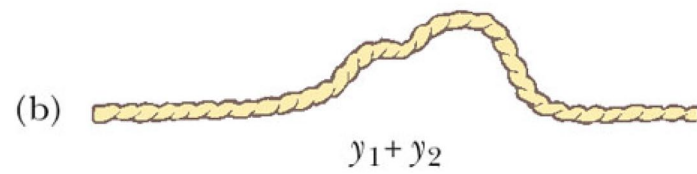
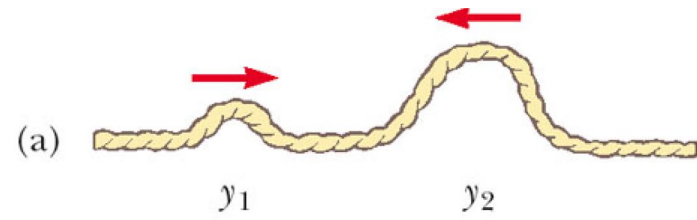
Onde de surface dans un liquide



Onde électromagnétique

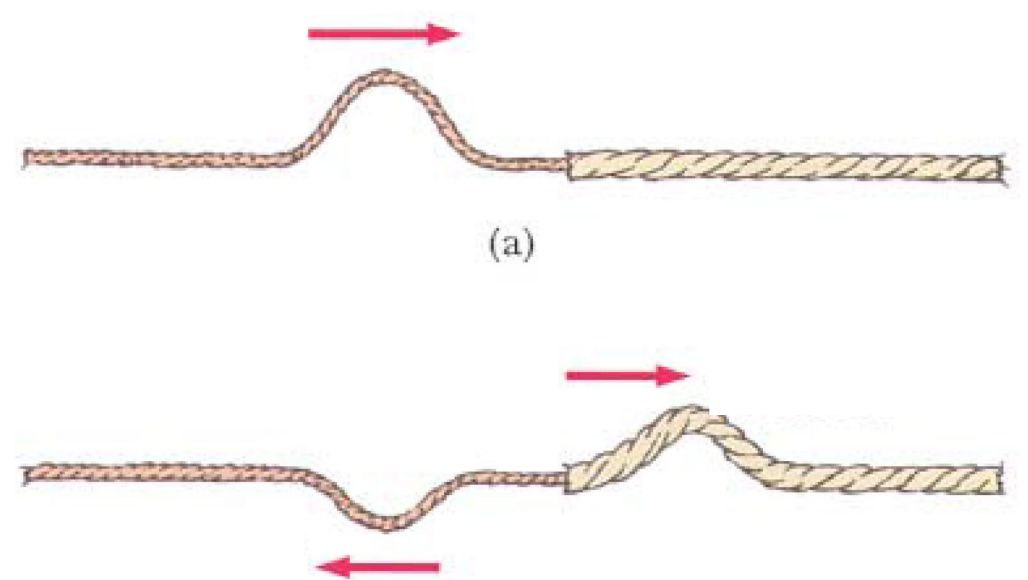
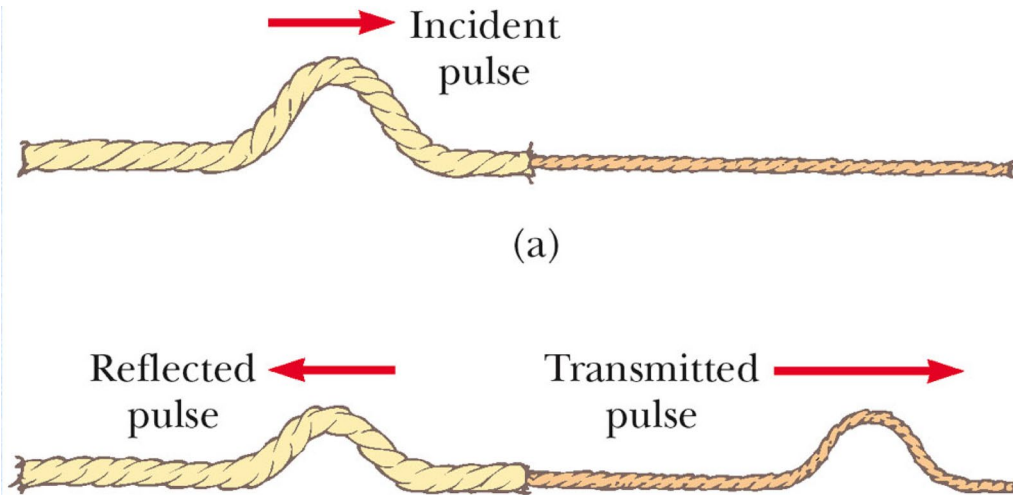


Note: Superposition «sans interaction» de deux ondes



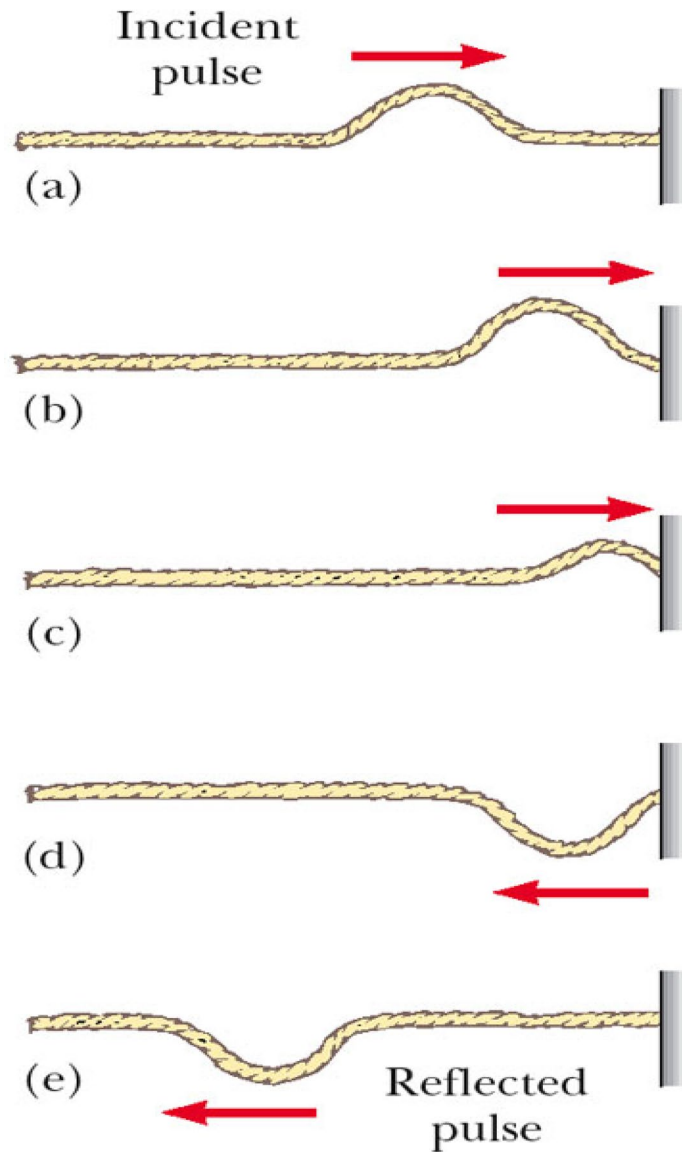
Note: Transmission et réflexion d'une onde à l'interface de deux «milieux» de propagation différentes

L'onde peut changer de signe et aussi de vitesse.

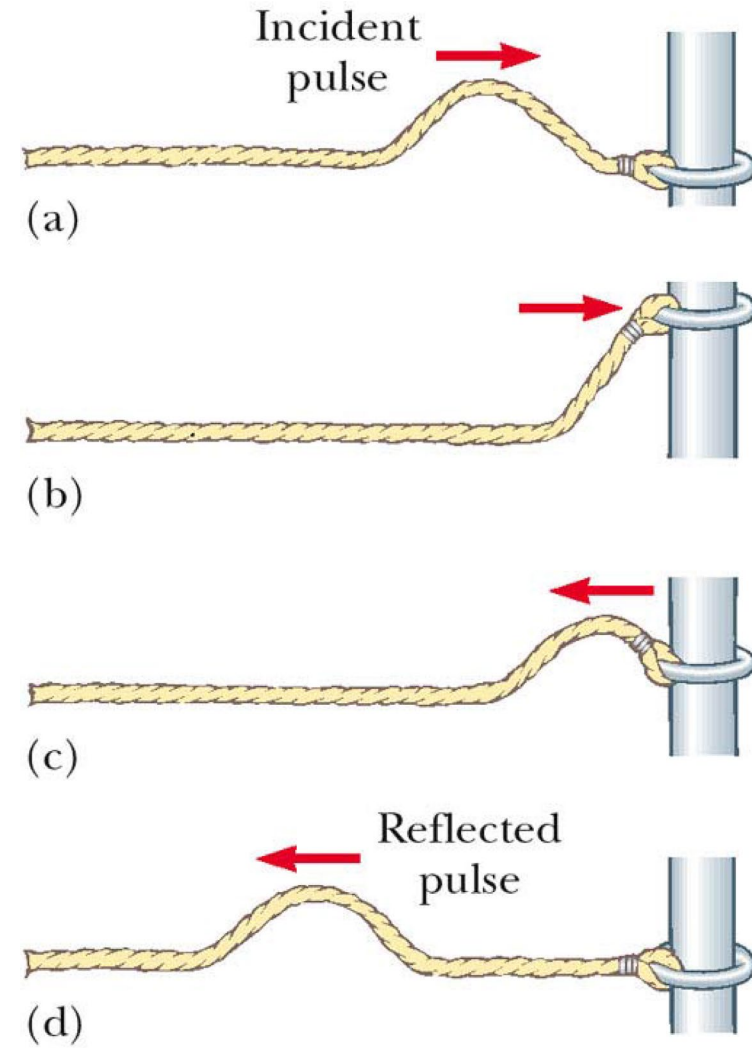


Note: Réflexion avec extrémité fixe ou libre

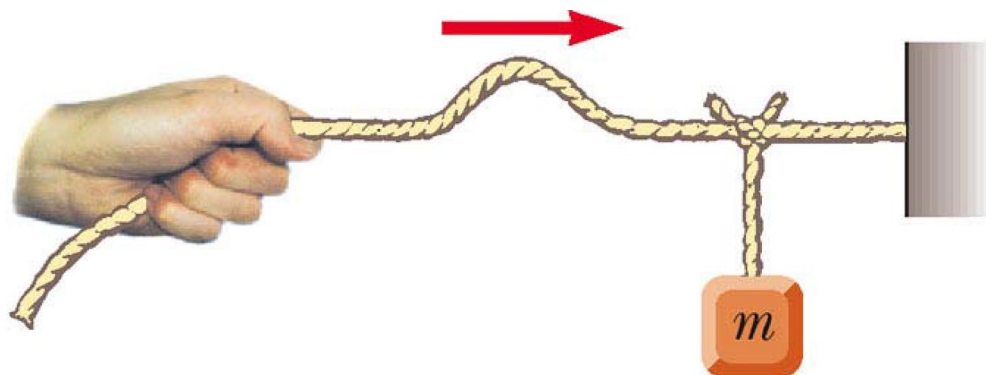
Extrémité fixe



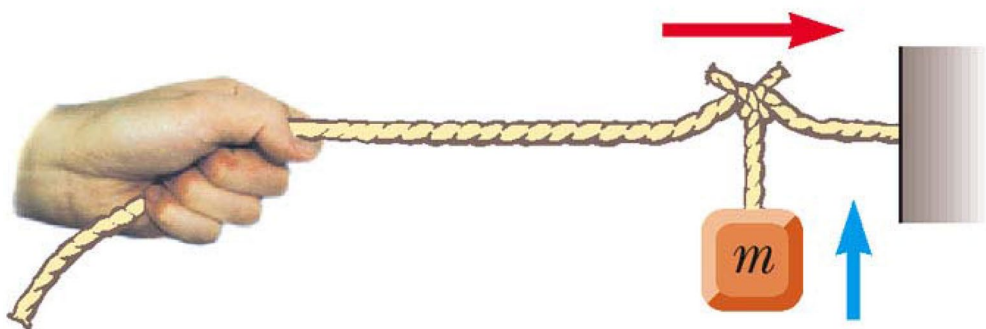
Extrémité libre



Note: Dans une onde il y a un **transport d'énergie**
(sans transport «net» de masse)



(a)



(b)

Le fait que la masse m se déplace vers le haut
(et acquière donc de l'énergie potentielle) est la
«preuve» que l'onde transporte de l'énergie.

Equation différentielle d'onde unidimensionnelle

Définition: une **perturbation** se propage comme une **onde** sans déformation et avec une vitesse déterminée v si:

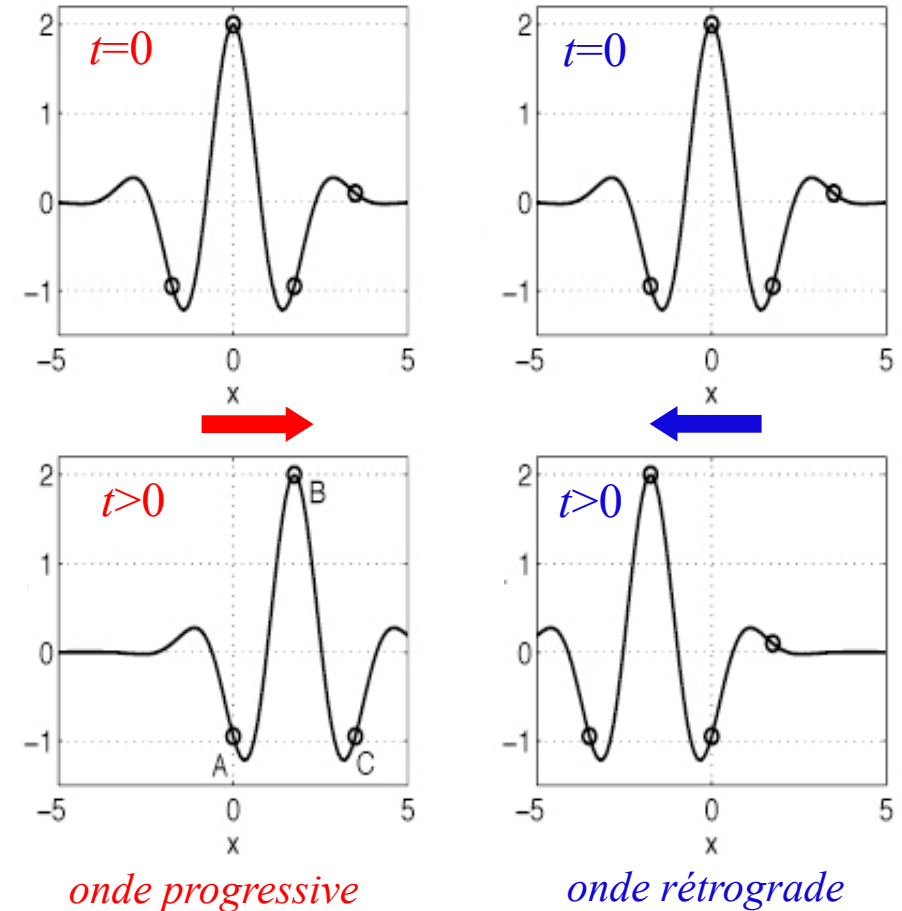
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Equation de d'Alembert

unidimensionnelle ou équation différentielle du mouvement ondulatoire unidimensionnelle

La solution générale de l'équation de d'Alembert est:

$$\psi(x, t) = f(x - vt) + f(x + vt)$$



Equation différentielle du mouvement ondulatoire unidimensionnelle:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Solution générale:

$$\psi(x, t) = f(x - vt) + f(x + vt)$$

Démonstration:

Posons: $u = x \pm vt$

\Rightarrow

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \pm v \frac{\partial \psi}{\partial u}$$

Prenant les dérivées secondes on obtient

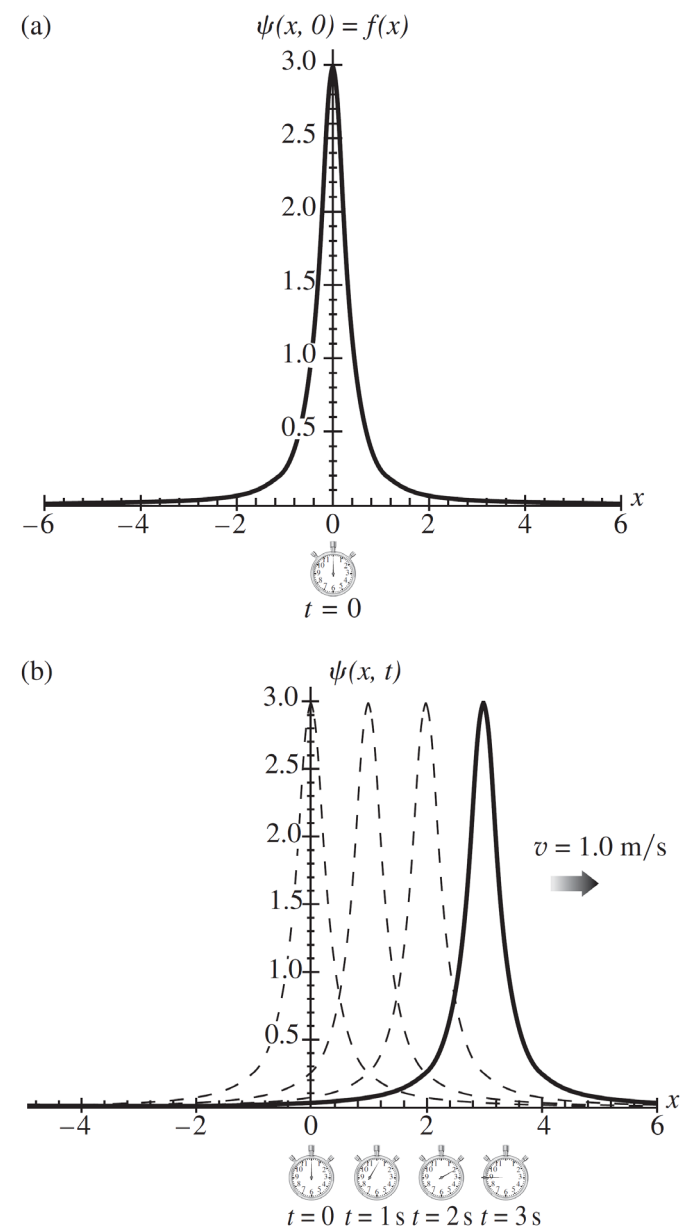
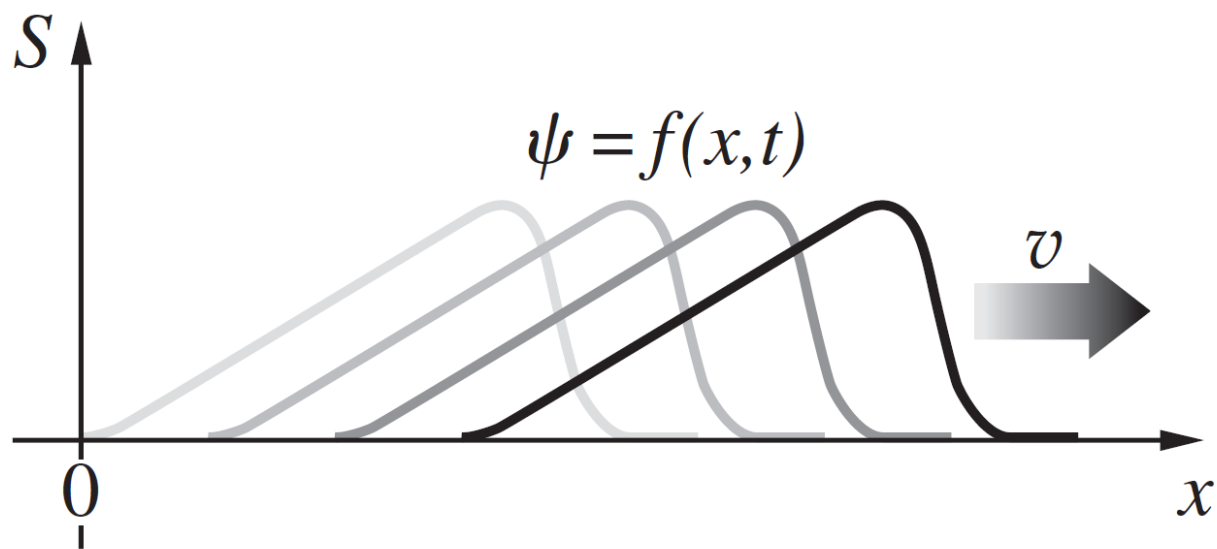
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}$$

\Rightarrow

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Propagation de la perturbation sans déformation



L'équation différentielle d'onde tridimensionnelle

1D

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

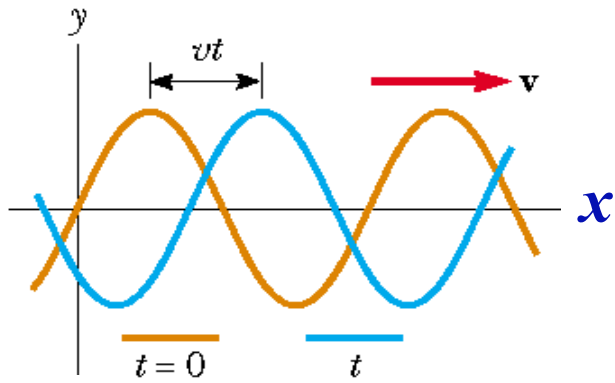
Equation de d'Alembert
unidimensionnelle ou
équation différentielle du
mouvement ondulatoire
unidimensionnelle

3D

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = v^2 \nabla^2 \psi$$

Equation de d'Alembert
tridimensionnelle ou
équation différentielle du
mouvement ondulatoire
tridimensionnelle

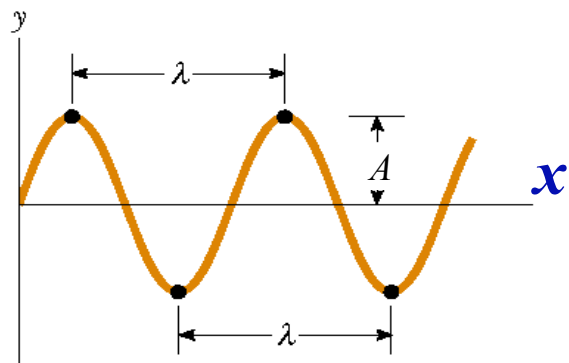
Onde plane sinusoidale avec propagation selon x



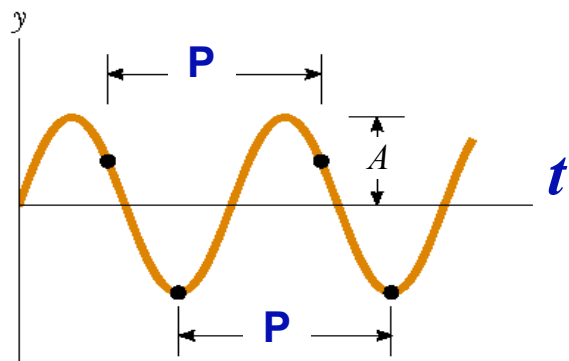
Onde sinusoidale (formes equivalents):

$$\psi(x,t) = A \sin[k(x \pm vt)] = A \sin(kx \pm \frac{2\pi}{\lambda} vt) = A \sin(\frac{2\pi}{\lambda} (x \pm vt)) = A \sin(kx \pm \omega t)$$

(forme plus usuelle)



(a)



λ

Longueur d'onde [m]

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Nombre d'onde [m^{-1}]

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{P} = \lambda f = \frac{\omega}{k}$$

Vitesse de phase [m/s]

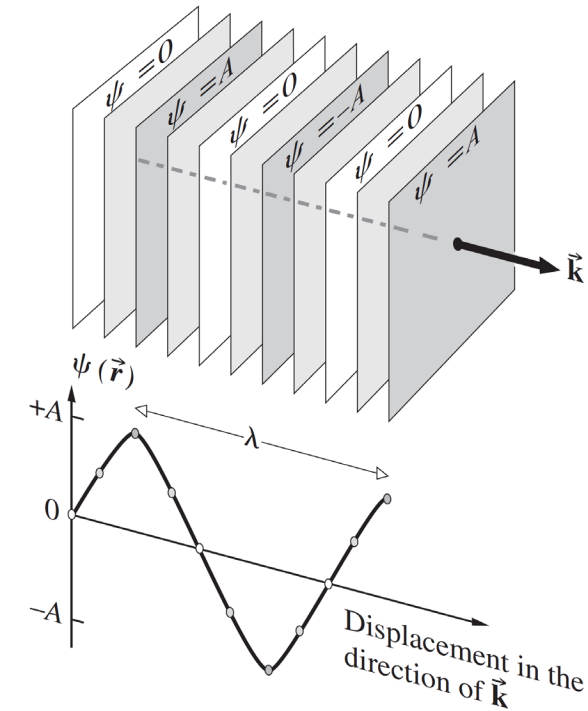
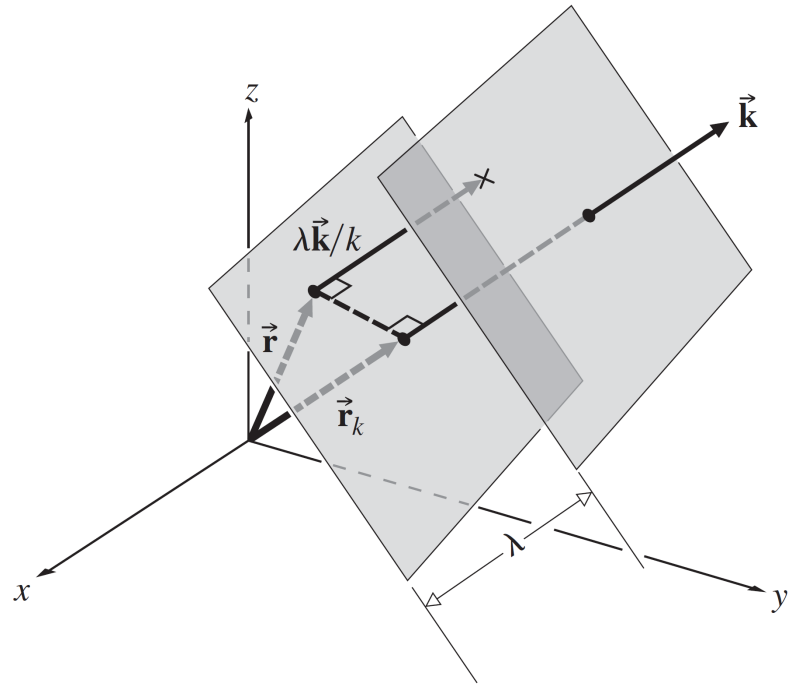
$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Frequence [Hz]

$$P = \frac{1}{f}$$

Periode [s]

Ondes planes avec direction de propagation arbitraire



Onde sinusoïdale plane se propageant suivant l'axe $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)$$

Vecteur d'onde \mathbf{k} :

$$\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{k}}$$

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = 2\pi/\lambda = \omega/v$$

\Rightarrow

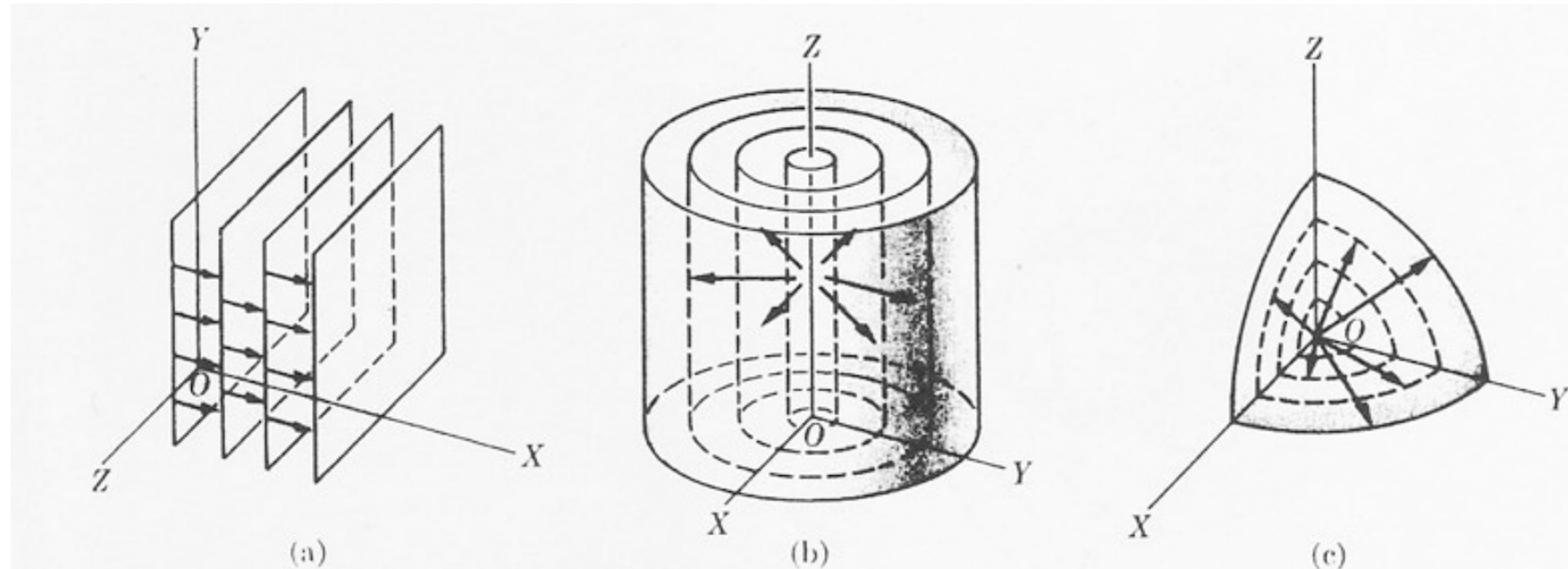
$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t) = A \sin(k_x x + k_y y + k_z z \pm \omega t)$$

$$\text{(forme complexe: } \psi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)})$$

Ondes planes, cylindriques, et sphériques

Note: Toute onde tridimensionnelle peut être exprimée sous la forme d'une combinaison d'ondes planes

Surfaces d'onde (même phase)



plane

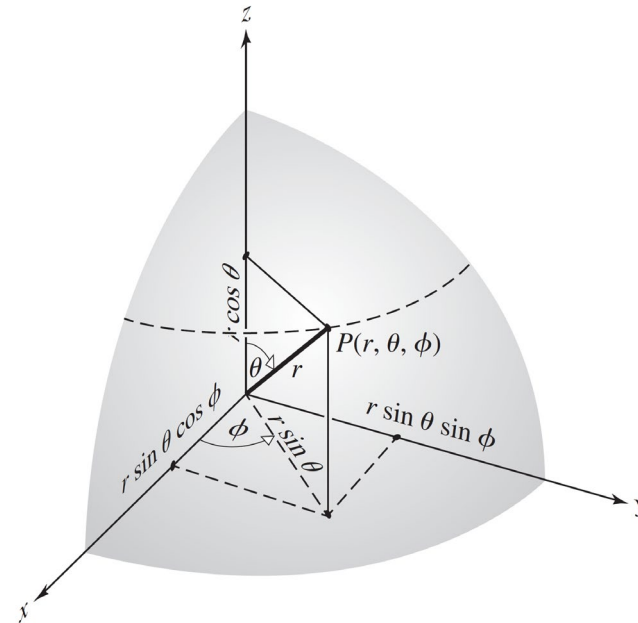
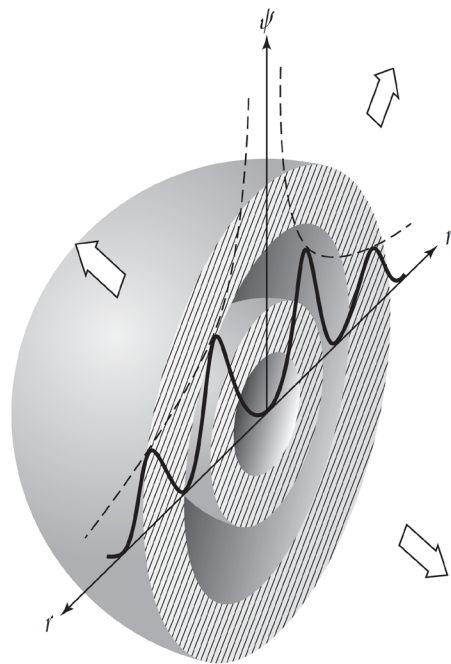
cylindrique

sphérique

Les ondes cylindriques et sphériques sont aussi solutions de l'équation de d'Alembert:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = v^2 \nabla^2 \psi$$

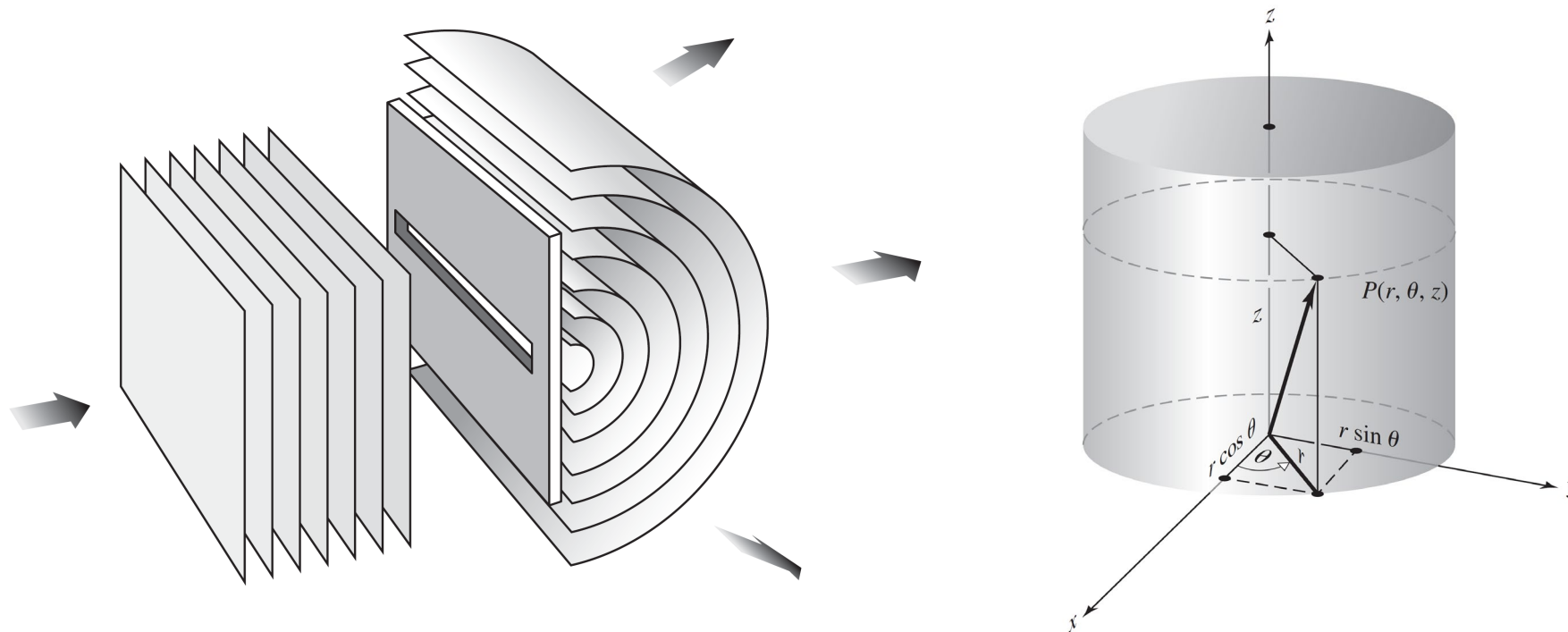
Source ponctuelle: onde sphérique



$$\psi(r, t) = \frac{A}{r} \cos(kr \pm \omega t) = \frac{A}{r} \cos(k(r \pm vt))$$

En forme complexe: $\psi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr \pm \omega t)}$

Source très fine: onde cylindrique



$$\psi(r, t) = \frac{A}{\sqrt{r}} \cos(kr \pm \omega t) = \frac{A}{\sqrt{r}} \cos(k(r \pm vt))$$

En forme complexe:
$$\psi(r, t) = \frac{A}{\sqrt{r}} e^{i(kr \pm \omega t)}$$

Notes:

1) Intérêt de la forme complexe:

profiter de la facilité avec laquelle les exponentielles complexes peuvent être manipulées :
addition/soustraction, multiplication/division par des quantités réelles,
différentiation/intégration par des variables réelles.

Après être arrivé au résultat final il faut prendre la partie réelle.

2) Principe de superposition:

Si ψ_1 et ψ_2 sont solutions de l'équation d'onde \Rightarrow

$(\psi_1 + \psi_2)$ est aussi solution de l'équation d'onde

3) Superposition sans "dommages permanents":

Lorsque deux ondes distinctes arrivent à la même place dans l'espace
ils se chevauchent sans perturber l'une ou l'autre onde.

La perturbation résultante à chaque point dans la région de chevauchement
est la somme algébrique des ondes. Une fois avoir passé à travers la région où les
deux ondes coexistent, chacun va sortir et s'en aller sans être affecté par la rencontre.

Décomposition de Fourier d'une onde

Onde de forme "arbitraire" (paquet d'onde):

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kx \pm \omega t)} dk$$

avec:

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, 0) e^{-ikx} dx$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Nombre d'onde [m⁻¹]
 λ Longueur d'onde [m]

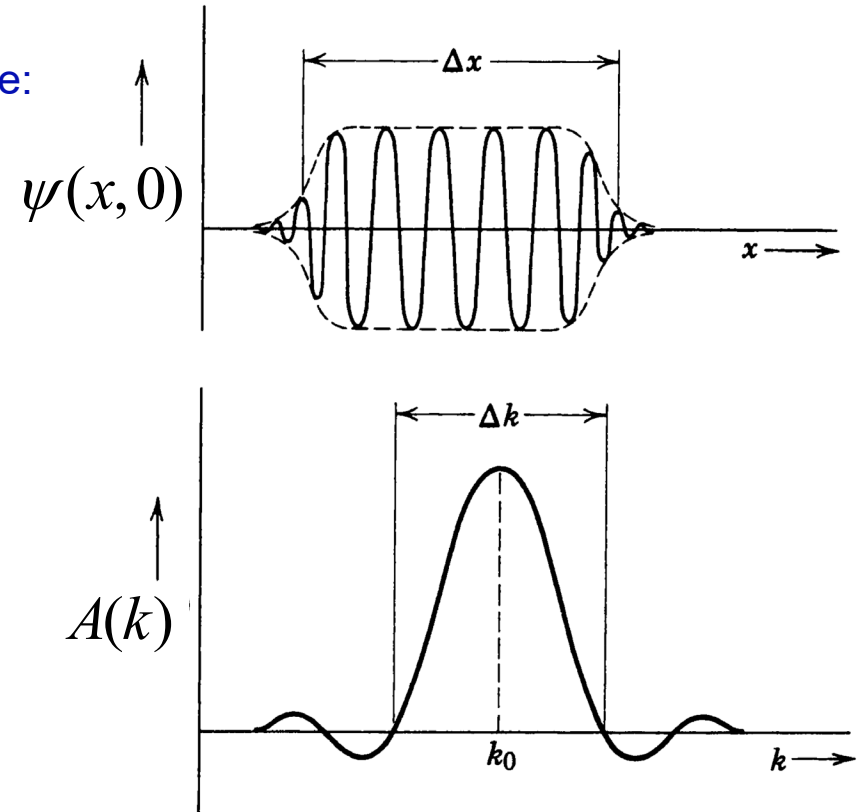
(somme infinie et "continue" d'ondes sinusoïdales)

(animation)



Une onde **non-périodique** est la **somme** d'ondes sinus et cosinus sur un **continuum** de valeurs de k et ω .

Exemple:



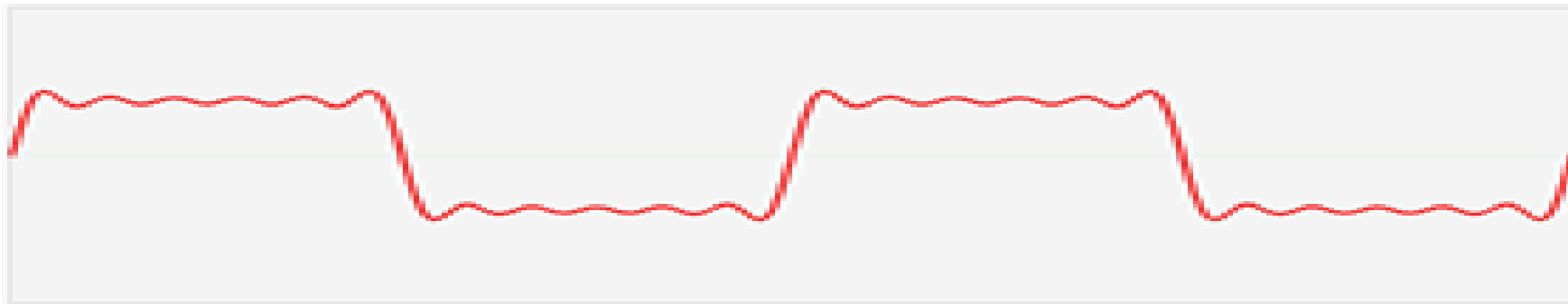
Onde de forme "arbitraire" mais "périodique" dans l'espace:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-in(k_0 x \pm \omega t)} \quad \text{avec:} \quad A_n = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} \psi(x, 0) e^{-ink_0 x} dx \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$$

(somme infinie mais "discrète" d'ondes sinusoïdales)

Une onde **périodique** peut s'exprimer comme une **somme discrète**, à priori infinie, d'ondes sinus et cosinus.

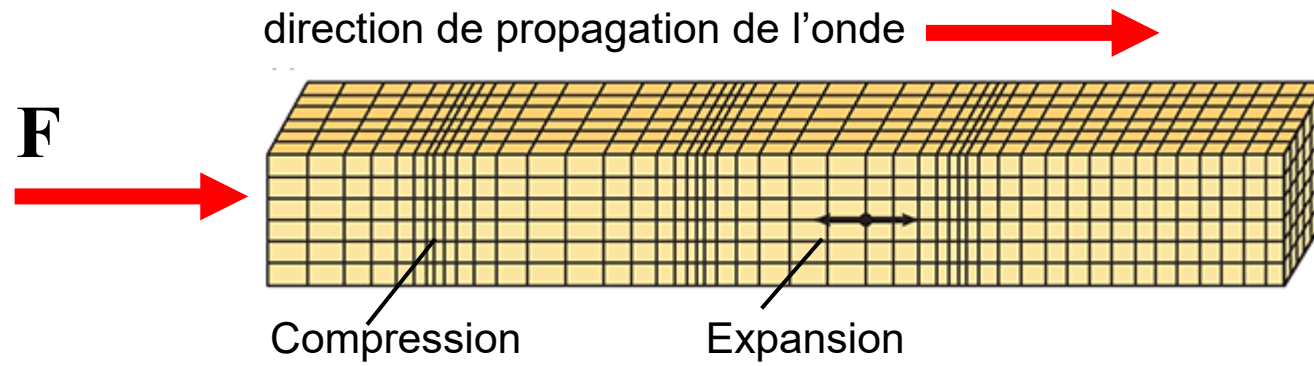
Exemple:



(animation)

Onde mécanique longitudinale dans un barreau solide

Déformation à l'extrémité du barreau solide (p.e. en le frappant avec un marteau).
Hypothèse: la déformation se propage le long du barreau (**onde longitudinale**)



$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{avec } v = \sqrt{Y / \rho}$$

ξ : Déplacement ξ [m]

Y : Module d'élasticité de Young [N/m²=Pa]

ρ : Densité [kg/m³]

v : Vitesse de l'onde [m/s]

Démonstration:

Contrainte σ sur une section du barreau A [$\text{N/m}^2 = \text{Pa}$]: $\sigma \triangleq \frac{F}{A}$

Relation entre la contrainte σ (stress) et la déformation relatif ε (strain): $\varepsilon \triangleq \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{Y}$

(Loi de Hooke, valide dans le limite élastique)

ε : déformation relatif [-] Y : Module d'élasticité de Young [$\text{N/m}^2 = \text{Pa}$]

Déplacement: ξ

Déformation relatif: $\varepsilon = \partial \xi / \partial x$

Contrainte: $\sigma = Y \varepsilon$

$$\Rightarrow F = YA\varepsilon = YA \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = YA \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

A l'équilibre: $F = \text{const} \Rightarrow \xi(x) = \frac{F}{YA} x$

Hors équilibre: $F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta m a = (\rho A \Delta x) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ et $F(x + \Delta x) - F(x) = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{mais} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = YA \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{Y} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{Y} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} = \frac{\rho}{Y} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial t^2} \quad \text{mais} \quad F = YA \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow$$

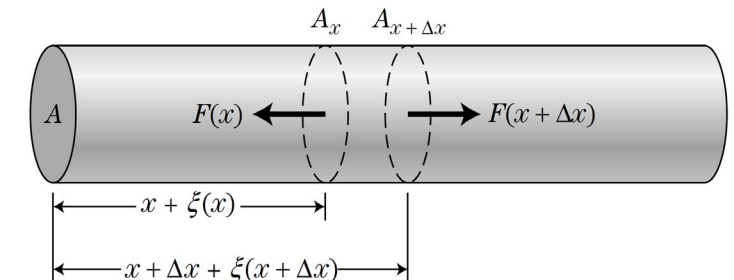
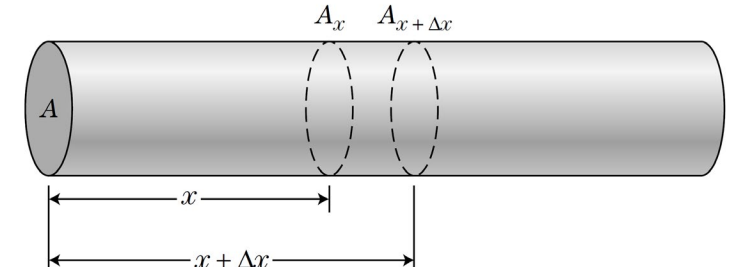
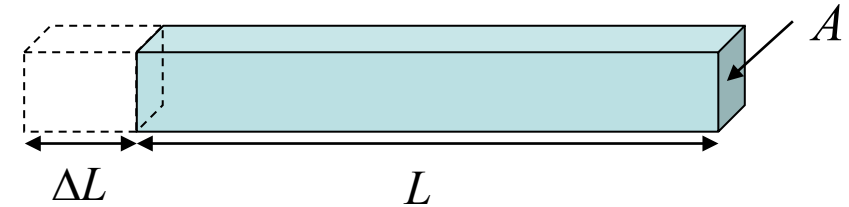
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\rho}{Y} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad v = \sqrt{Y / \rho}$$

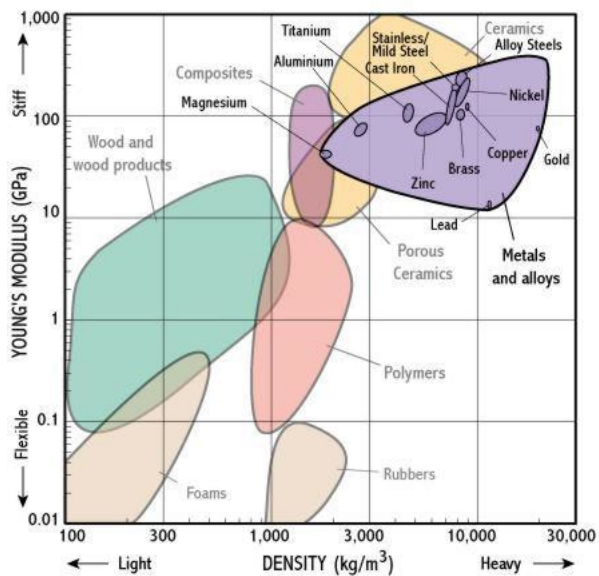
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

Equations d'ondes pour
le **déplacement**
et la **force**

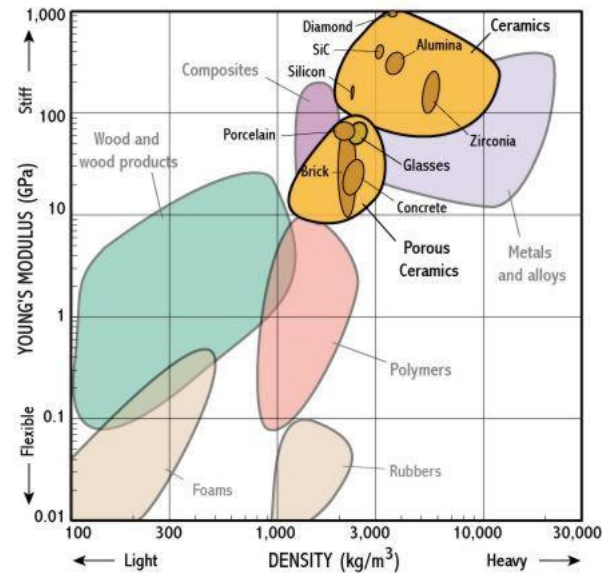
Quand une onde est excitée le long de la tige, chaque tranche fine se déplace de son emplacement d'origine. Aux même temps, chaque tranche est aussi déformée.



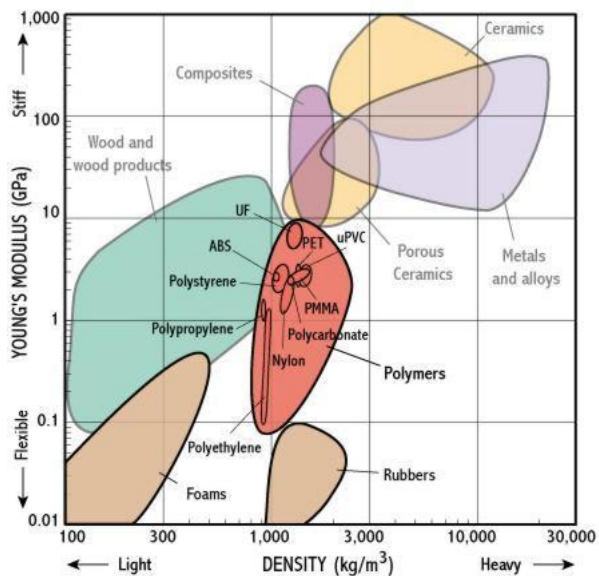
Metals and alloys



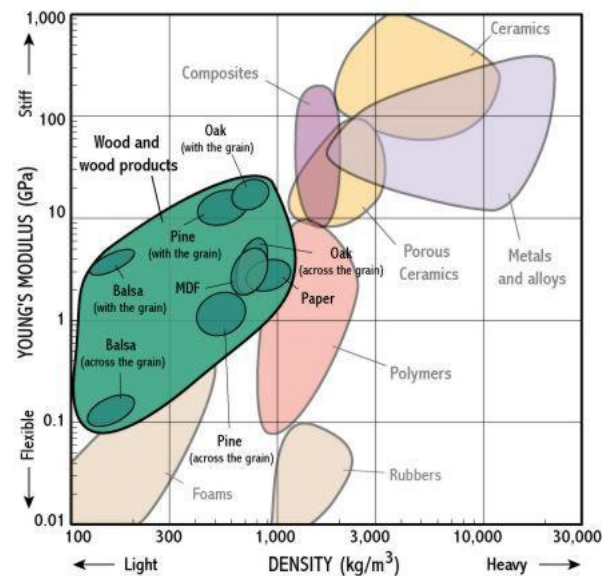
Ceramics



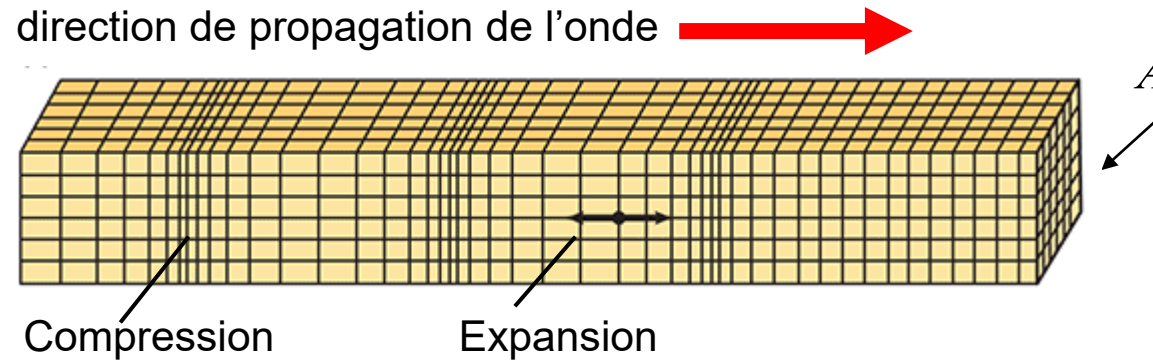
Polymers



Wood and wood products



Intensité et densité d'énergie d'une onde mécanique dans un barreau solide



$$I \triangleq \frac{1}{A} \left\langle \frac{\partial W}{\partial t} \right\rangle = v \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 = v \langle u \rangle$$

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2$$

I : Intensité de l'onde [$\text{J}/\text{sm}^2 = \text{W}/\text{m}^2$]

$\langle u \rangle$: Densité d'énergie [J/m^3]

ξ_0 : Amplitude de l'onde [m]

v : Vitesse de propagation de l'onde [m/s]

ω : Fréquence de l'onde [rad/s]

ρ : Densité du barreau [kg/m^3]

I = Intensité de l'onde =
= énergie transmise par unité de temps et surface =
= puissance transmise par unité de surface

Démonstration:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -F \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \text{Puissance transmise (} W: \text{ travail)}$$

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t) \Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega \xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$F = YA \frac{\partial \xi}{\partial x} = YAk \xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$v = \sqrt{Y/\rho} \Rightarrow Y = \rho v^2$$

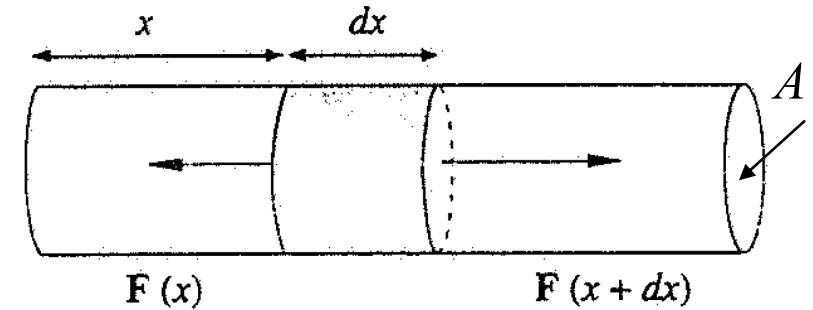
$$v = \omega/k \Rightarrow k = \omega/v$$

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial t} = Y A \omega k \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t) = \rho v^2 A \frac{\omega^2}{v} \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t) = v A \rho \omega^2 \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{\partial W}{\partial t} \right\rangle = v A \rho \omega^2 \xi_0^2 \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = v A \rho \omega^2 \xi_0^2 \frac{1}{2} = v A \langle u \rangle ; \quad \langle u \rangle \triangleq \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2$$

$$\Rightarrow I \triangleq \frac{1}{A} \left\langle \frac{\partial W}{\partial t} \right\rangle = v \langle u \rangle = v \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2$$

$$\langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{2}$$

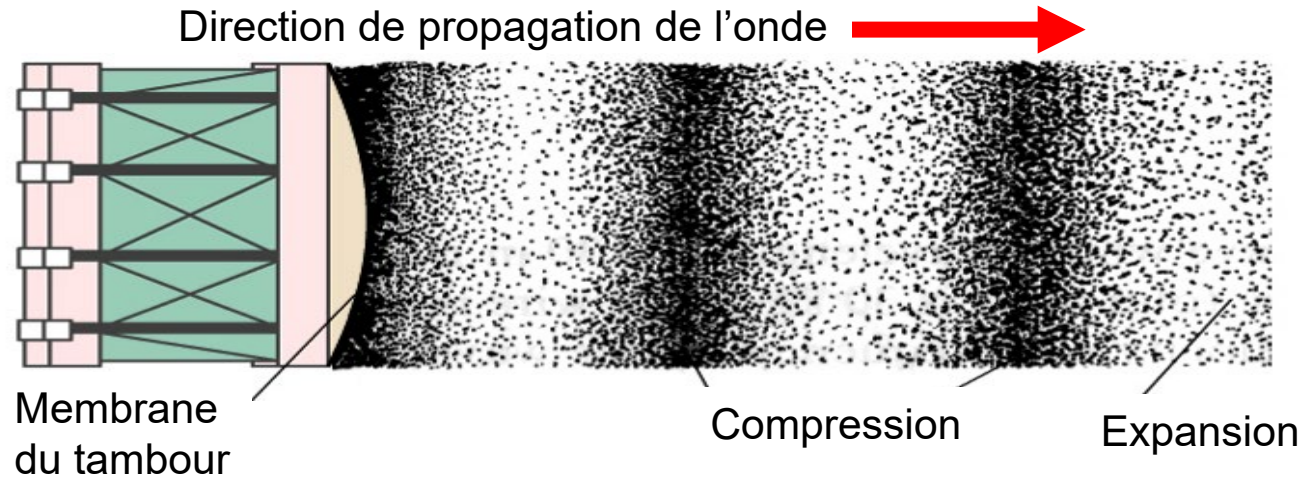


Notes: 1. L'intensité de l'onde est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde (i.e., $I \propto \xi_0^2$)

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow$ la densité d'énergie se propage également comme une onde.

Onde mécanique longitudinale dans une colonne de gaz

Déformation à l'extrémité de la colonne de gaz (p.e. produit par haut-parleur, tambour, ...).
Hypothèse: la déformation se propage le long de la colonne (**onde longitudinale**)



$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{avec } v = \sqrt{\kappa / \rho_0}$$

ξ : Déplacement ξ [m]

κ : Coefficient de compressibilité [N/m²=Pa]

ρ_0 : Densité [kg/m³]

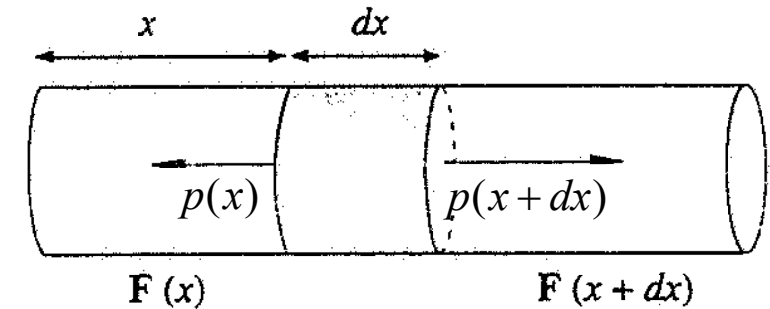
v : Vitesse de l'onde [m/s]

Démonstration:

Déplacement: ξ

Dilatation: $\partial \xi / \partial x$

Conservation de la masse: $\rho A(dx + d\xi) = \rho_0 A dx$



pour petit dilations (i.e., $\partial \xi / \partial x \ll 1$)

$$\rho A(dx + d\xi) = \rho_0 A dx \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{(1 + \partial \xi / \partial x)} \cong \rho_0 (1 - \partial \xi / \partial x) \Rightarrow \rho - \rho_0 = -\rho_0 (\partial \xi / \partial x)$$

$$p = p(\rho) \cong p_0 + (\rho - \rho_0) \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_0} = p_0 + \kappa \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = p_0 - \kappa \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \text{avec } \kappa \triangleq \rho_0 \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_0} \quad \text{coefficient de compressibilité}$$

$$F(x + dx) - F(x) = A(p(x) - p(x + dx)) = -A dp$$

$$F(x + dx) - F(x) = dm a = (\rho_0 A dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = -\kappa \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\kappa} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

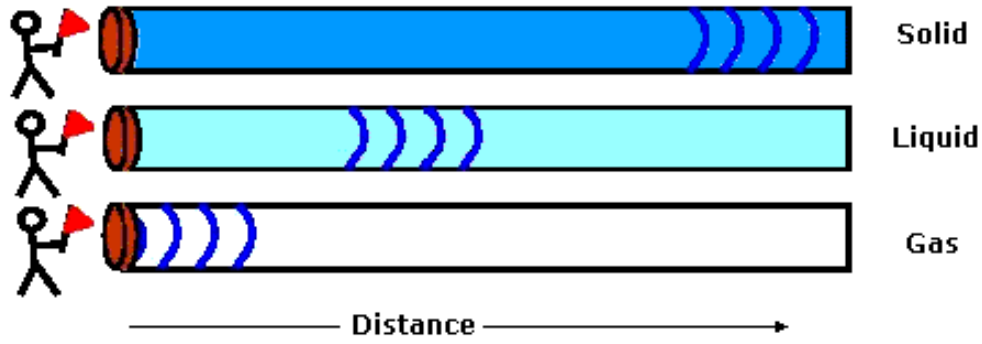
$$\text{avec } v = \sqrt{\kappa / \rho_0}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$$

Equations d'onde pour
le **déplacement**,
la **pression**,
et la **densité**

Vitesse de propagation des ondes mécaniques dans différents milieux

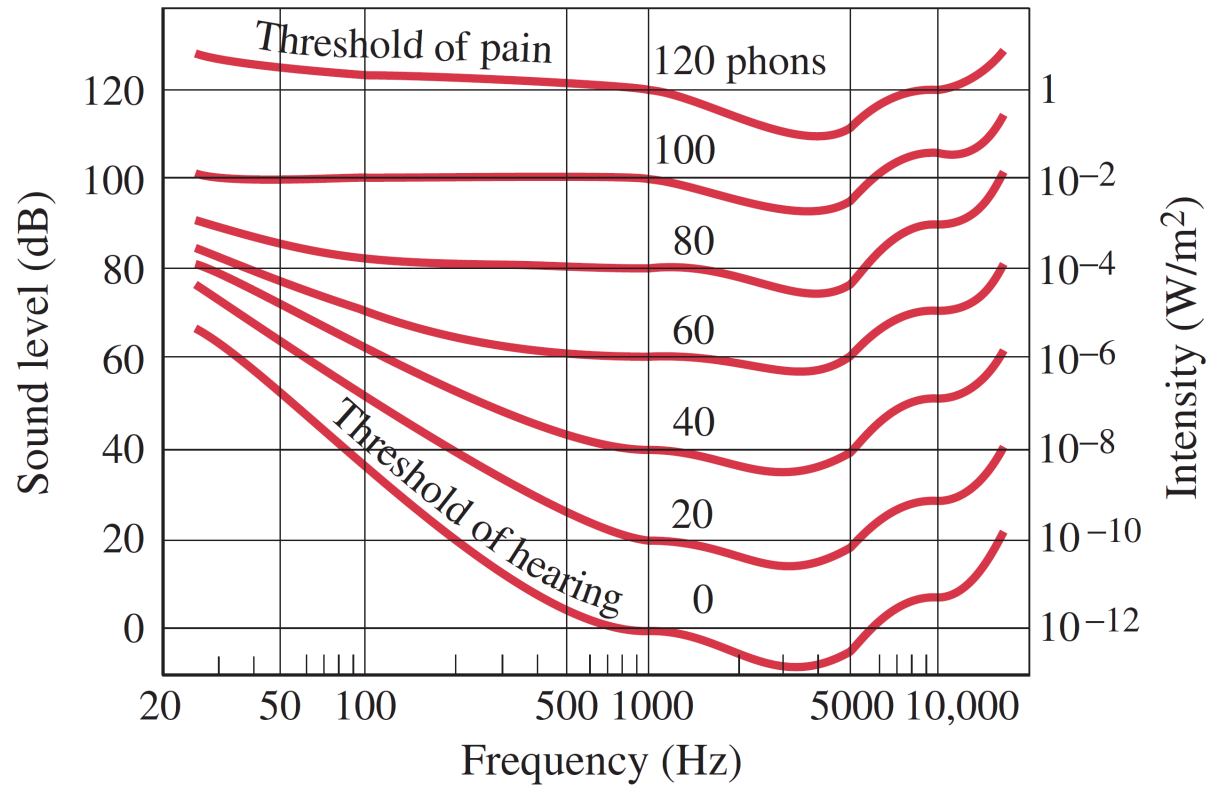


$$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}} = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho=\rho_0}} \quad (\text{gas}) \qquad v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (\text{solide})$$

Substance	Temp (°C)	Speed (m/s)
Gases		
Carbon Dioxide	0	259
Oxygen	0	316
Air	0	331
Air	20	343
Helium	0	965
Liquids		
Chloroform	20	1004
Ethanol	20	1162
Mercury	20	1450
Water	20	1482
Solids		
Lead	—	1960
Copper	—	5010
Glass	—	5640
Steel	—	5960

Material	Density (g/cm)	Speed (m/s)
Copper	8.90	6420
Steel	7.86	5940
Beryllium	1.93	12890
Aluminium	2.58	6420
Water	1.00	1496
Ethanol	0.79	1207
Air	0.00139	331.45
Helium	0.000178	965
Fat	0.95	1450
Muscle	1.07	1580
Skull bone	1.91	4080

Sensibilité de l'oreille humaine aux ondes sonores



Seuil de douleur (1000 Hz):

$$120 \text{ dB} \quad P_d = 20 \text{ Pa} \quad I_d = 1 \text{ W/m}^2$$

Seuil d'audibilité (1000 Hz):

$$0 \text{ dB} \quad P_0 = 20 \times 10^{-6} \text{ Pa} \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

$$I [\text{dB}] = 10 \log(I / I_0) = 20 \log(P / P_0)$$

Notes:

1. Les ondes "mécaniques" dont la fréquence se situe dans la zone audible par l'oreille humaine (environ 20 Hz à 20 kHz) sont appelées ondes sonores. L'oreille possède un petit trou qui relie l'intérieur à l'extérieur, de sorte que la différence de pression sur les côtés de la membrane tend vers zéro pour les changements de pression lents (< 20 Hz).

2. La pression atmosphérique P_{atm} et ses variations ΔP_{atm} sont beaucoup plus grande que le seuil de douleur P_d @1 kHz

$$P_{atm} \cong 1 \times 10^5 \text{ Pa} \quad \Delta P_{atm} \cong 1 \times 10^4 \text{ Pa} \quad P_d \cong 20 \text{ Pa @1 kHz}$$

Heureusement, les variations de pression atmosphérique sont, typiquement, à des fréquences très basses ($\ll 20$ Hz).

3. Amplitude du déplacement des molécules d'air sous l'effet d'une onde sonore plane sinusoidale avec fréquence 1 kHz et intensité de 0 dB (seuil d'audibilité) et 60 dB.

$$\rho \cong 1 \text{ kg/m}^3$$

$$I [\text{dB}] = 60 \text{ dB} \Rightarrow I = I_0 10^{\frac{I[\text{dB}]}{10}} = 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

$$I [\text{dB}] = 0 \text{ dB} \Rightarrow I = I_0 10^{\frac{I[\text{dB}]}{10}} = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

$$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

$$v \cong 340 \text{ m/s}$$

$$\omega = 2\pi f \cong 18850 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow \text{deplacement: } I = v \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 \Rightarrow \xi_0 = \sqrt{\frac{2I}{v\rho\omega^2}}$$

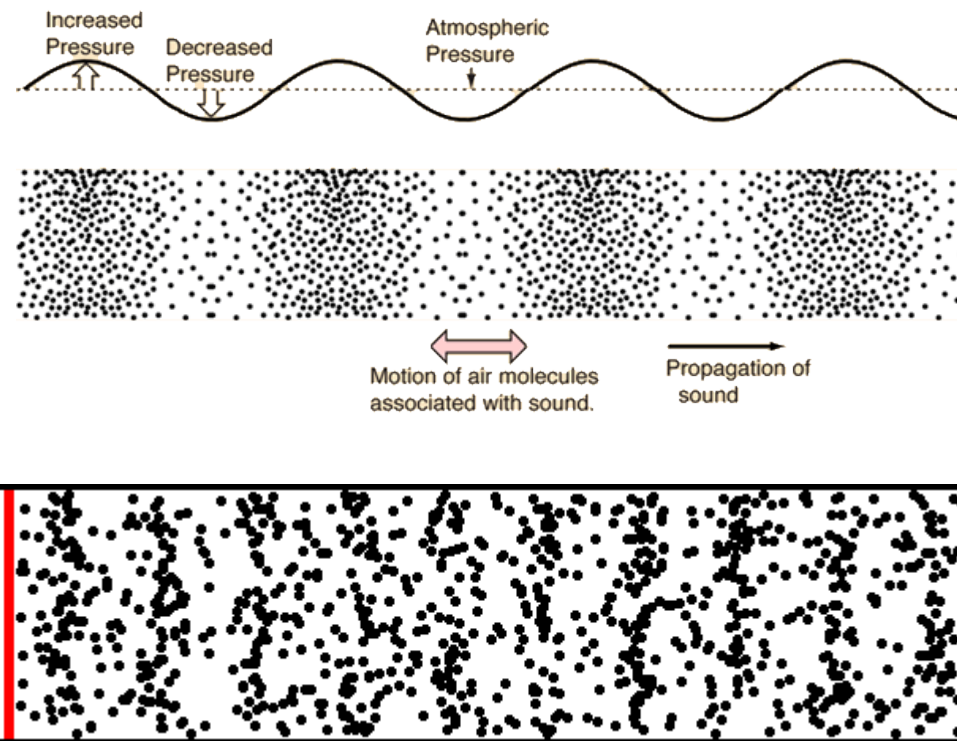
$$\xi_0 = \sqrt{\frac{2I}{v\rho\omega^2}} \cong 1.3 \text{ nm} \quad \text{pour 60 dB}$$

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{2I}{v\rho\omega^2}} \cong 0.0013 \text{ nm} = 1.3 \text{ pm} \quad (!!!) \quad \text{pour 0 dB}$$

longueur d'onde:

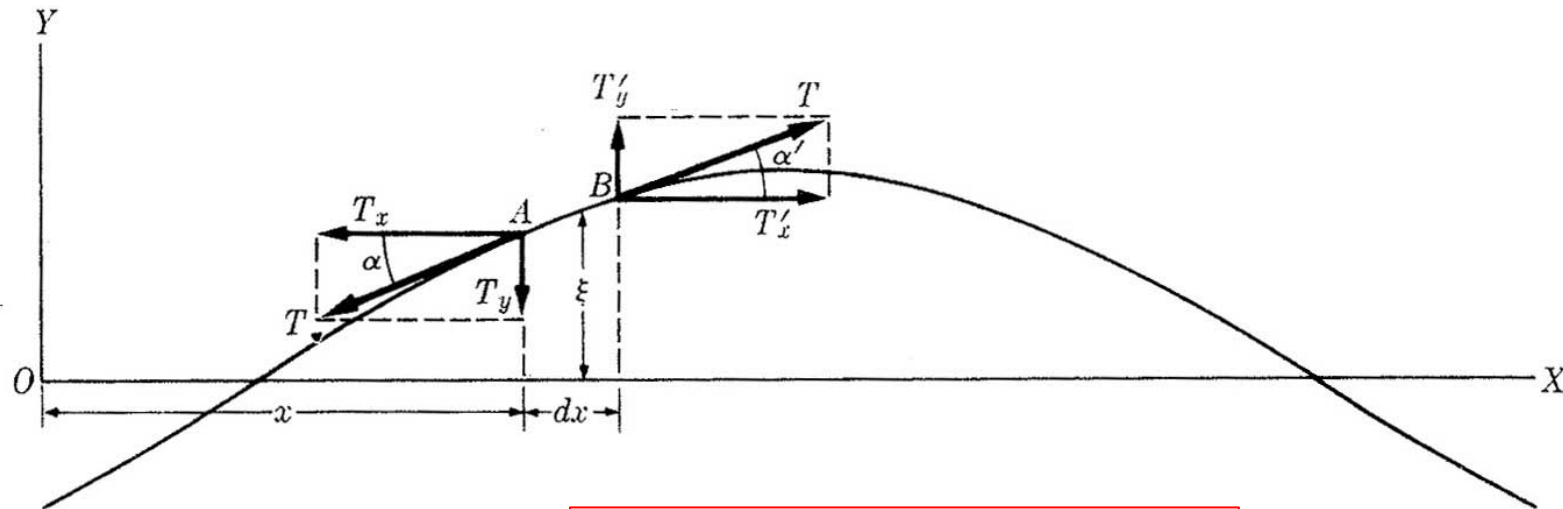
$$\lambda = \frac{v}{f} = 0.34 \text{ m}$$

La longueur d'onde est relativement grand (68 m à 5 Hz, 17 mm à 20 kHz)



Note: A la seuil d'audibilité, le déplacement de chaque molécule est inférieur à la taille de la molécule elle-même ! L'oreille humaine est impressionnant. Et les chauves-souris et les chiens sont encore mieux.

Ondes transversale sur une corde



$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{avec } v = \sqrt{T / \rho}$$

ξ : Déplacement (transversale) ξ [m]

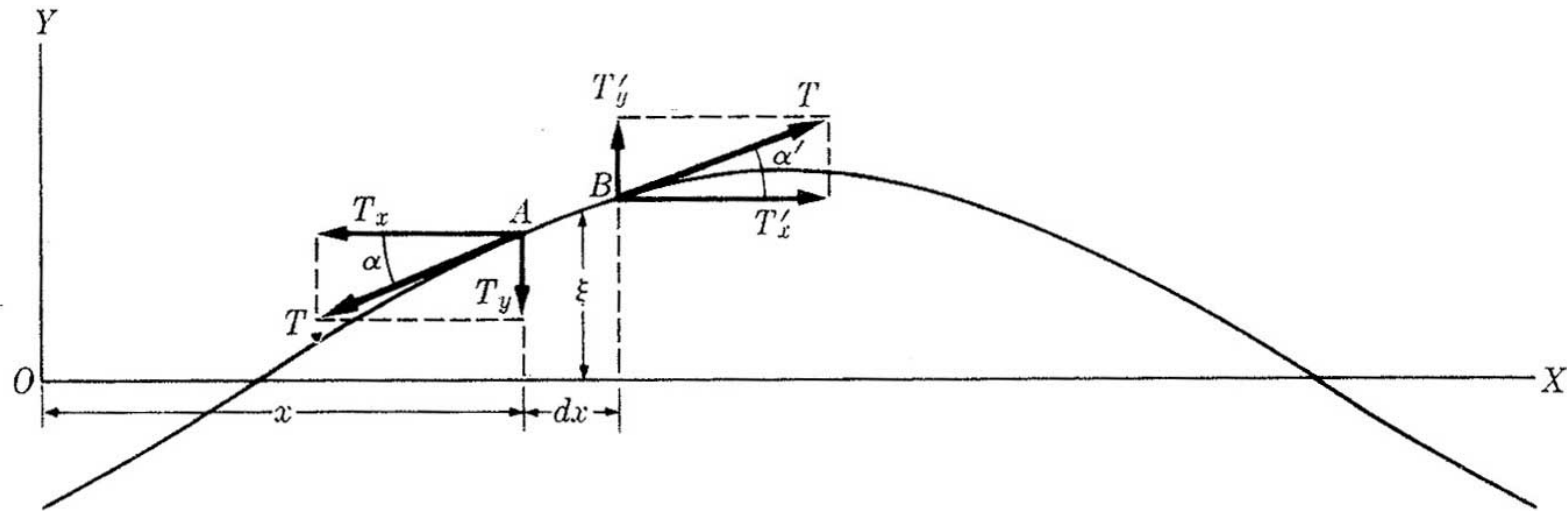
T : Tension [N]

ρ : Densité par unité de longueur [kg/m]

v : Vitesse de l'onde [m/s]

Note: Vitesse transversale: $v_y(x) \triangleq \left. \frac{d\xi}{dt} \right|_x \neq v = \sqrt{T / \rho}$

La vitesse de propagation de l'onde v n'est pas la vitesse transversale v_y des éléments de la corde!



Demonstration:

Deplacement transversale: ξ $\leftarrow \alpha \cong \alpha' \cong 0$

$$F_y = T'_y - T_y = T(\sin \alpha' - \sin \alpha) \cong T d(\sin \alpha) \cong T d(\tan \alpha) = T \frac{d}{dx}(\tan \alpha) dx$$

$$\text{mais } \tan \alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow F_y = T \frac{\partial}{\partial x}(\tan \alpha) dx = T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

$$F_y = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = dm a = (\rho dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{avec } v = \sqrt{T / \rho}$$

«Take away message» sur les ondes mécaniques

Nous avons examiné 3 systèmes physiques différents:

onde longitudinale dans barreau solide

onde longitudinale dans une colonne de gaz

onde transversal dans une corde solide

Dans les 3 cas:

- 1) la perturbation se propage sous la forme d'une onde.
- 2) les atomes et les molécules du milieu à travers lequel l'onde se propage restent atour de leurs positions d'équilibre. Ce n'est donc pas la matière qui se propage mais l'*état de mouvement* de la matière qui se propage.
- 3) la vitesse de l'onde est déterminée par l'élasticité du milieu et par sa densité.

Effet Doppler pour les onde mécaniques

Effet Doppler (en général):

Si la source d'une onde et/ou l'observateur sont en mouvement relatifs par rapport au milieu dans lequel l'onde se propage, la **fréquence des ondes observée** par l'observateur est différente de la **fréquence des ondes émis par la source**.

Onde mécanique : la vitesse de l'onde par rapport à la source (S) et à l'observateur (O) n'est pas forcément la même

Exemple simple: Observateur et source se déplacent suivant une même droite (effet Doppler longitudinal)

Vitesse de l'onde par rapport au milieu : v

Vitesse de l'observateur par rapport au milieu: v_O

Vitesse de la source par rapport au milieu: v_S

Vitesse de l'onde par rapport à la source: $v - v_S$

Vitesse de l'onde par rapport à l'observateur: $v - v_O$

Freq. des ondes produit par la source: f

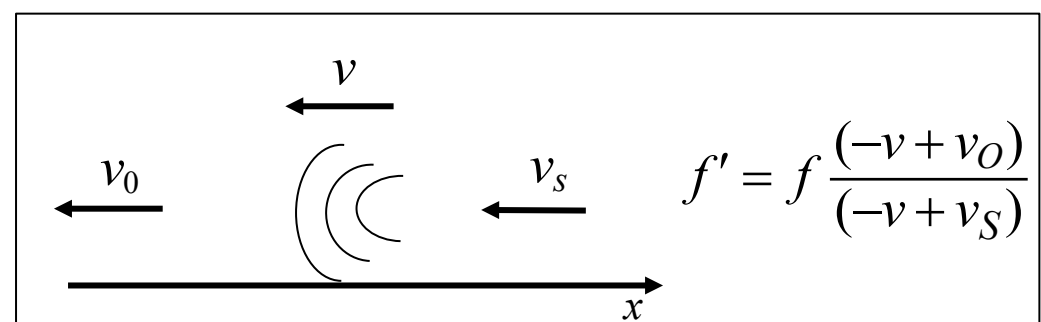
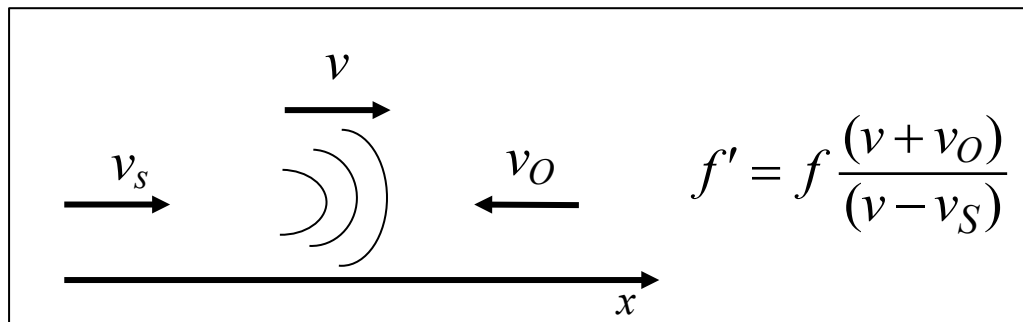
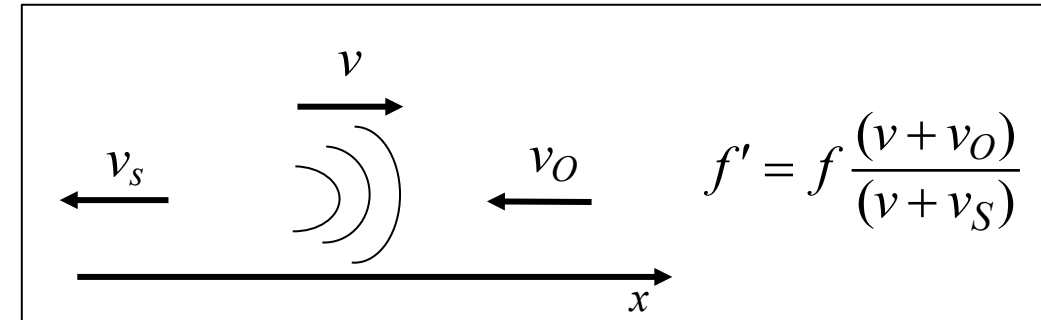
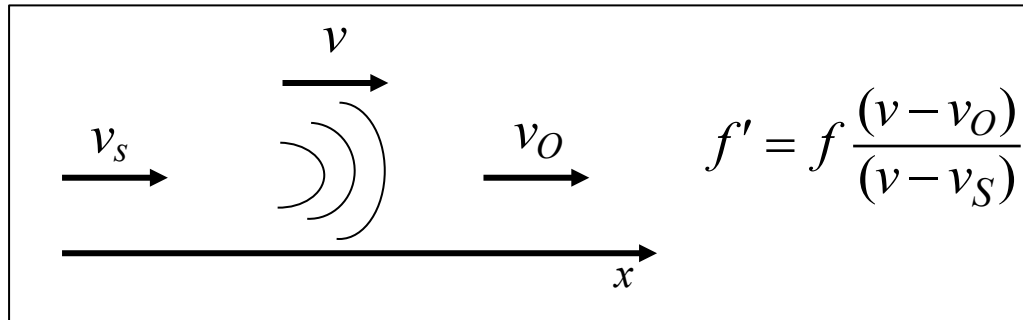
Freq. des ondes enregistrée par l'observateur: f'

$$f' = f \frac{(v - v_O)}{(v - v_S)}$$

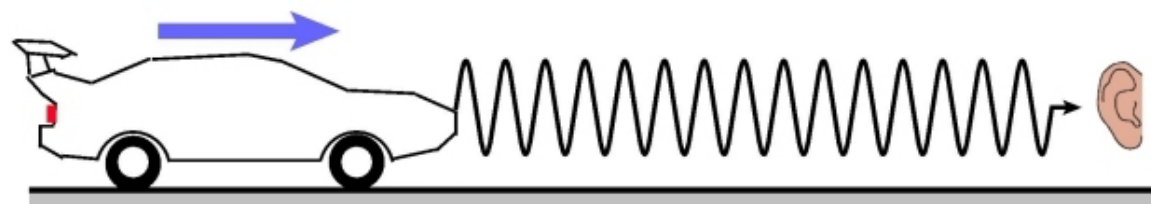
Note: Méfiez-vous des signes dans $f' = f \frac{(v - v_O)}{(v - v_S)}$

Exprimez les signes des trois vitesses par rapport à la même direction
(pour la vitesse du son, le signe est celui de l'onde vers l'observateur)

Exemples:



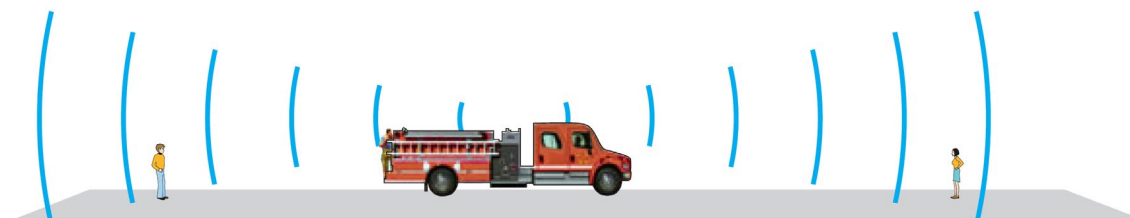
Effet Doppler pour les onde mécaniques: exemples



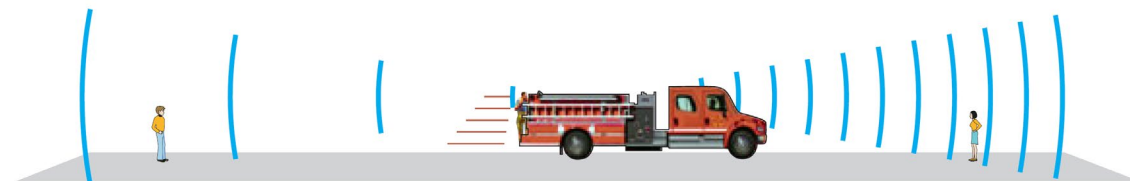
Le véhicule se rapproche : le son est perçu plus aigu



Le véhicule s'éloigne : le son est perçu plus grave



(a) At rest



(b) Fire truck moving

Effet Doppler pour les ondes mécaniques: onde de choc

$$f' = f \frac{(v - v_O)}{(v - v_S)} \Rightarrow$$

Pour $v_S = v \Rightarrow f' = \infty !!$

Vitesse de l'onde par rapport au milieu : v

Vitesse de la source par rapport au milieu: v_S

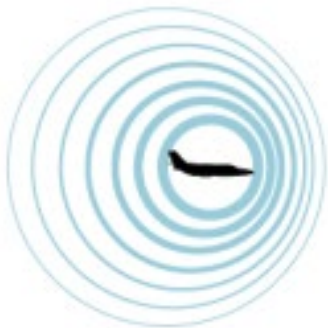
Vitesse de l'observateur par rapport au milieu: v_O

Fréquence des ondes produites par la source: f

Fréquence des ondes enregistrées par l'observateur: f'

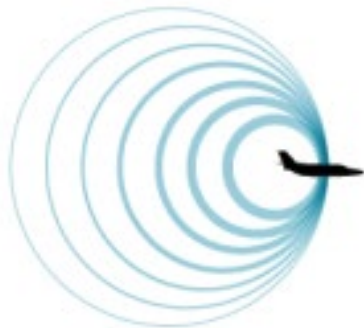
L'onde de choc est le lieu de modifications brutales de la vitesse, de la pression et de la température.

Below Mach 1
Slower than the speed of sound



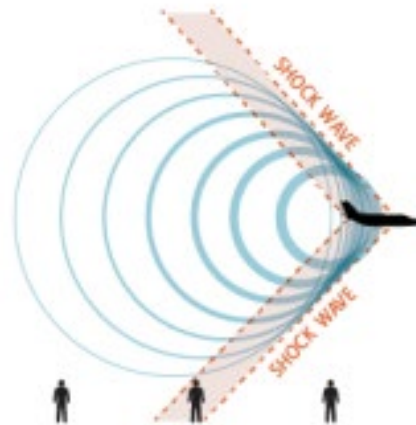
An aircraft in flight creates a series of **pressure waves** that travel outward in all directions and are perceived as sound.

Mach 1
At the speed of sound

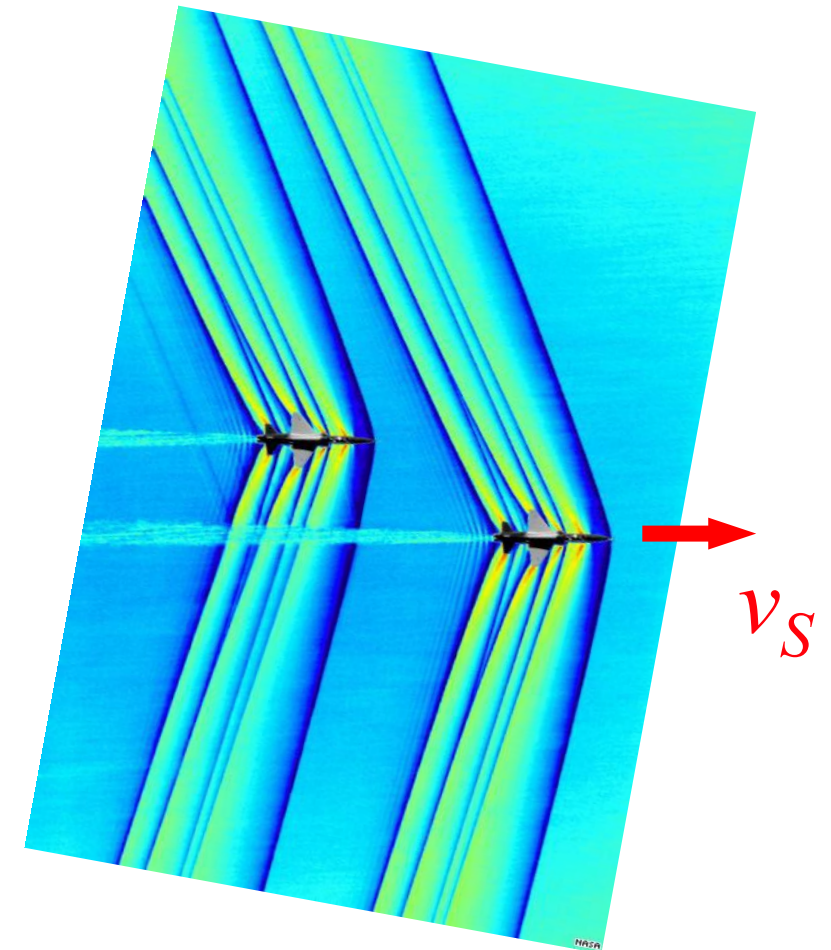


The faster the aircraft moves, the more compressed the waves become.

Above Mach 1
Faster than the speed of sound



Eventually the waves merge into a **shock wave**. A person on the ground hears a boom when the shock wave crosses his or her location.



Effet Doppler pour les ondes électromagnétiques

Effet Doppler (en général):

Si la source d'une onde et/ou l'observateur sont en mouvement relatifs par rapport au milieu dans lequel l'onde se propage, la **fréquence des ondes observée** par l'observateur est différente de la **fréquence des ondes émis par la source**.

Onde électromagnétique : la vitesse de l'onde par rapport à la source (S) et à l'observateur (O) est la même: c

Exemple simple: Observateur et source se déplacent suivant une même droite (effet Doppler longitudinal)

Vitesse de l'onde par rapport au "milieu": c

Vitesse de l'observateur par rapport au "milieu": v_O

Vitesse de la source par rapport au "milieu": v_S

Vitesse de l'onde par rapport à la source : c

Vitesse de l'onde par rapport à l'observateur : c

Freq. des ondes produits par la source: f

Freq. des ondes enregistrées par l'observateur: f'

$$f' = f \frac{1 + (v_R / c)}{\sqrt{1 - (v_R^2 / c^2)}}$$

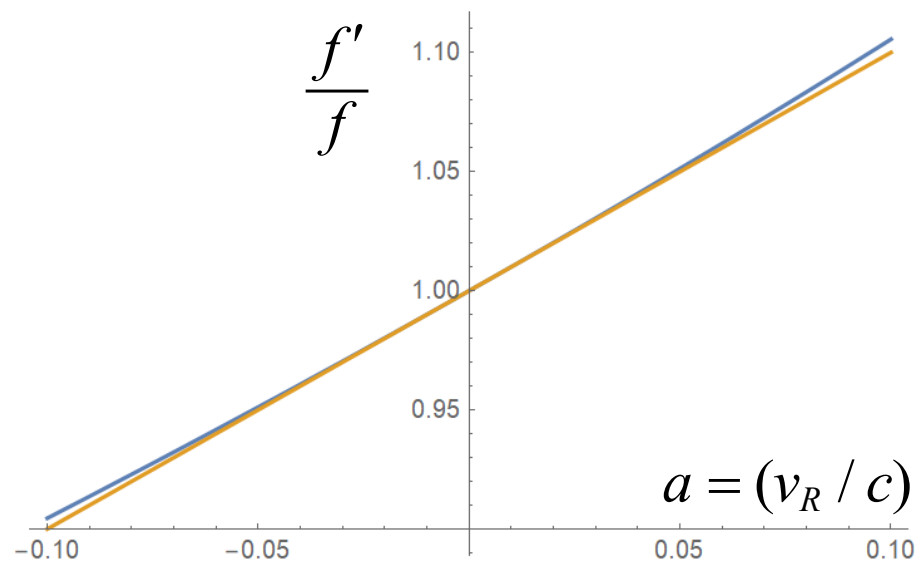
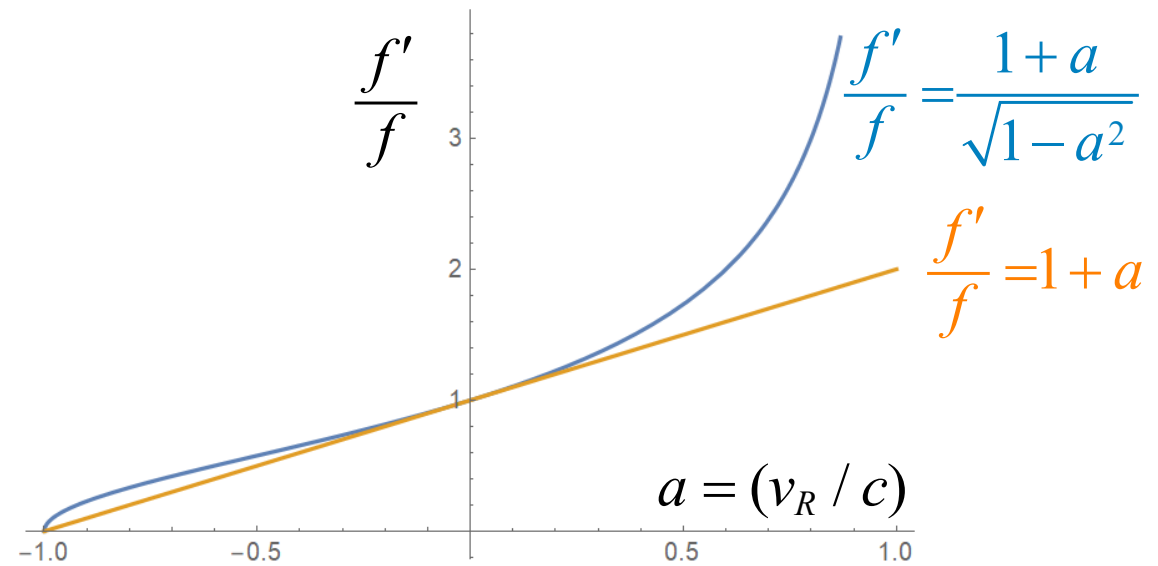
$$v_R = (v_S - v_O) \text{ (vitesse relative S-O)}$$

Exprimez les signes des trois vitesses par rapport à la même direction
(pour la vitesse de la lumière c , le signe est celui de l'onde vers l'observateur)

$$f' = f \frac{1 + (v_R / c)}{\sqrt{1 - (v_R^2 / c^2)}}$$

for $|v_R / c| \ll 1$:

$$f' \cong f (1 + (v_R / c))$$



Effet Doppler pour les onde EM: La loi de Hubble

Hubble découvrit cette loi en observant un **décalage vers le rouge** des lignes d'émission (e.g., de l'hydrogène) dans les galaxies.

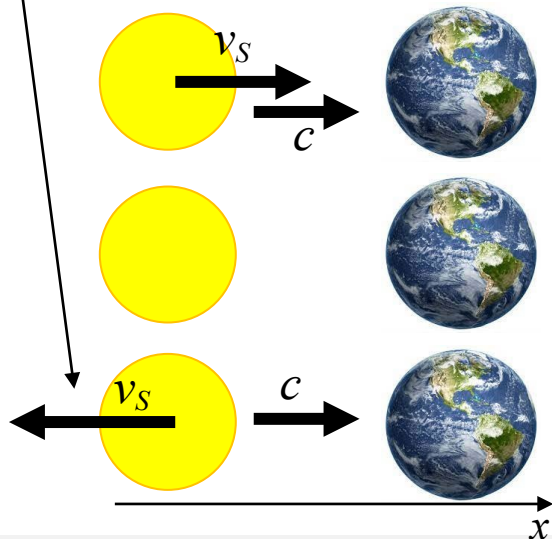
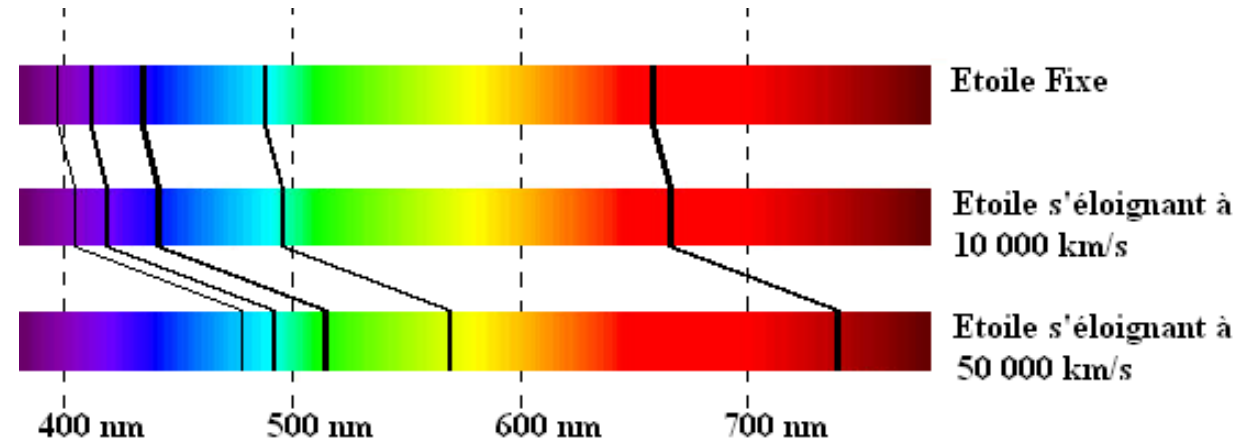
$$f' = f \frac{1 + v_R / c}{\sqrt{1 - v_R^2 / c^2}} ;$$

$$c > 0 \text{ et } v_R = (v_S - v_O) = v_S < 0$$

$$\Rightarrow 1 + v_R / c < 1$$

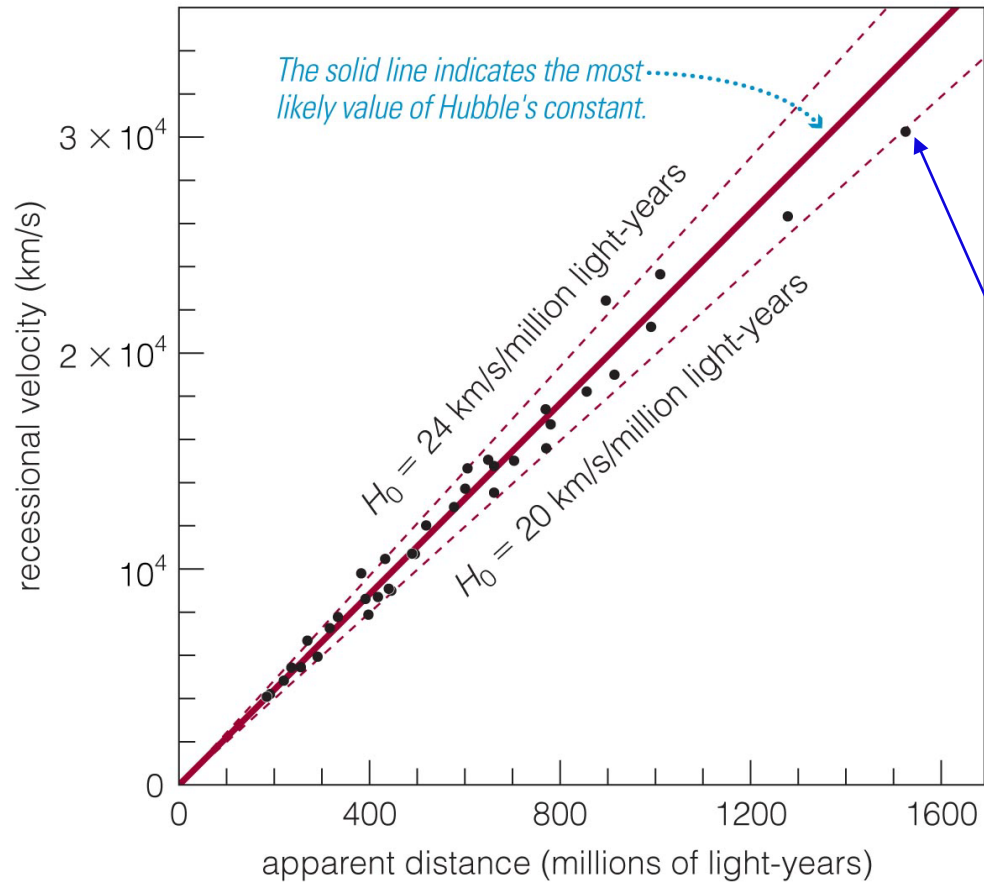
$$\Rightarrow f' < f$$

$$\Rightarrow \lambda' > \lambda \text{ (décalage vers le rouge)}$$



		pour un observateur terrestre :	
<i>l'étoile se rapproche</i>			
<i>l'étoile a une vitesse relative nulle</i>			
<i>l'étoile s'éloigne</i>			

Loi de Hubble: les galaxies s'éloignent les unes des autres à une vitesse approx. proportionnelle à leur distance d .



$$v_R \cong H_0 d$$

avec: $d = \text{distance}$

$$H_0 \cong 70 \frac{\text{km}}{\text{s}} \frac{1}{\text{Mpc}}$$

$$1 \text{ Mpc} = 3.26 \text{ années-lumière}$$

Age de l'Univers: 14×10^9 ans

Dim. de l'Univers obs.: 93×10^9 années-lumière (8.8×10^{26} m)

Distance Terre-Soleil: 8 minutes-lumière (150×10^9 m)

Note: les galaxies les plus loin voyagent a une vitesse de 1/10 de la vitesse de la lumière !!

$$c \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s} \cong 3 \times 10^5 \text{ km/s}$$

Effet Doppler pour les onde EM avec réflexion sur la cible: Radar

Dans ce cas il y a **deux** «décalages» en fréquence :

- l'onde incidente sur la voiture en mouvement est «décalée» en fréquence.
- l'onde réfléchi par la voiture en mouvement est «décalée» en fréquence.

$$v_{voiture} \ll c, \quad v_R = v_{voiture}$$

$$f' \cong f \left(1 + \frac{2v_{voiture}}{c} \right)$$

