

Semaine 13:
Interférence

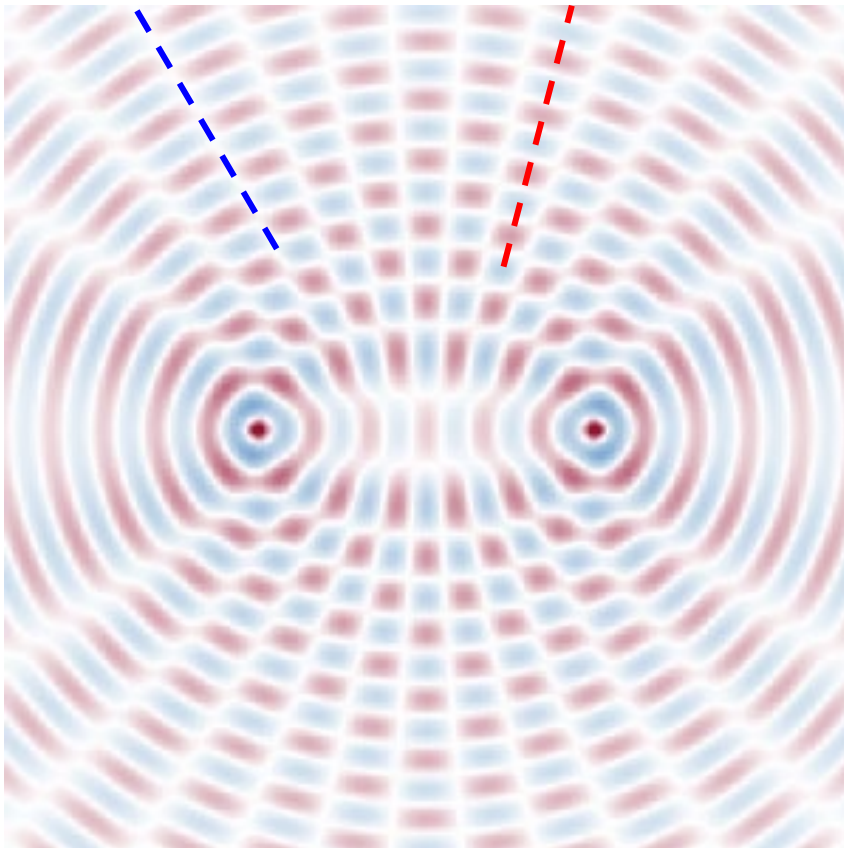
Interférence

L' **interférence** est le résultat de la superposition de deux ondes.

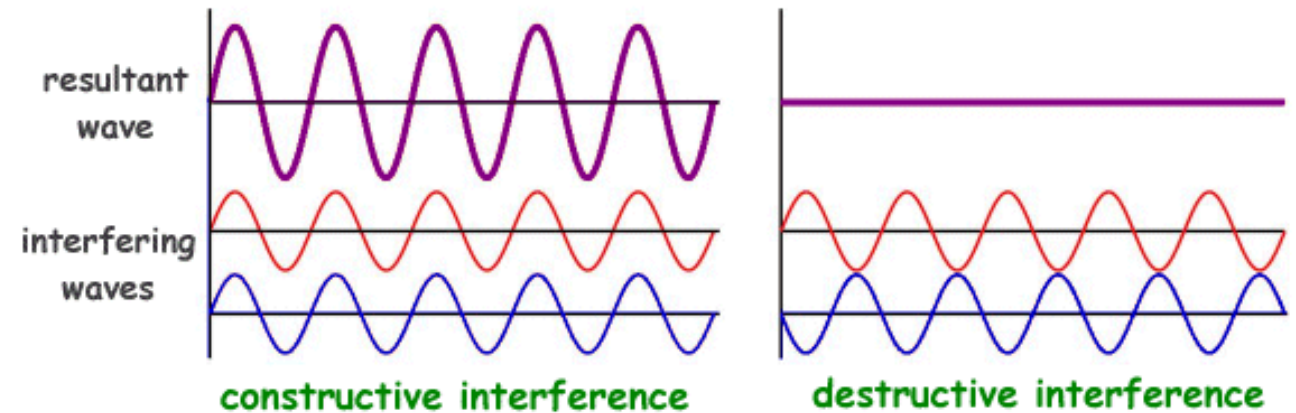
Ce phénomène apparaît avec les ondes électromagnétiques mais il s'obtient avec d'autres types d'ondes aussi (ondes sonores,...)

Min.
(interférence
destructive)

Max.
(Interférence
constructive)

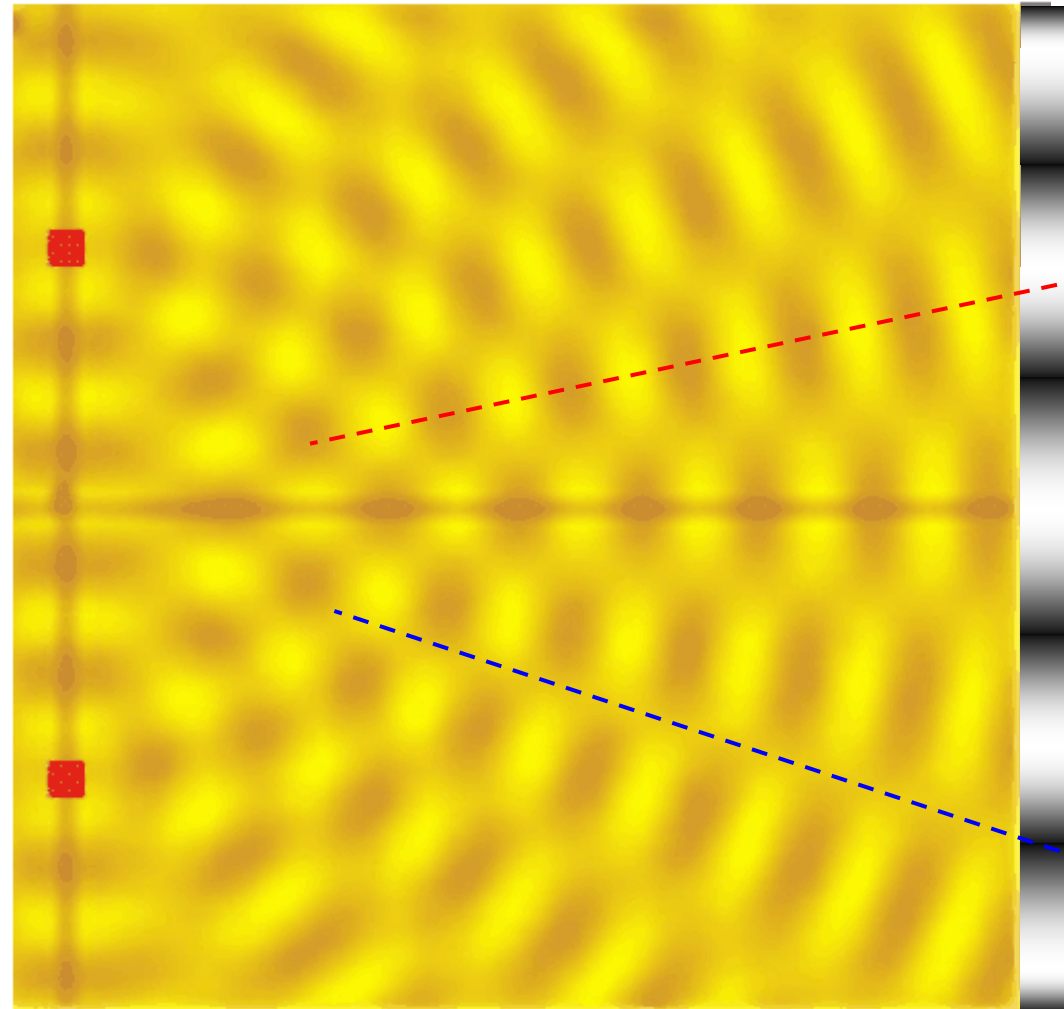


Interférence d'ondes circulaires émises par deux sources voisines.



Interférence d'ondes «émises» par deux «sources» voisines

L'onde totale décrit une situation stationnaire dans laquelle l'oscillation a une amplitude donnée en chaque point de l'espace.
Il y a des lieux de l'espace où l'amplitude de l'oscillation est nulle tout le temps.

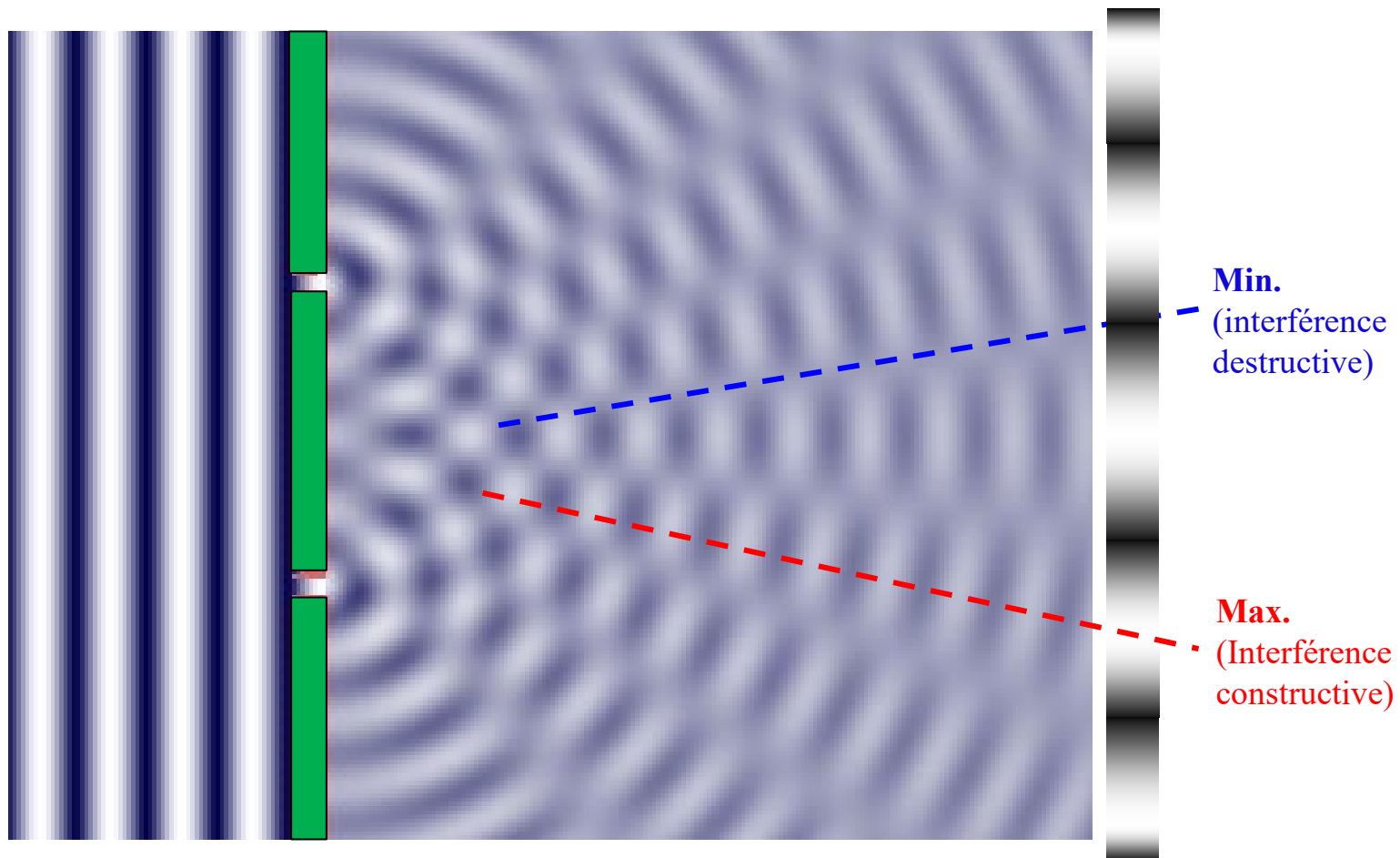


Max.
(Interférence
constructive)

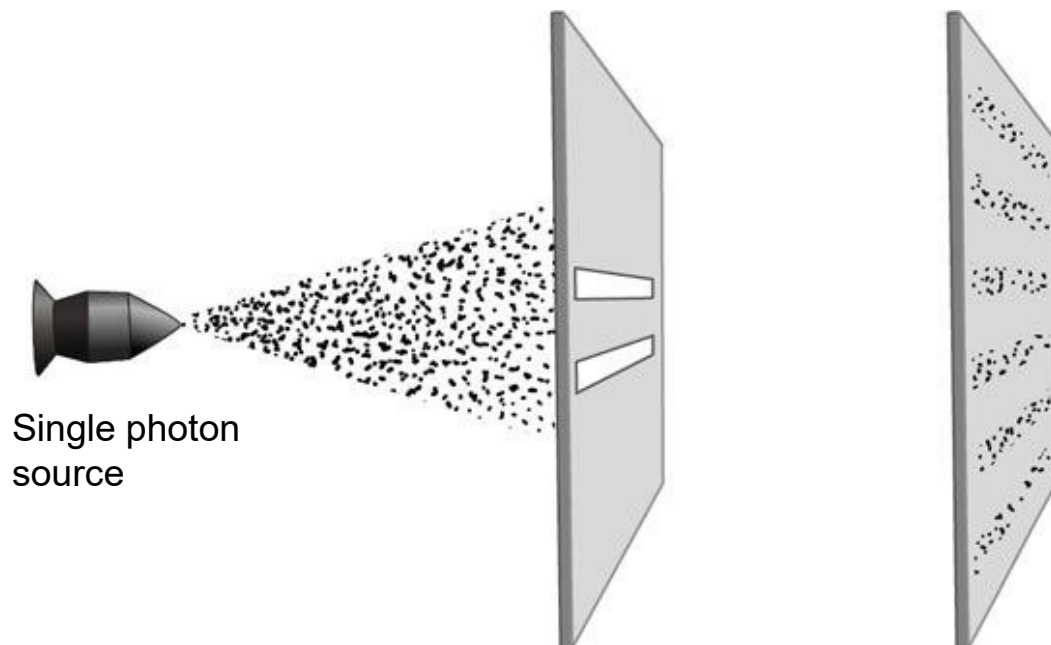
Min.
(interférence
destructive)

(animation)

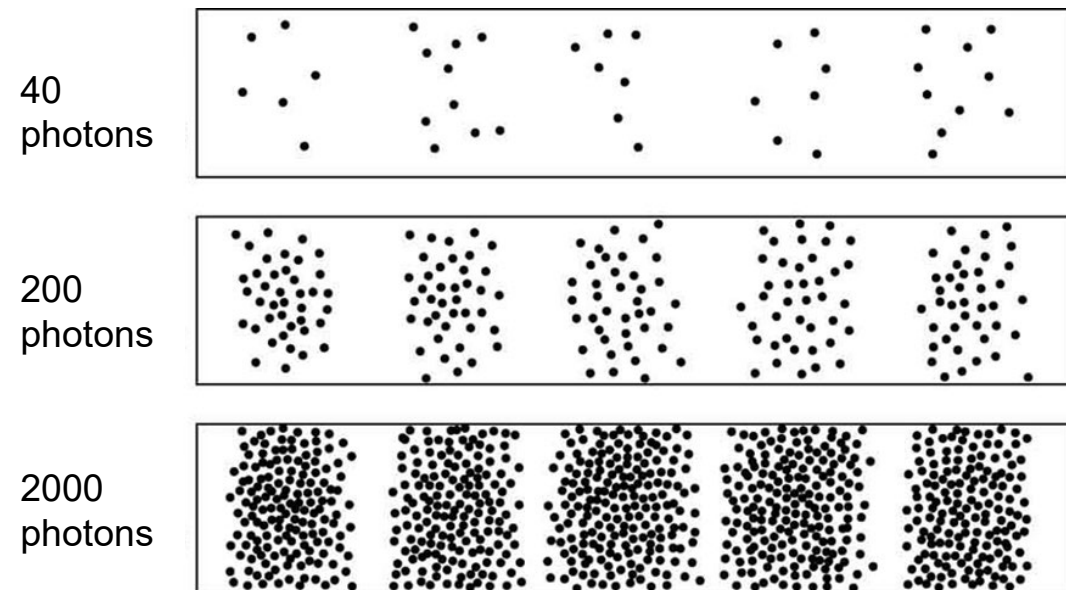
Interférence des «ondes» qui ont traversé deux trous dans une barrière
(est aussi l'interférence des ondes «émises» par deux «sources» voisines)



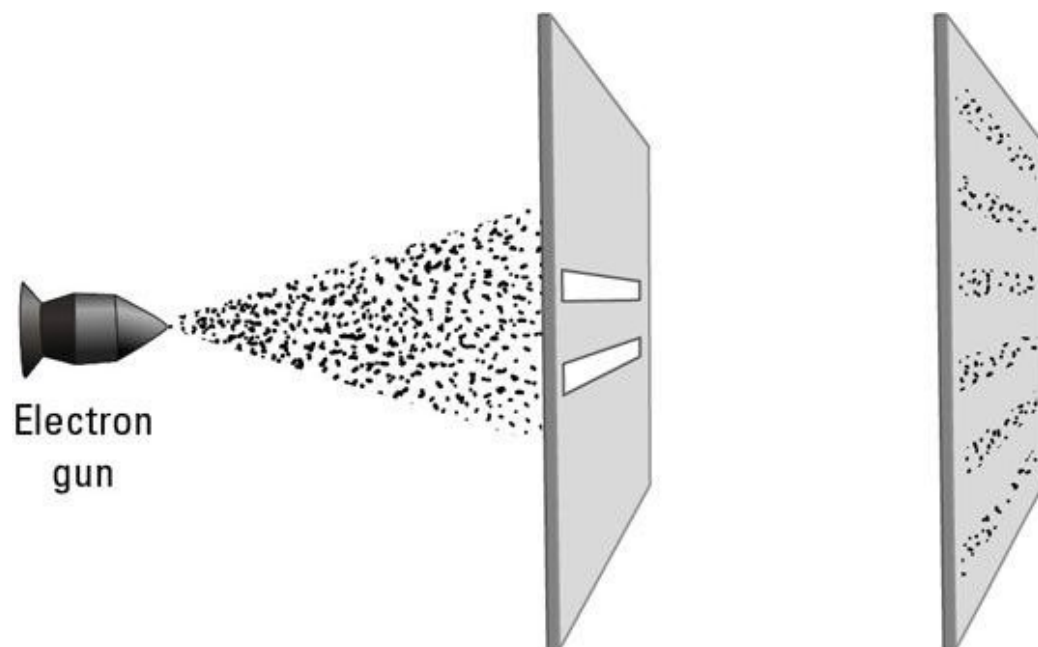
Expérience d'interférence de Young avec **photons**



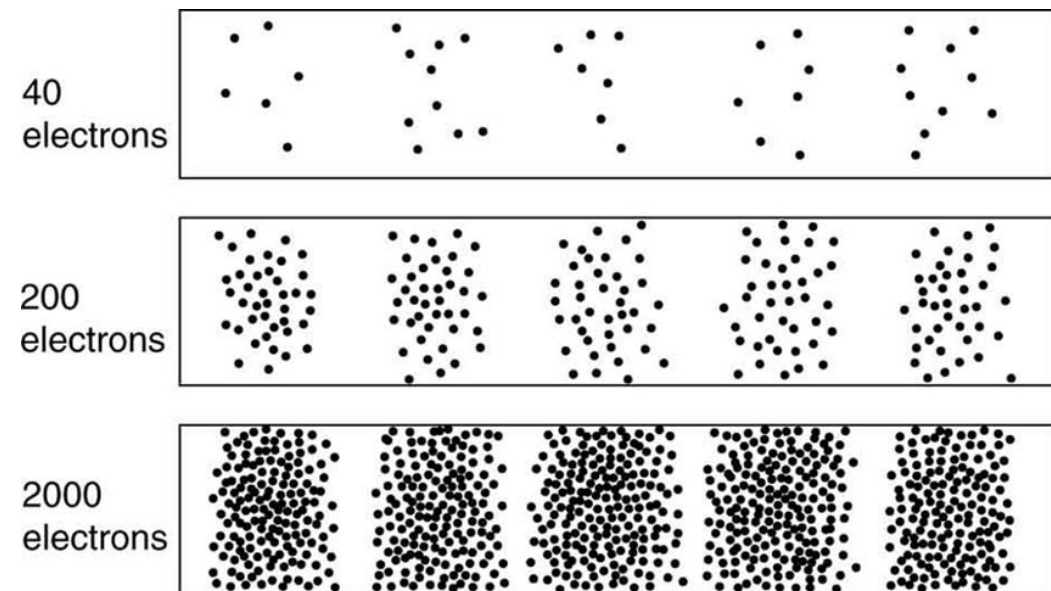
Par quelle fente passe chaque **photon** ?
 Chaque photon traverse les deux fentes en même temps!
 (chaque photon est une «onde»)



Expérience d'interférence de Young avec électrons



Par quelle fente passe chaque **électron**?
Chaque électron traverse les deux fentes en même temps!
(chaque électron est une «onde»)

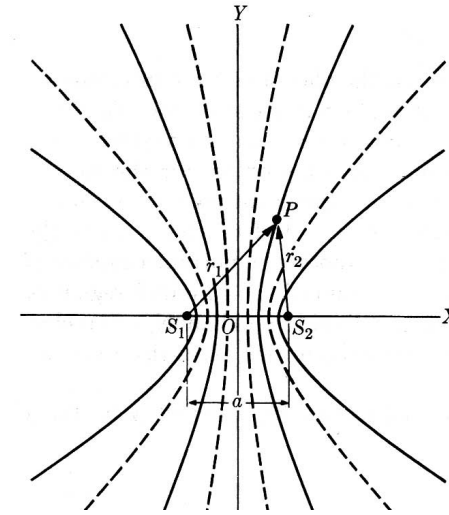


Sources cohérentes et incohérentes

Deux sources avec même fréquence ω :

$$\xi_1(P) = \xi_{01}(r_1) \sin(\omega t - kr_1)$$

$$\xi_2(P) = \xi_{02}(r_2) \sin(\omega t - kr_2 - \phi(t))$$



Les deux sources sont **cohérentes** si leur différence de phase $\phi(t)$ ne change pas dans le temps (i.e., $\phi(t) = \text{const.}$).

Les deux sources sont **incohérentes** si leur différence de phase $\phi(t)$ change rapidement et de manière aléatoire.

Note 1: Il est difficile de réaliser deux sources cohérentes avec deux sources optiques indépendantes

On peut obtenir deux sources cohérentes en séparant en deux parties les ondes d'une même source (avec deux fentes, des miroirs, ...)

Note 2: Si la différence de phase $\phi(t)$ varie au hasard en fonction du temps \Rightarrow on ne peut pas observer de franges d'interférence.

Cohérence

La **cohérence** est une mesure de la corrélation entre les phases mesurées à différents points (temporels et spatiaux) d'une onde.

La cohérence **temporelle** est une mesure de la corrélation de la phase de l'onde lumineuse en différents points dans la direction de propagation

- elle nous dit à quel point une source est monochromatique.
- elle dépend de la largeur du spectre d'émission (et du filtrage après émission).
- elle est mesurable dans l'interféromètre de Michelson.

La cohérence **spatiale** est une mesure de la corrélation de la phase d'une onde lumineuse en différents points transversaux à la direction de propagation

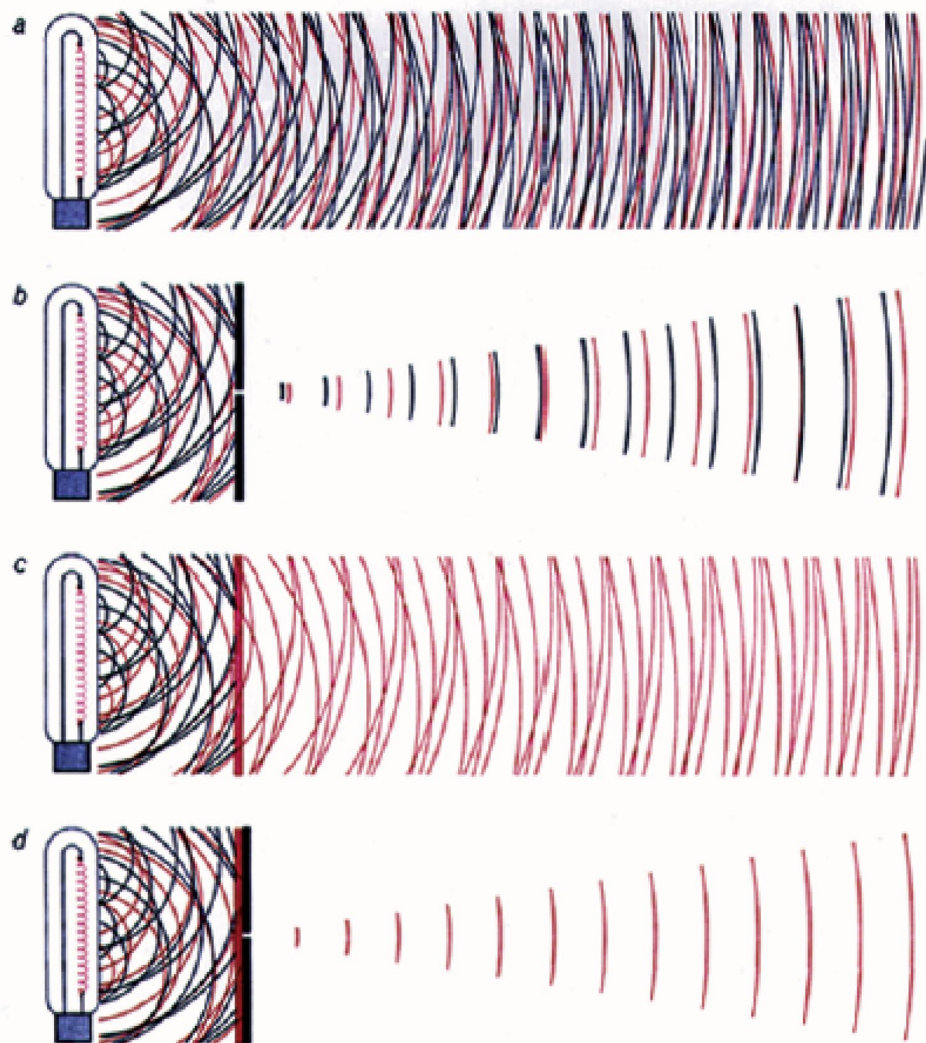
- elle nous indique l'uniformité de la phase d'un front d'onde.
- elle dépend de la dimension de la source
- elle est mesurable avec le deux fentes de Young.

Cohérence temporelle: Temps de cohérence: $\tau_c \cong (1/\Delta\nu)$, Longueur de cohérence temp.: $l_c \cong c\tau_c$

Source	$\Delta\nu_c$ (Hz)	$\tau_c = 1/\Delta\nu_c$	$l_c = c\tau_c$
Filtered sunlight ($\lambda_o = 0.4\text{--}0.8 \mu\text{m}$)	3.75×10^{14}	2.67 fs	800 nm
Light-emitting diode ($\lambda_o = 1 \mu\text{m}$, $\Delta\lambda_o = 50 \text{ nm}$)	1.5×10^{13}	67 fs	20 μm
Low-pressure sodium lamp	5×10^{11}	2 ps	600 μm
Multimode He-Ne laser ($\lambda_o = 633 \text{ nm}$)	1.5×10^9	0.67 ns	20 cm
Single-mode He-Ne laser ($\lambda_o = 633 \text{ nm}$)	1×10^6	1 μs	300 m

Si la longueur de cohérence est beaucoup plus grande que les dimensions du montage optique utilisé, la lumière peut être considérée comme cohérente.

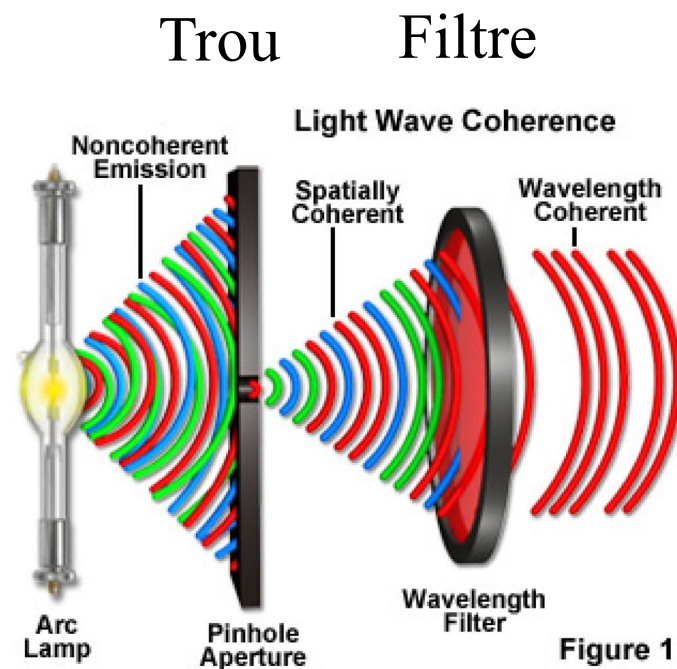
Filtrage spatial et spectral pour produire un rayonnement plus «cohérent»



Trou

Filtre

Filtre+Trou



<http://zeiss-campus.magnet.fsu.edu/tutorials/coherence/indexflash.html>

Courtesy of A. Schawlow, Stanford.

Interférence de deux sources cohérentes

Soient dans le plan XY deux sources ponctuelles S_1 et S_2 d'ondes sphériques monochromatiques (i.e. sinusoïdales) de même fréquence. Supposons que la perturbation soit une propriété scalaire (p.e., pression) ou vectorielle mais traitable sous forme scalaire (p.e., champs électriques dans la même direction).

r_1, r_2 : distance d'un point quelconque P à S_1 et S_2

$$\xi_1(P) = \xi_{01}(r_1) \sin(\omega t - kr_1)$$

$$\xi_2(P) = \xi_{02}(r_2) \sin(\omega t - kr_2)$$

⇒

Onde totale en P :

$$\xi(P) = \xi_1(P) + \xi_2(P) = \xi_0(P) \sin(\omega t - \alpha)$$

où:

$$\xi_0(P) = \sqrt{\xi_{01}(r_1)^2 + \xi_{02}(r_2)^2 + 2\xi_{01}(r_1)\xi_{02}(r_2) \cos \delta}$$

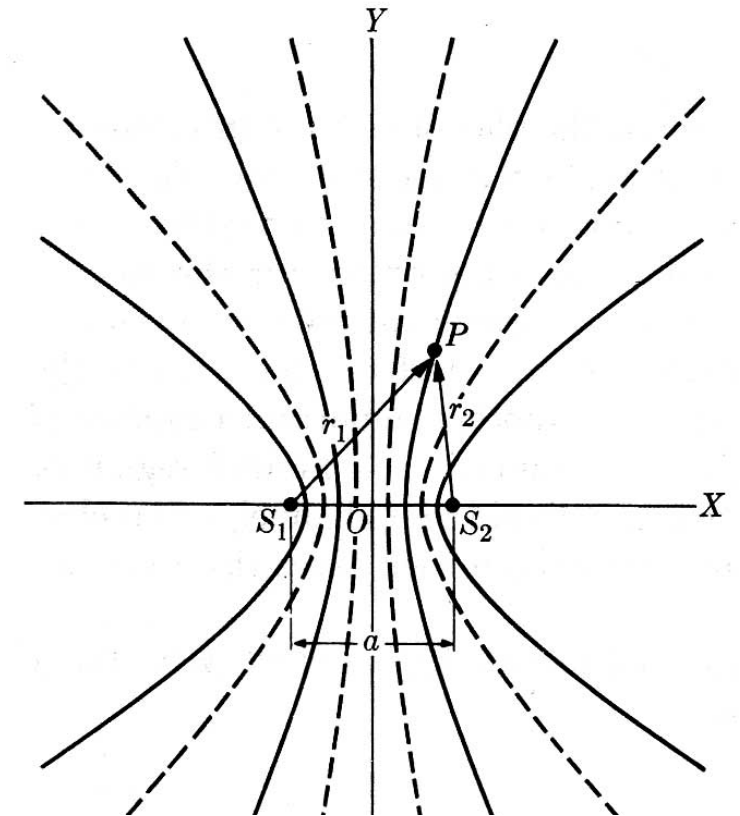
$$\delta = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)$$

$$\alpha = \arctan \left(\frac{\xi_{01}(r_1) \sin(kr_1) + \xi_{02}(r_2) \sin(kr_2)}{\xi_{01}(r_1) \cos(kr_1) + \xi_{02}(r_2) \cos(kr_2)} \right)$$

amplitude de l'onde totale en P

différence de phase entre les deux ondes en P

phase de l'onde résultante



Note: $\frac{\delta}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow \delta = \frac{\Delta t}{T} 2\pi$ mais $\Delta t = \frac{\Delta r}{c}$ et $\frac{1}{T} = f = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r = k\Delta r$

$$\xi_0(P) \sin(\omega t - \alpha)$$

onde totale en P

$$\xi_0(P) = \sqrt{\xi_{01}(r_1)^2 + \xi_{02}(r_2)^2 + 2\xi_{01}(r_1)\xi_{02}(r_2)\cos\delta}$$

amplitude de l'onde totale en P

$$\delta = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)$$

différence de phase entre les deux ondes en P

\Rightarrow

$$\begin{array}{l} \text{Pour } (r_1 - r_2) = m\lambda \\ m = 0, 1, 2, 3, \dots \end{array} \quad \Rightarrow \quad \delta = 2m\pi \quad \Rightarrow \quad \cos\delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \xi_0(P) \text{ est max.} \\ \text{(interférence constructive)}$$

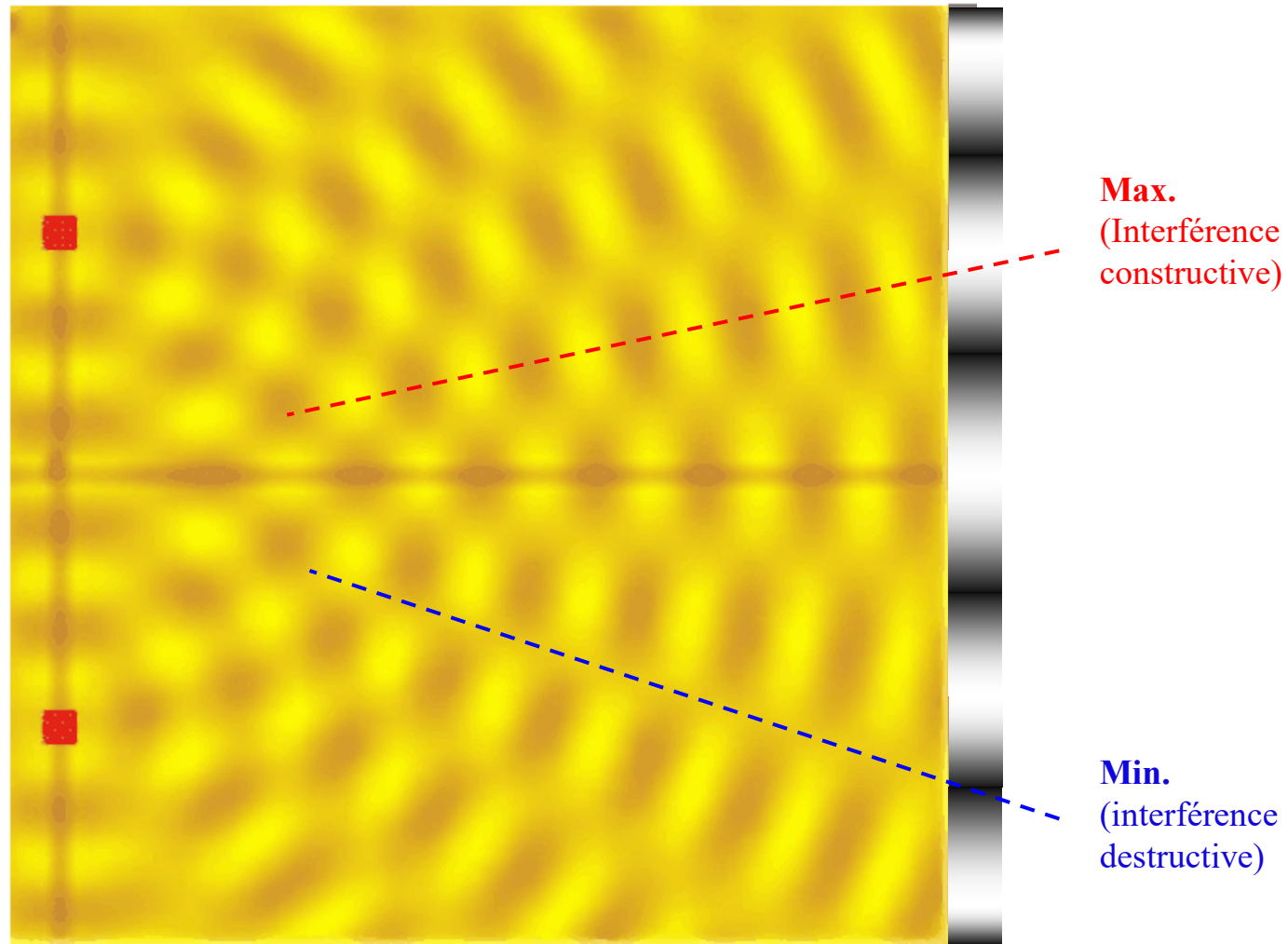
$$\begin{array}{l} \text{Pour } (r_1 - r_2) = (2m + 1)\frac{\lambda}{2} \\ m = 0, 1, 2, 3, \dots \end{array} \quad \Rightarrow \quad \delta = (2m + 1)\pi \quad \Rightarrow \quad \cos\delta = -1 \quad \Rightarrow \quad \xi_0(P) \text{ est min.} \\ \text{(interférence destructive)}$$

Note:

$$\text{pour } \xi_{01}(r_1) \cong \xi_{02}(r_2) \text{ et } \cos\delta = 1 \Rightarrow \xi_0(P) = 2\xi_{01}(r_1)$$

$$\text{pour } \xi_{01}(r_1) \cong \xi_{02}(r_2) \text{ et } \cos\delta = -1 \Rightarrow \xi_0(P) = 0$$

Interférence d'ondes «émises» par deux «sources» voisines



(animation)

Note:

Interférence des deux sources cohérentes avec déphasage à la source

$$\xi_1 = \xi_{01}(r_1) \sin(\omega t - kr_1)$$

$$\xi_2 = \xi_{02}(r_2) \sin(\omega t - kr_2 - \phi_0)$$

\Rightarrow

$$\delta = k(r_1 - r_2) - \phi_0$$

\Rightarrow

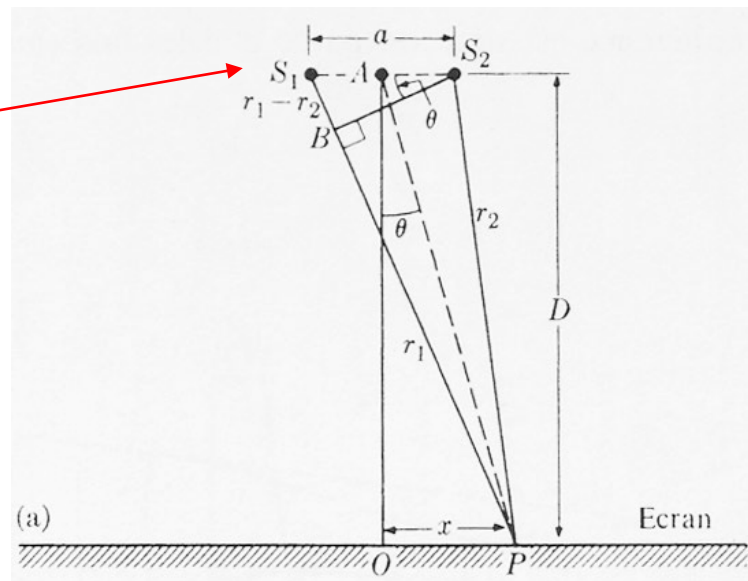
$$\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) - \phi_0 = 2m\pi \Rightarrow \delta = 2m\pi \Rightarrow \xi_0 \text{ est max. (interférence constructive)}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) - \phi_0 = (2m + 1)\pi \Rightarrow \delta = (2m + 1)\pi \Rightarrow \xi_0 \text{ est min. (interférence destructive)}$$

(i.e., mêmes conditions que sans déphasage)

Interférence des deux sources cohérentes «identiques»: L'expérience de Young avec la lumière

S_1 et S_2 :
Sources cohérentes
«identiques»
(d'intensité très similaire)



Pour une distance des sources a beaucoup plus grande que la séparation entre les sources D (i.e., $a \ll D$)
et pour deux sources d'intensité très similaire (i.e., $\xi_{01}(0) \cong \xi_{02}(0)$):

$$\Rightarrow \xi_{01}(r_1) \cong \xi_{02}(r_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi_0(P) = \sqrt{\xi_{01}(r_1)^2 + \xi_{02}(r_2)^2 + 2\xi_{01}(r_1)\xi_{02}(r_2)\cos\delta} \cong \xi_{01}\sqrt{2(1+\cos\delta)} = 2\xi_{01}\cos\left(\frac{1}{2}\delta\right)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

Pour $x \ll D$ (i.e., petit angle θ)

$$\Rightarrow \sin\theta \cong (x/D) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 - r_2 = a \sin\theta \cong a(x/D) \Rightarrow \delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}a \sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda}a \frac{x}{D}$$

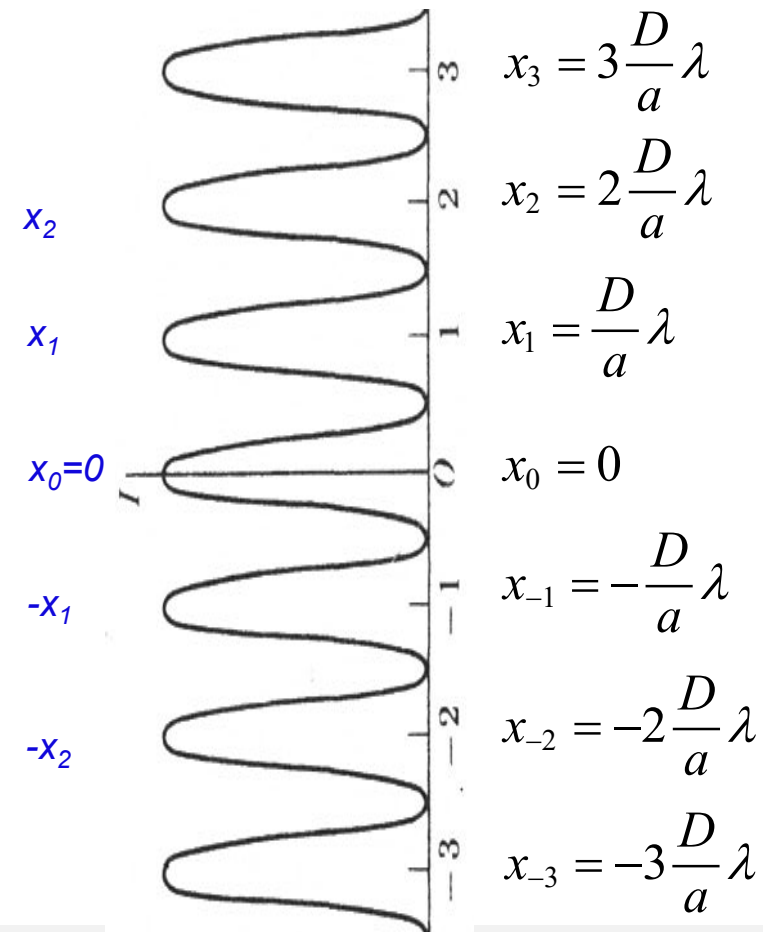
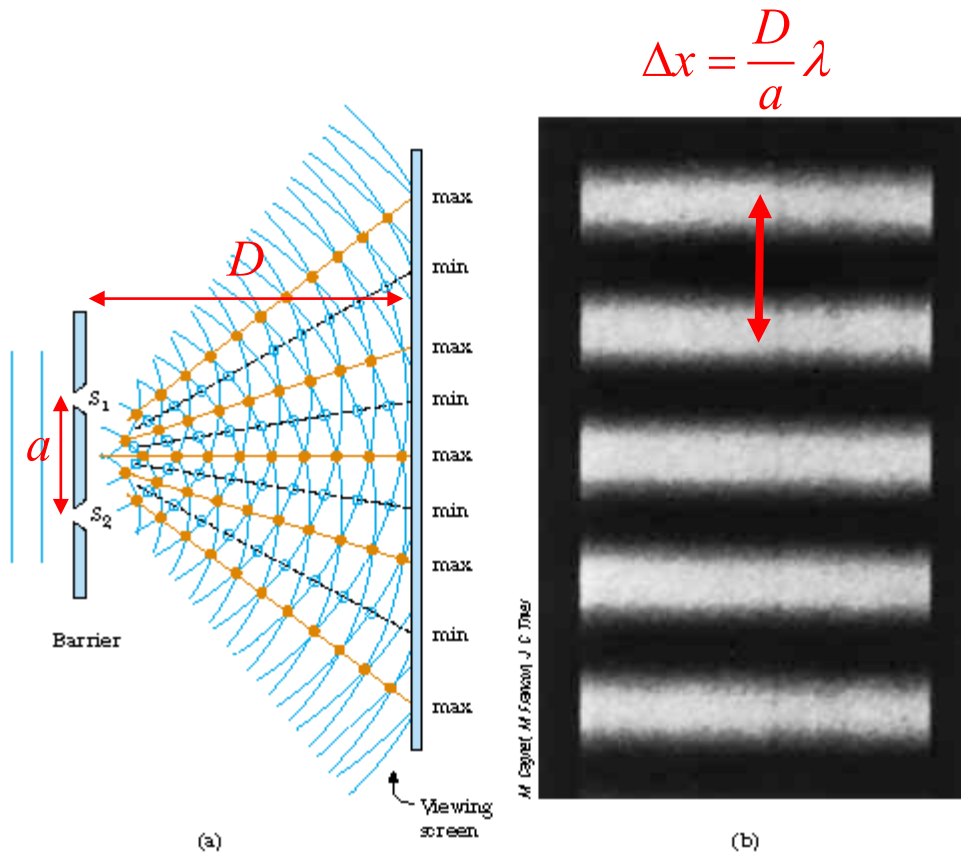
L'écran photosensible (ou les capteurs optiques) mesure l'intensité de l'onde $I \propto \xi_0^2$:

$$I \propto \xi_0^2 \propto \cos^2\left(\frac{1}{2}\delta\right) \cong \cos^2\left(\frac{\pi ax}{D\lambda}\right)$$

\swarrow
 $a \ll D$ et $x \ll D$

$$\Rightarrow x_m = m \frac{D}{a} \lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

(positions des maxima d'intensité)



Note1:

$$x_m = m \frac{D}{a} \lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad \Rightarrow \text{Les positions des maxima dépendent de la longueur d'onde } \lambda.$$

Exemple pour les **ondes électromagnétiques** dans le visible :

$$\lambda \cong 700 \text{ nm (lumière rouge)} \quad \lambda \cong 400 \text{ nm (lumière bleue)}$$

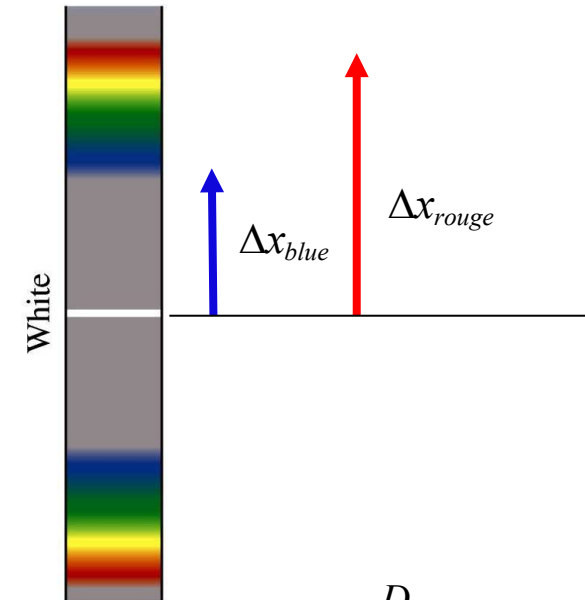
$$\text{Pour } a \cong 1 \text{ mm} \quad D \cong 1 \text{ m} \Rightarrow$$

$$D / a \cong 10^3$$

\Rightarrow

$$\Delta x_{\text{rouge}} = \frac{D}{a} \lambda \cong 0.7 \text{ mm} \quad (\text{observable à la loupe})$$

$$\Delta x_{\text{bleue}} = \frac{D}{a} \lambda \cong 0.4 \text{ mm} \quad (\text{observable à la loupe})$$



$$\Delta x = \frac{D}{a} \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{a}{D} \Delta x \Rightarrow$$

En mesurant $\Delta x, D, a$ on peut obtenir la longueur d'onde λ .

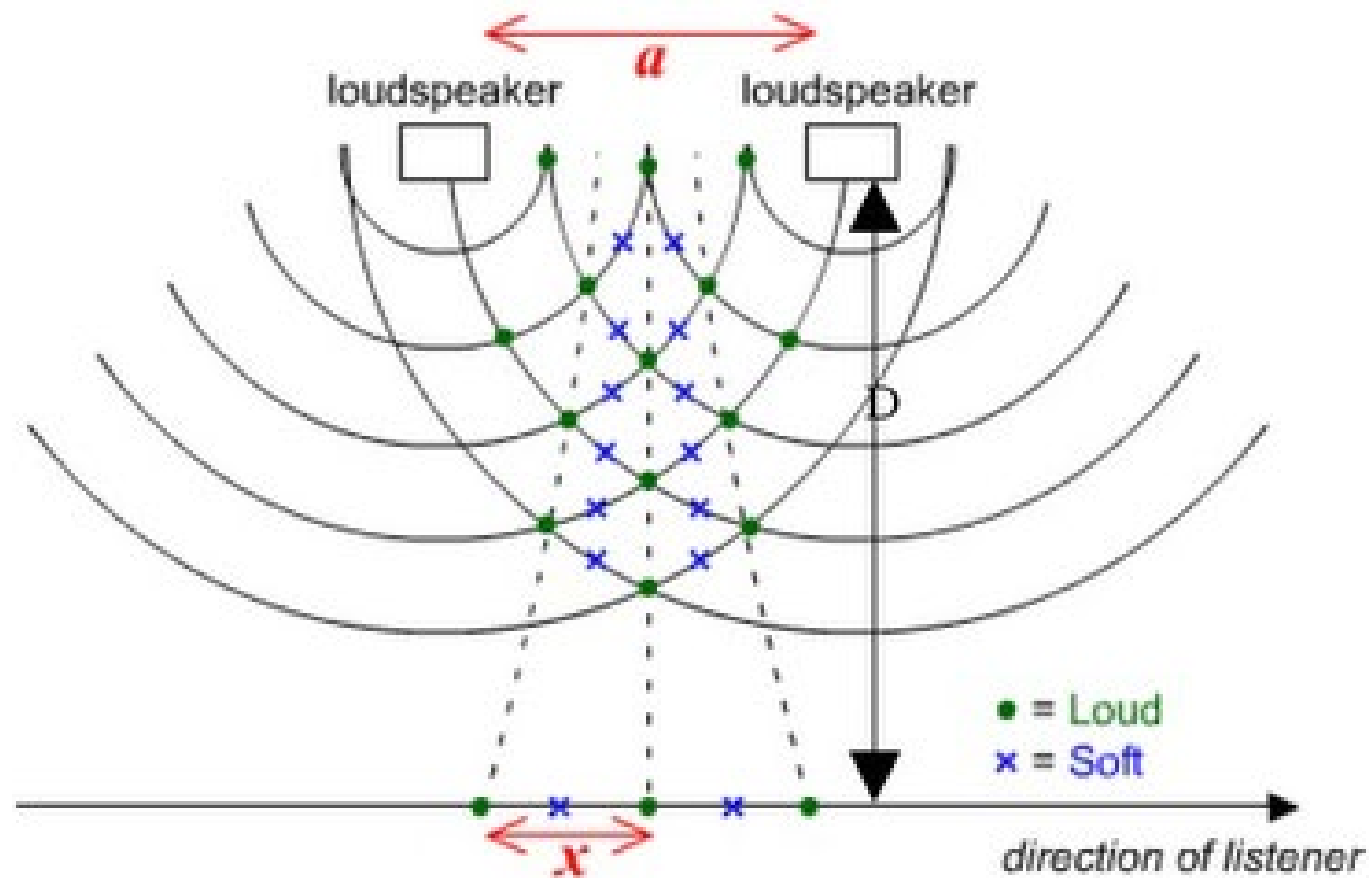
Exemple pour les **ondes sonores** :

$$\lambda = \frac{v}{f} \cong \frac{343 \text{ m/s}}{10 \div 10000 \text{ Hz}} \cong 0.034 \div 34 \text{ m}$$

$$a \cong 1 \text{ m} \quad D \cong 10 \text{ m} \Rightarrow$$

$$D/a \cong 10$$

$$\Delta x = \frac{D}{a} \lambda \cong 0.3 \div 340 \text{ m}$$



Interférence des deux sources cohérentes: plusieurs milieux

Pour le vide ou pour un **milieu homogène** (indice de réfraction $n=\text{const}$):

$$(r_1 - r_2) = m\lambda \Rightarrow \delta = 2m\pi \Rightarrow \xi_0 \text{ est max. (inter. constructive)}$$

$$(r_1 - r_2) = (2m + 1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \delta = (2m + 1)\pi \Rightarrow \xi_0 \text{ est min. (inter. destructive)}$$

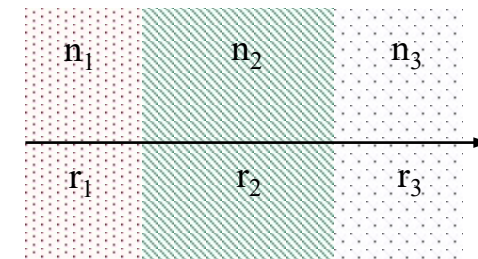
Pour une onde traversant **plusieurs milieux** d'indices de réfraction n_i
il faut remplacer la distance r_i par le **chemin optique** s_i :

$$k_i = n_i k ; \quad \delta = k \sum_i n_i (r_{1i} - r_{2i}) = k(s_1 - s_2)$$

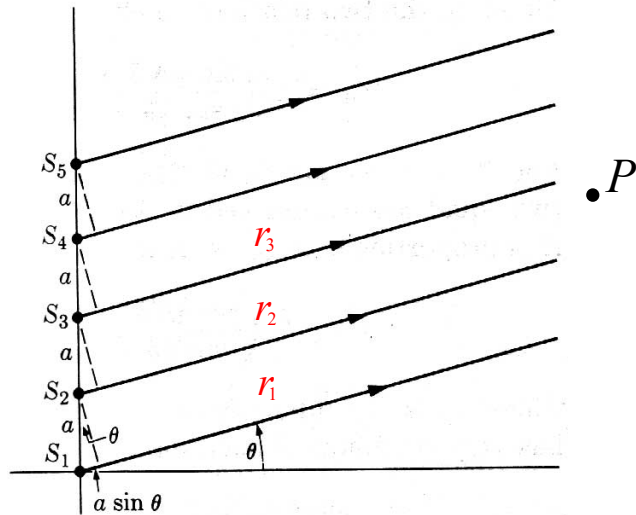
Les conditions pour le maxima et minima sont alors:

$$(s_1 - s_2) = m\lambda \Rightarrow \delta = 2m\pi \Rightarrow \xi_0 \text{ est max. (inter. constructive)}$$

$$(s_1 - s_2) = (2m + 1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \delta = (2m + 1)\pi \Rightarrow \xi_0 \text{ est min. (inter. destructive)}$$



Interférence de plusieurs sources cohérentes



Relation dephasage - difference de distance:

$$\frac{\Delta\delta}{2\pi} = \frac{\Delta r}{\lambda} \Rightarrow \Delta\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r = k\Delta r \Rightarrow d\delta = k dx \sin \theta$$

Supposons $r_n \gg a$ ("far field") \Rightarrow

$\theta_n \cong \theta$ (rayons parallèles) $r_n \cong r_1 + na \sin \theta \Rightarrow$

$r_n - r_{n-1} = a \sin \theta$ (diff. de parcours entre rayons successifs) \Rightarrow

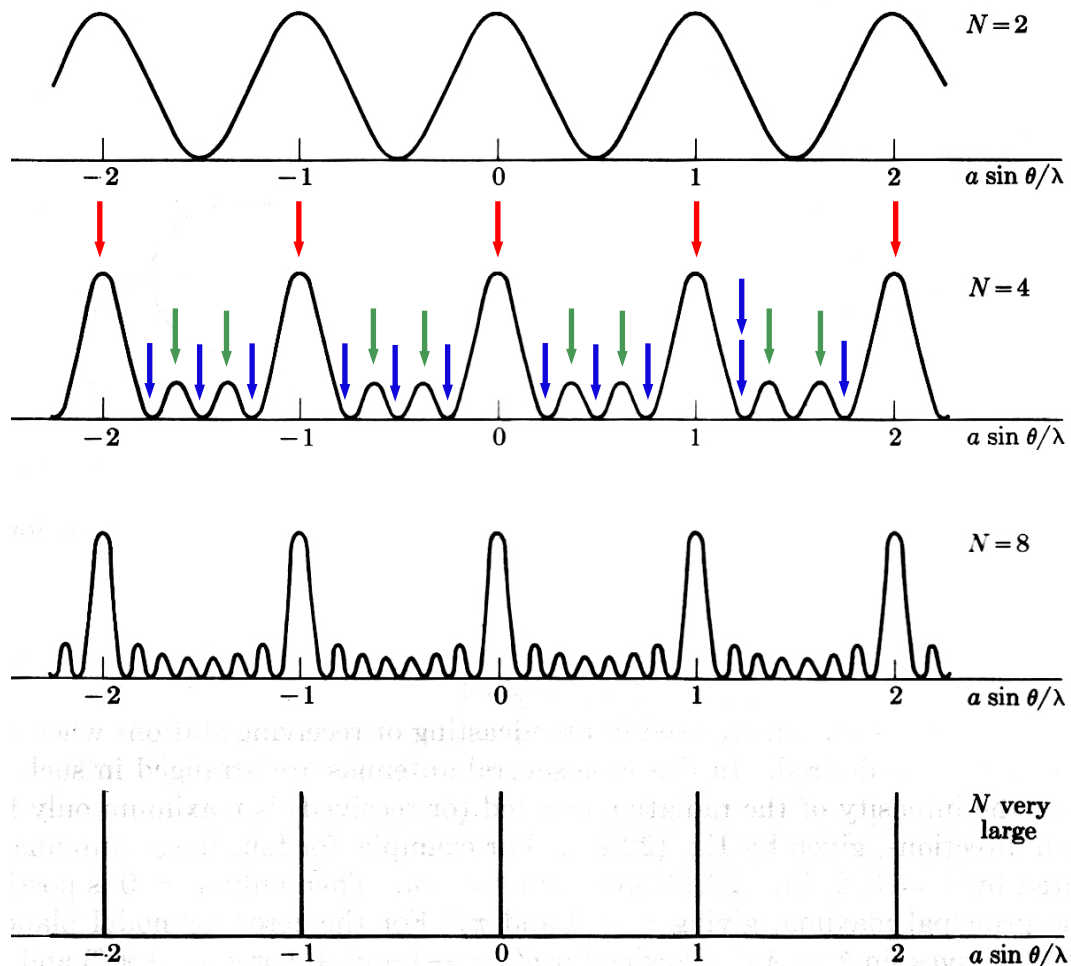
$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta = ka \sin \theta$ (diff. de phase entre rayons successifs)

Sans demonstration: (voir AF535)

\Rightarrow

$$I = I_0 \left(\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right)^2 = I_0 \left(\frac{\sin(N\pi a \sin \theta / \lambda)}{\sin(\pi a \sin \theta / \lambda)} \right)^2$$

$$I = I_0 \left(\frac{\sin(N\pi a \sin \theta / \lambda)}{\sin(\pi a \sin \theta / \lambda)} \right)^2$$



Maxima principaux (en rouge):

$$I = I_{MAX} \quad \text{pour} \quad a \sin \theta = m\lambda$$

$$I_{MAX} = N^2 I_0$$

Zéros (en blue):

$$I = 0 \quad \text{pour} \quad a \sin \theta = \frac{m'\lambda}{N}$$

$$m' = 1, 2, \dots, (N-1), (N+1), \dots, (2N-1), (2N+1), \dots$$

(les valeurs $m' = 0, N, 2N, 3N, \dots$ sont exclues)

\Rightarrow

$(N-1)$ zéros

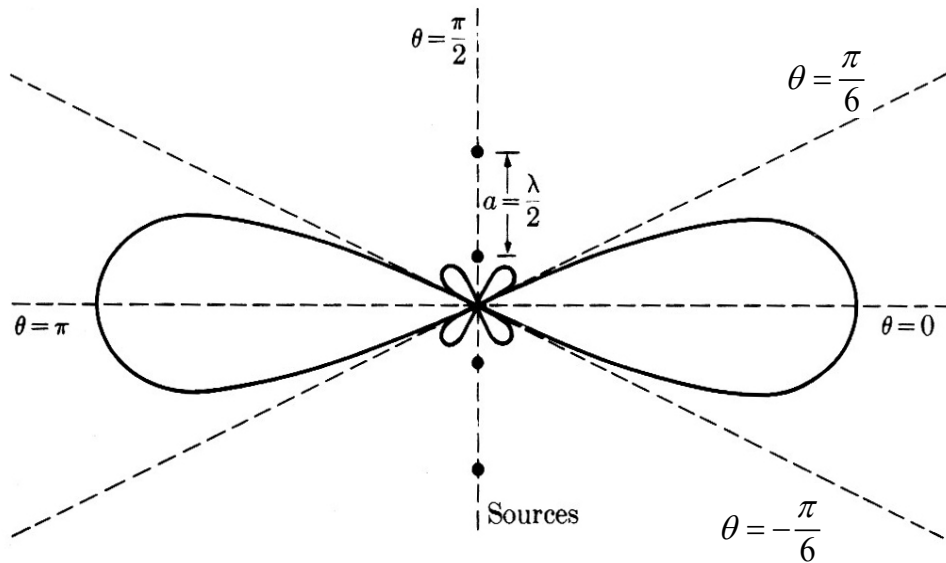
Maxima secondaires (en vert):

$(N-2)$ maxima secondaires (en vert)

Exemple: Stations d'émission (ou de réception) radio avec effet directionnel.

On dispose plusieurs antennes de telle manière que l'intensité émise (ou reçue) ne soit maximum que pour certaines directions données.

Exemple: $N=4$, $a = \lambda/2$:



Cette combinaison d'antennes transmet (et reçoit) préférentiellement dans la direction perpendiculaire à la droite joignant les source.

Max:

$$a \sin \theta = m \lambda \quad a = \lambda / 2$$

\Rightarrow

$$\sin \theta = 2m \Rightarrow m = 0$$

\Rightarrow

$$I = I_{MAX} \text{ pour } \theta = 0, \pi$$

Zéros:

$$a \sin \theta = m' \lambda / N \quad N = 4 \quad a = \lambda / 2$$

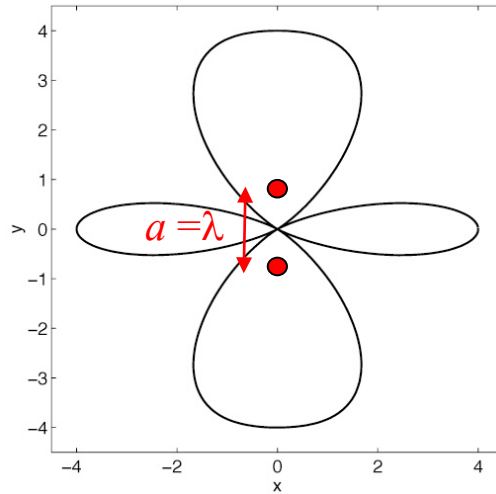
\Rightarrow

$$\sin \theta = m' / 2 \Rightarrow m' = \pm 1, \pm 2$$

\Rightarrow

$$I = 0 \text{ pour } \theta = \pm \pi / 6, \pm \pi / 2$$

Exemple: $N=2, a = \lambda$:



Max:

$$\frac{a \sin \theta}{\lambda} = m \rightarrow \sin \theta = m$$

$$m=0 \rightarrow \theta = 0, \pi$$

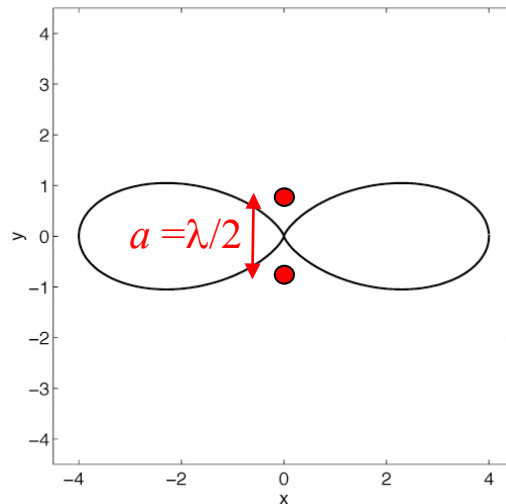
$$m = \pm 1 \rightarrow \theta = \left(\pm \frac{\pi}{2}\right)$$

Zéros:

$$\frac{a \sin \theta}{\lambda} = \frac{m'}{N} \rightarrow \sin \theta = \frac{m'}{2}$$

$$\sin \theta = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \pm 30^\circ; \pm 150^\circ$$

Exemple: $N=2, a = \lambda/2$:



Max:

$$\frac{a \sin \theta}{\lambda} = m \Rightarrow \sin \theta = 2m$$

$$m=0 \Rightarrow \theta = 0, \pi$$

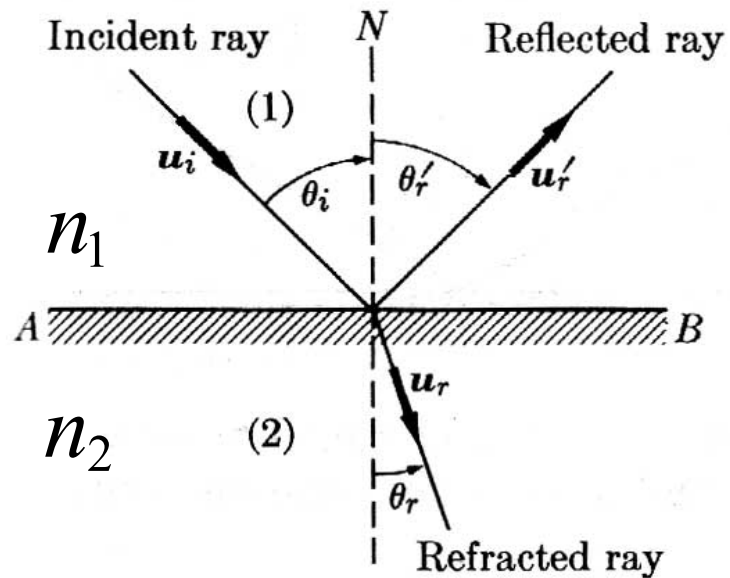
Zéros:

$$\frac{a \sin \theta}{\lambda} = \frac{m'}{N} \rightarrow \sin \theta = m'$$

$$\sin \theta = \pm 1 \rightarrow \theta = \pm 90^\circ$$

Note: Il n'y a pas de zéros pour $a < \lambda/2$

Phase de l'onde réfléchi et de l'onde réfracté



On peut démontrer:

Onde réfléchi:

Si $n_1 < n_2 \Rightarrow \pi$ phase change

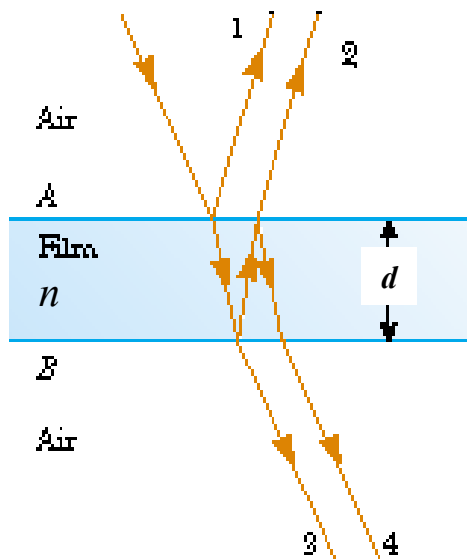
Si $n_1 > n_2 \Rightarrow 0$ phase change

Onde réfracté:

Si $n_1 < n_2 \Rightarrow 0$ phase change

Si $n_1 > n_1 \Rightarrow 0$ phase change

Interférence par réflexion et transmission avec films minces



Le changement de phase de l'onde réfléchie à l'interface air-verre est de π .

Le changement de phase de l'onde réfléchie à l'interface verre-air est 0.

La réfraction ne modifie pas la phase de l'onde.
(voir diapositive précédent)

Hypothèse: rayons à **incidence proche de la normale** d'un film d'épaisseur d .

La différence de parcours entre les rayons réfléchis à la première et à la deuxième interface est:

$$\Delta r \cong 2d$$

La différence de phase entre les rayons réfléchis à la première et à la deuxième interface est:

$$\delta = k\Delta r + \pi \cong 2kd + \pi ; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda/n} = \frac{2\pi}{\lambda}n \quad n: \text{indice de réfraction}$$

Interférence constructive:

(maximum de réflexion, minimum de transmission):

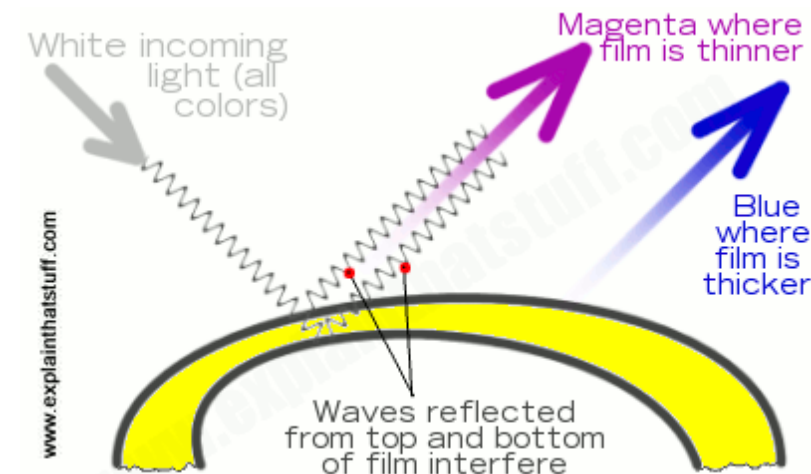
$$I = I_{MAX} \text{ pour } \delta = 2m\pi \Rightarrow 2kd + \pi = \frac{4\pi}{\lambda}nd + \pi = 2m\pi \Rightarrow$$

$$2nd = (m + \frac{1}{2})\lambda$$

Interférence destructive:

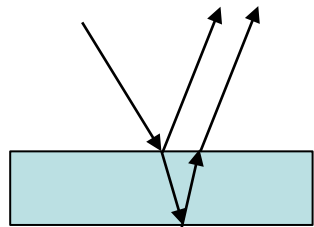
(minimum de réflexion, maximum de transmission)

$$2nd = m\lambda$$



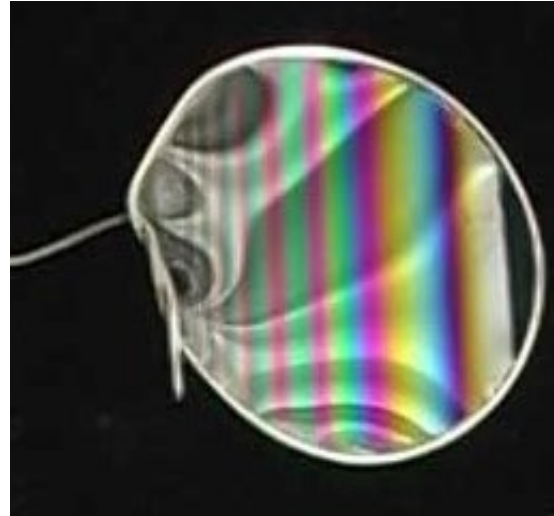
Exemples:

$$I = I_{MAX} \text{ pour } 2nd = (m + \frac{1}{2})\lambda \Rightarrow \lambda = 2nd / (m + \frac{1}{2})$$



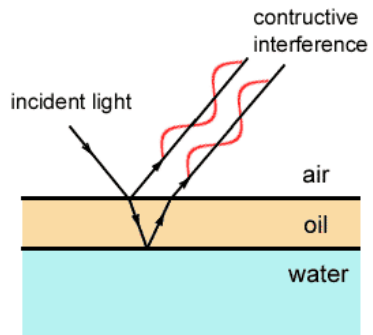
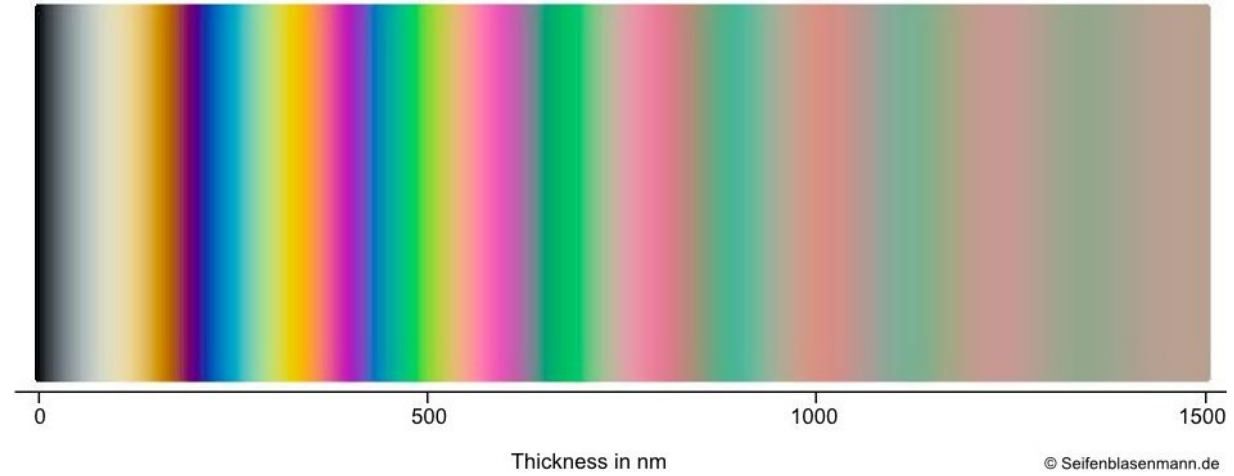
$$n_{air} \cong 1$$

$$n_{soap} \cong 1.3$$



The colors of a soap film

assuming sunlight with normal angle of incidence



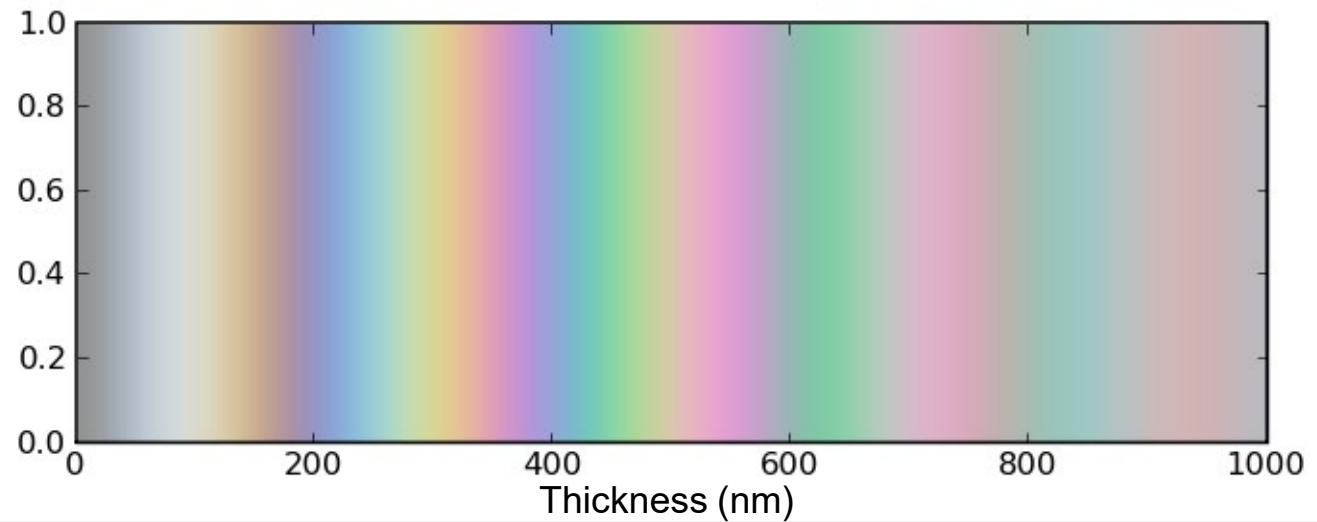
$$n_{air} \cong 1$$

$$n_{oil} \cong 1.44$$

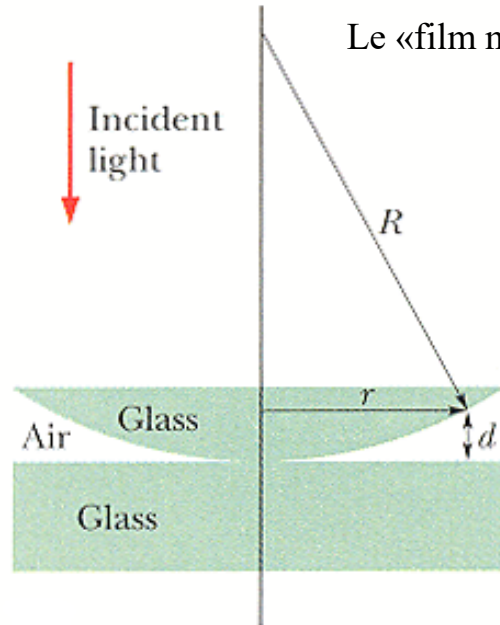
$$n_{water} \cong 1.33$$



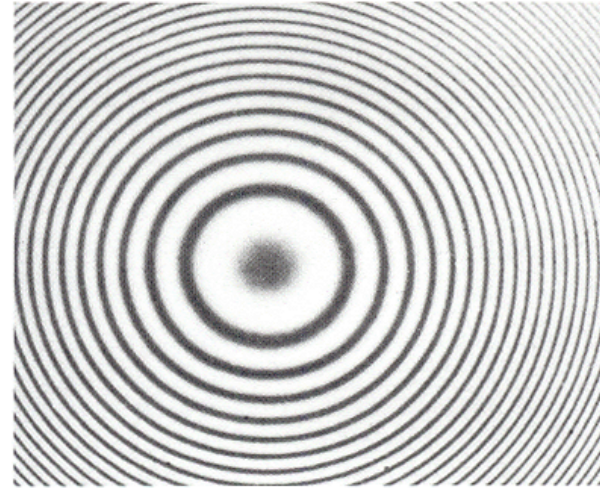
Thin Film - Oil Slick ($n = 1.44$) on Water ($n = 1.33$)



Exemple: Anneaux de Newton



Le «film mince» est la couche d'air d'épaisseur variable entre la lentille et la plaque de verre



$$r_{m,dark} \cong \sqrt{\lambda R m}$$

$$r_{m,bright} \cong \sqrt{\lambda R (m - (1/2))}$$

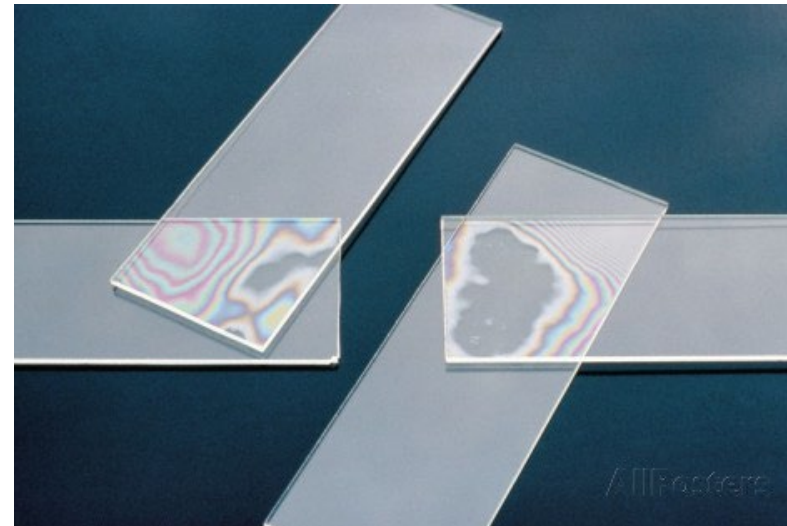
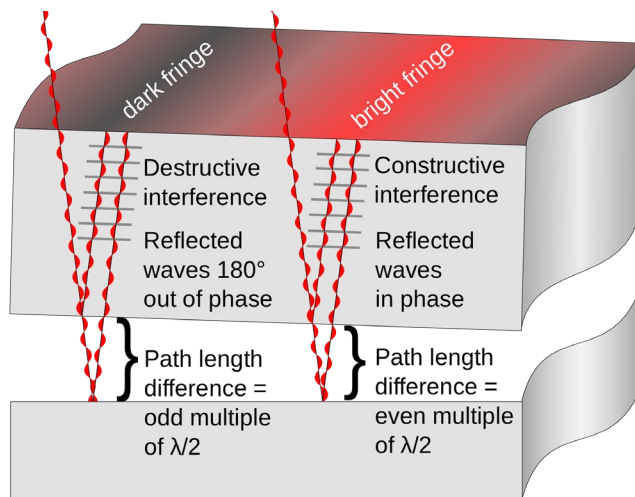
$r_{m,dark}$: rayon du m-ième anneau sombre

$r_{m,bright}$: rayon du m-ième anneau claire

R : rayon de courbure de la lentille

m : numéro de l'anneau sombre (0 pour le premier)

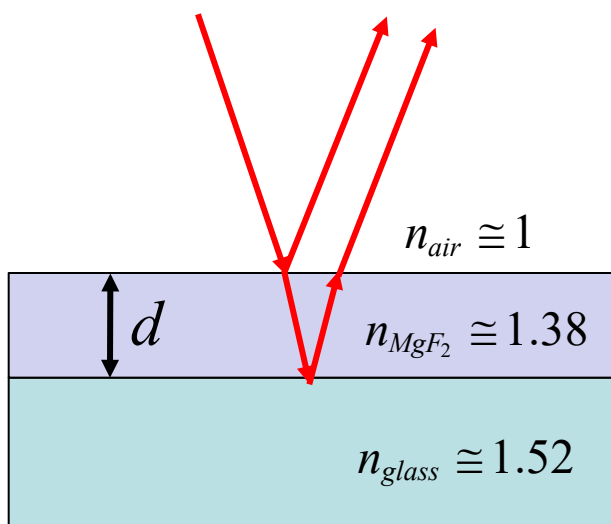
λ : longueur d'onde de la lumière



Note: La longueur de cohérence de la lumière visible du soleil est de l'ordre de 1000 nm.

Donc, pour voir des interférences avec la lumière du soleil, il est nécessaire que la distance entre les surfaces produisant les réflexions interférentes elle doit être inférieure à la longueur de cohérence de la lumière solaire (c'est-à-dire 1000 nm) mais supérieure à la moitié de la longueur d'onde (c'est-à-dire 200 nm à 400 nm dans le visible).

Exemple: Couche antireflets (pour max. de transmission, min. de réflexion)



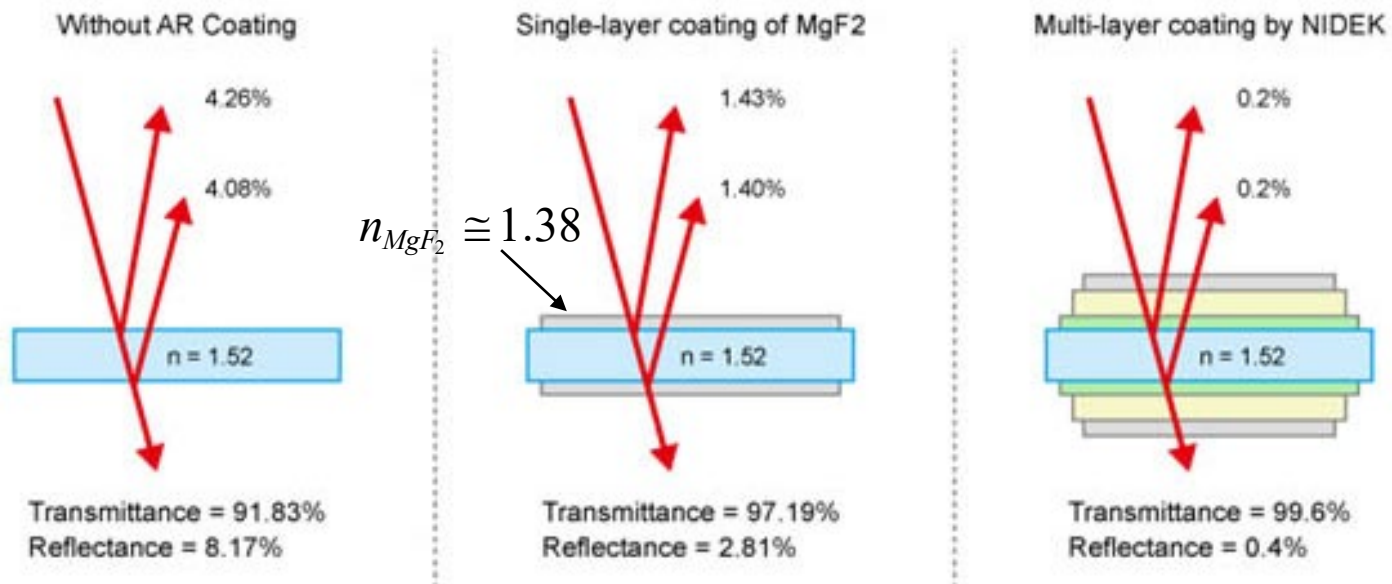
$$\delta = 2kd + \pi + \pi = 2kd$$

Interférence destructive:

$$\delta = 2kd = \frac{4\pi}{\lambda} n_{MgF_2} d = (2m+1)\pi$$

$$2n_{MgF_2} d = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda$$

Pour $m = 0 \Rightarrow d = \lambda / 4n_{MgF_2}$



Tavelures (speckels) du laser

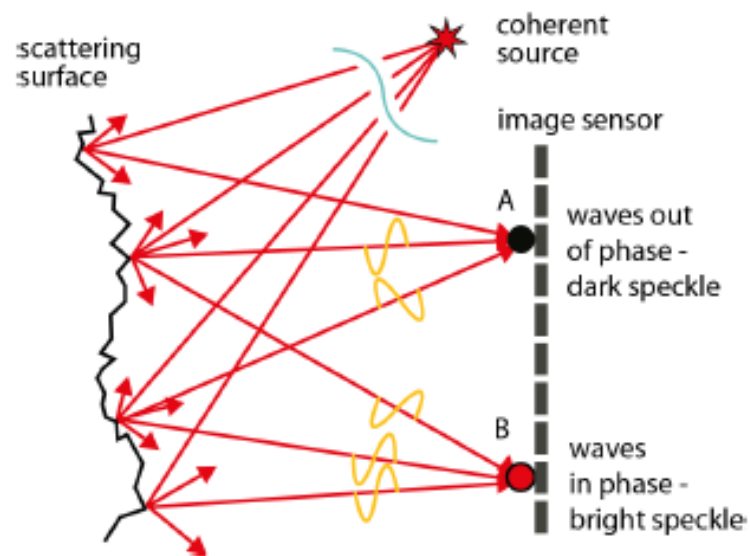
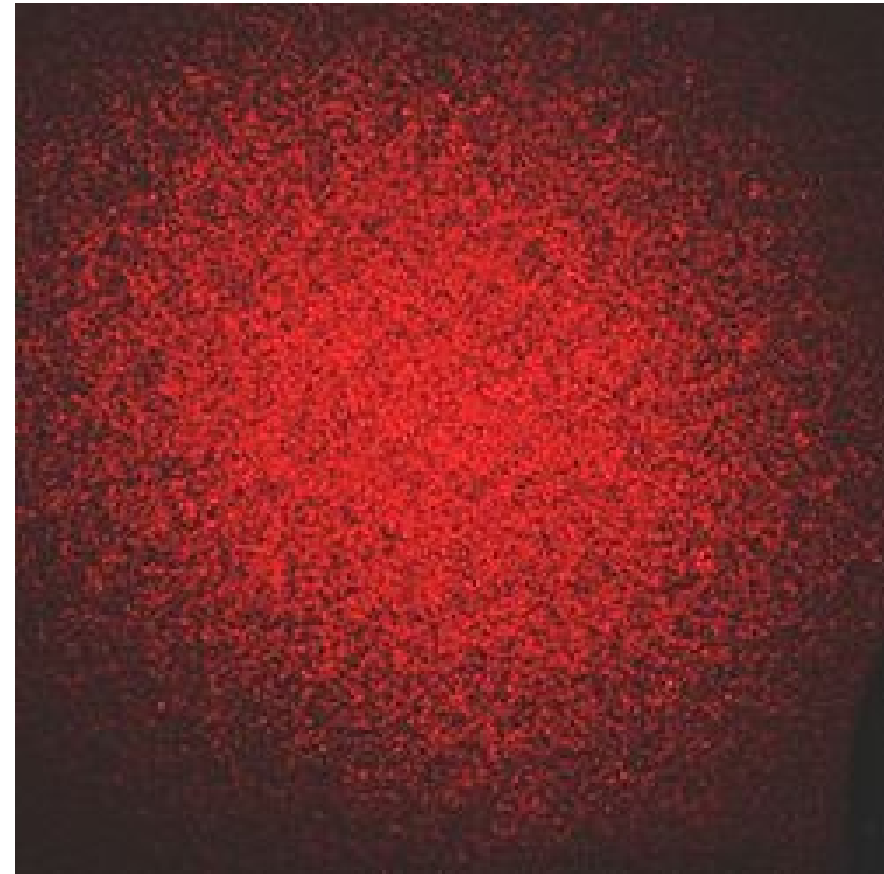
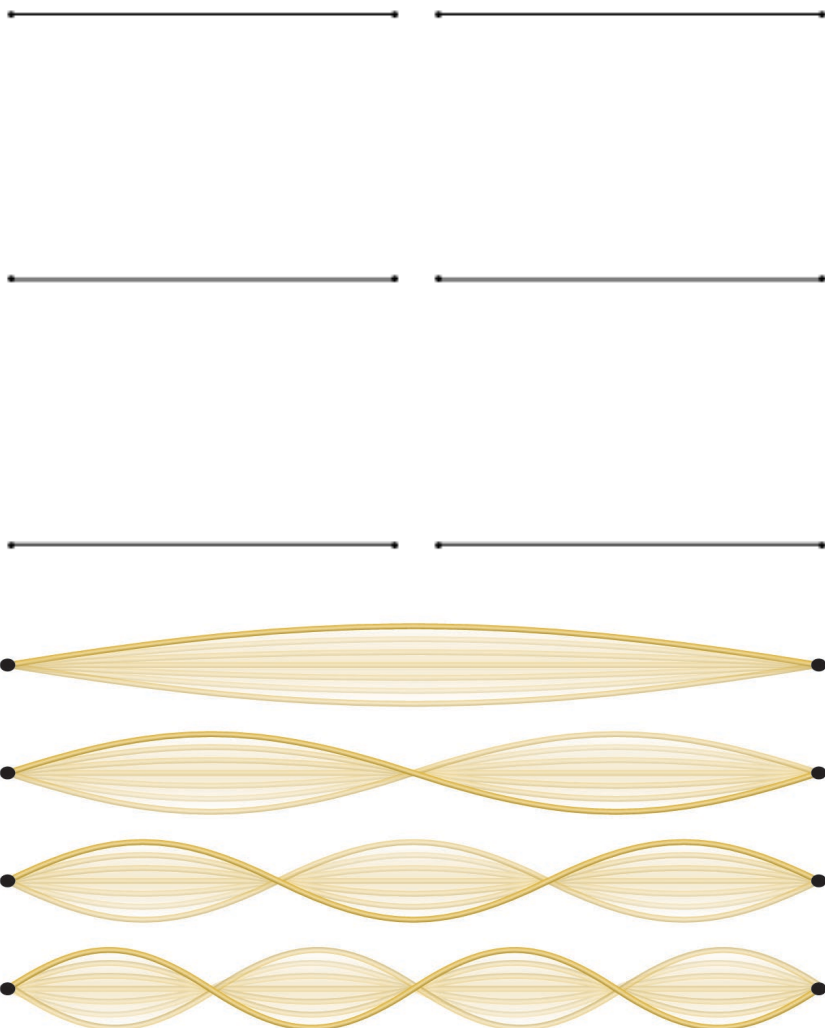


Figure 3: The laser speckle phenomena. Light from a coherent light source scatter on a surface's micro-structure and the resulting reflected waves reach an image sensor in different phases, due to differences in their travel paths. The interference from each wave contributes to the intensity at each pixel.



Ondes stationnaires

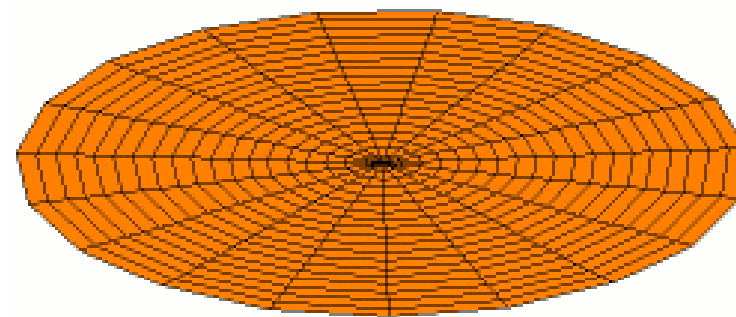
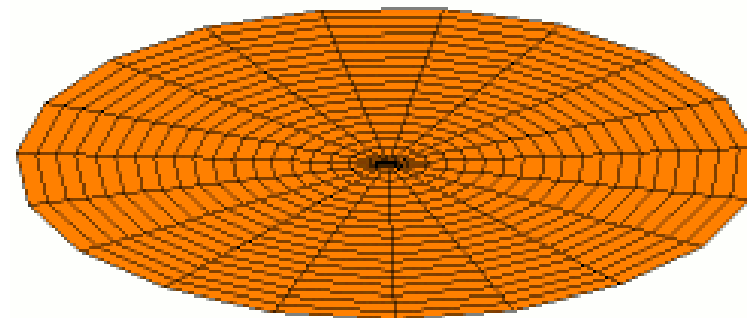
1D: Corde à extrémités fixes



Nota: Nous discutons des ondes stationnaires dans le contexte des interférences, car les ondes stationnaires résultent de l'interférence d'une onde progressive et d'une onde régressive.

(animations)

2D: Membrane à extrémités fixes



Ondes stationnaires et l'équation d'onde

Equation d'onde:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Une onde stationnaire est, par définition, de la forme: $\xi \equiv f(x) \sin(\omega t)$

⇒

Equation pour les ondes stationnaires:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k^2 f = 0 \quad (k = \omega / v)$$

La solution générale de l'équation pour les ondes stationnaires est :

$$f = A \sin kx + B \cos kx$$

avec A et B constantes arbitraires (déterminées par les conditions imposées aux limites)

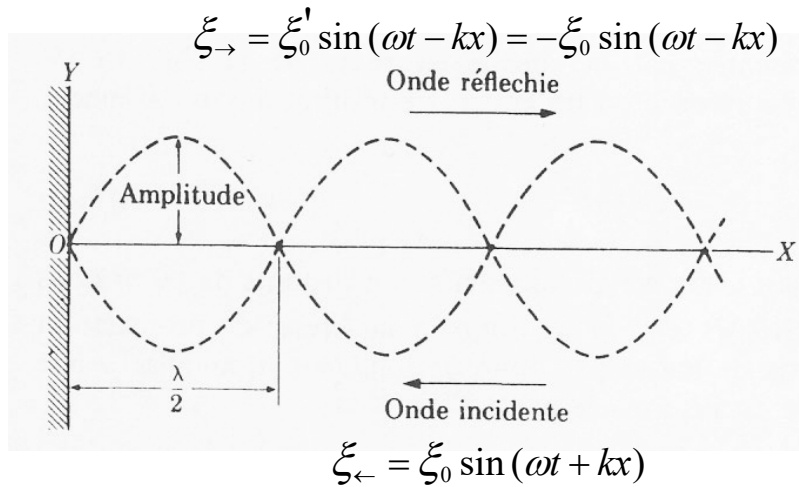
⇒

$$\xi = (A \sin kx + B \cos kx) \sin \omega t$$

Ondes stationnaires à une dimension

corde attachée à une ou deux extrémités

Corde attachée en $x = 0$:



$$\xi = \xi_{\leftarrow} + \xi_{\rightarrow} = \xi_0 \sin(\omega t + kx) + \xi_0' \sin(\omega t - kx)$$

$$\text{Si la corde est attachée en } x=0 \Rightarrow \xi(x=0) = 0 \Rightarrow$$

$$(\xi_0 + \xi_0') \sin(\omega t) = 0 \Rightarrow \xi_0' = -\xi_0$$

\Rightarrow

$$\xi = \xi_0 [\sin(\omega t + kx) - \sin(\omega t - kx)] = 2\xi_0 \sin kx \cos \omega t$$

\Rightarrow

$$\xi = A \cos \omega t \quad A = 2\xi_0 \sin kx$$

ξ est une onde stationnaire

$$\sin kx = 0 ; kx = m\pi \rightarrow x = m \frac{\lambda}{2} \rightarrow A = 0$$

«nœuds»

$$\sin kx = \pm 1 ; kx = (2m+1) \frac{\pi}{2} \rightarrow x = (2m+1) \frac{\lambda}{4} \rightarrow |A| = 2\xi_0$$

«ventres»

Aucune condition sur ω (pour corde attachée en $x=0$ seulement)

Corde attachée en $x = 0$ et en $x = L$

Si la corde est attachée en $x=L \Rightarrow \xi(x=L) = 0 \quad \forall t$

$$\Rightarrow 2\xi_0 \sin kL \cos \omega t = 0 \quad \forall t \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = m\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_m = m\pi / L \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lambda_m = \frac{2\pi}{k_m} = 2L / m$$

Résultat «intuitif»: la longueur de la corde est un multiple des longueurs d'onde possibles

\Rightarrow

$$f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{v}{\lambda_m} = m \frac{v}{2L} = m \frac{1}{2L} (T / \sigma)^{\frac{1}{2}} = m f_1$$

ou

$$f_1 = \frac{1}{2L} (T / \sigma)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2L} v$$

"Modes propres"

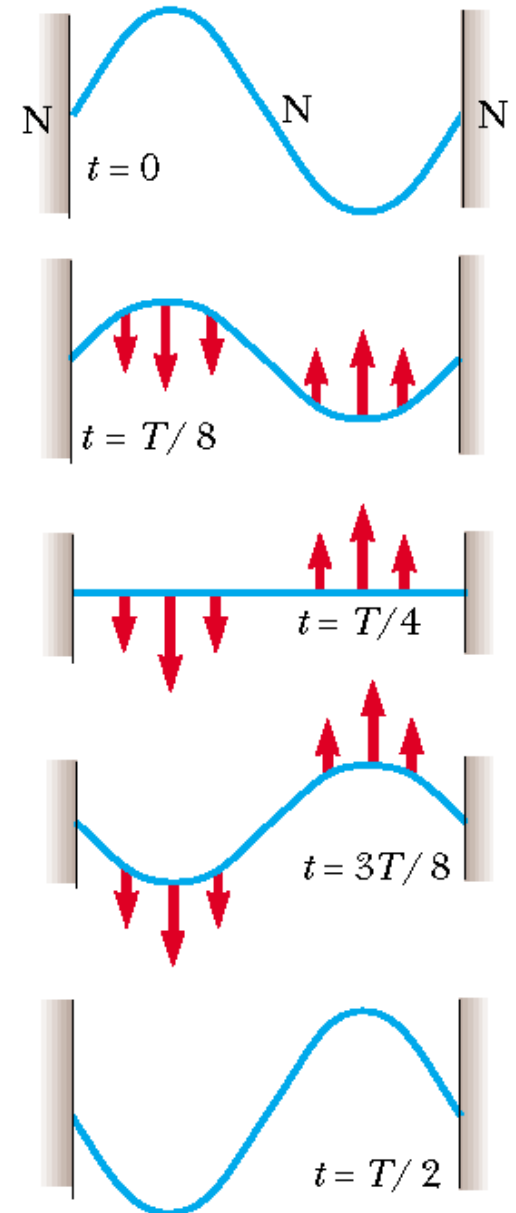
f_1 : fréquence fondamentale

f_2, f_3, f_4, \dots : harmoniques

Rappel:

la vitesse de propagation des ondes le long d'une corde de masse par unité de longueur σ soumis à une tension T est :

$$v = \sqrt{T / \sigma} \quad \text{et la longueur d'onde est } \lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{T / \sigma}$$



$$k_m = m\pi / L$$

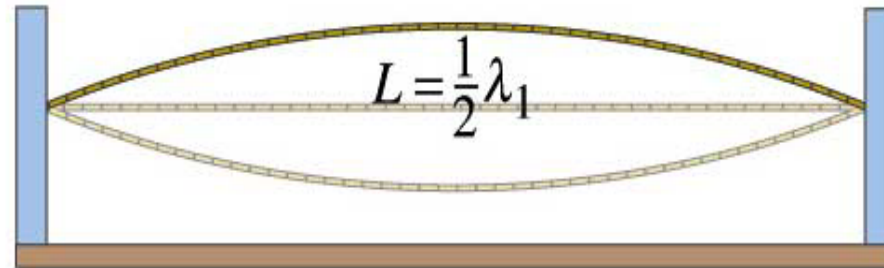
$$\lambda_m = 2L / m$$

$$f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = m \frac{1}{2L} (T / \sigma)^{\frac{1}{2}} = mf_1$$

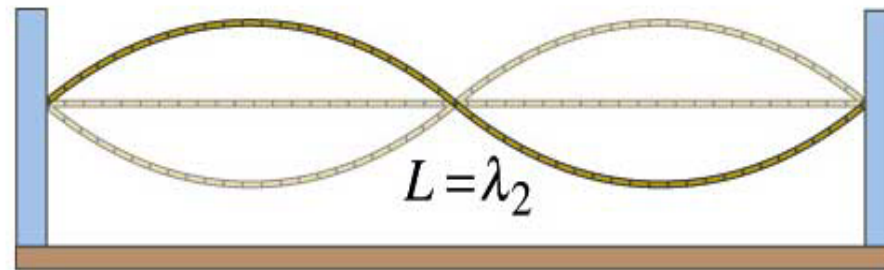
⇒

les fréquences, les longueurs d'onde,
et le vecteur d'onde sont *quantifiés* (pas l'amplitude).

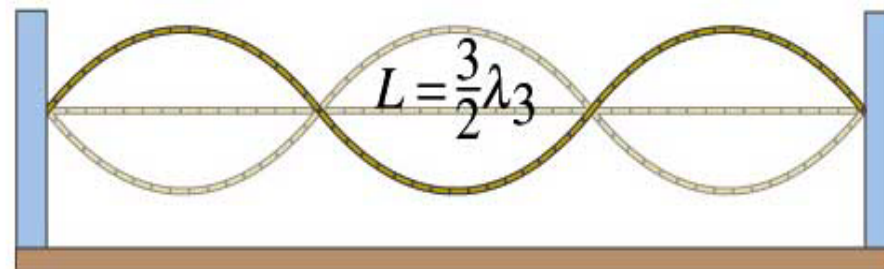
La quantification est une conséquence des conditions
aux limites imposées aux extrémités de la corde
(corde fixe en $x=0$ et en $x=L$)



Fundamental or first harmonic, f_1



First overtone or second harmonic, $f_2 = 2f_1$



Second overtone or third harmonic, $f_3 = 3f_1$

"Modes propres"

Note: Energie des modes sur une corde

$$\xi_m = (2\xi_{0m} \sin k_m x) \cos \omega_m t ; \quad \omega_m = m \frac{\pi}{L} \left(\frac{T}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} ; \quad \lambda_m = \frac{2L}{m}$$

⇒

$$\frac{d\xi_m}{dt} = \dot{\xi}_m = -2\omega_m \xi_{0m} \sin k_m x \sin \omega_m t$$

Pour un oscillateur $\langle E \rangle = \langle E_K \rangle + \langle E_P \rangle = 2\langle E_K \rangle$ ($\langle E_K \rangle$: kinetic energy, $\langle E_P \rangle$: potential energy)

⇒

$$\langle E_m \rangle = 2 \langle E_{K,m} \rangle = 2 \left\langle \frac{1}{2} \int_0^L \dot{\xi}_m^2(x,t) \sigma dx \right\rangle = 4\omega_m^2 \xi_{0m}^2 \sigma \langle \sin^2 \omega_m t \rangle \int_0^L \sin^2 k_m x dx$$

$$\int_0^L \sin^2 k_m x dx = \frac{1}{k_m} \int_0^{m\pi} \sin^2 z dz = \frac{1}{2} m\pi \frac{1}{k_m} = \frac{L}{2}$$

⇒

$$\langle E_m \rangle = 2 \omega_m^2 \xi_{0m}^2 \sigma \frac{L}{2} = \omega_m^2 \xi_{0m}^2 \sigma L = m^2 \xi_{0m}^2 \pi^2 \frac{T}{L}$$

L' énergie augmente comme m^2
(si l' amplitude est la même)

Ondes électromagnétiques stationnaires

Onde électromagnétique polarisée linéairement avec incidence normale sur la surface plane d'un conducteur parfait.

$$\mathbf{E}(0,t)=0$$

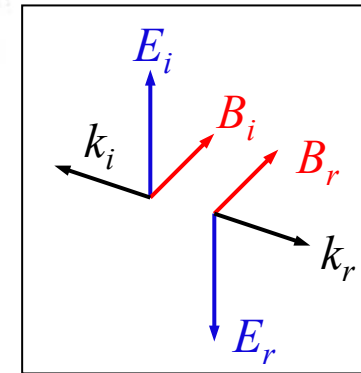
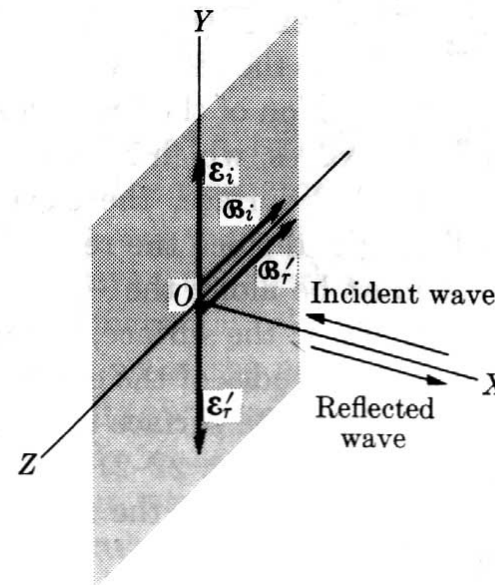
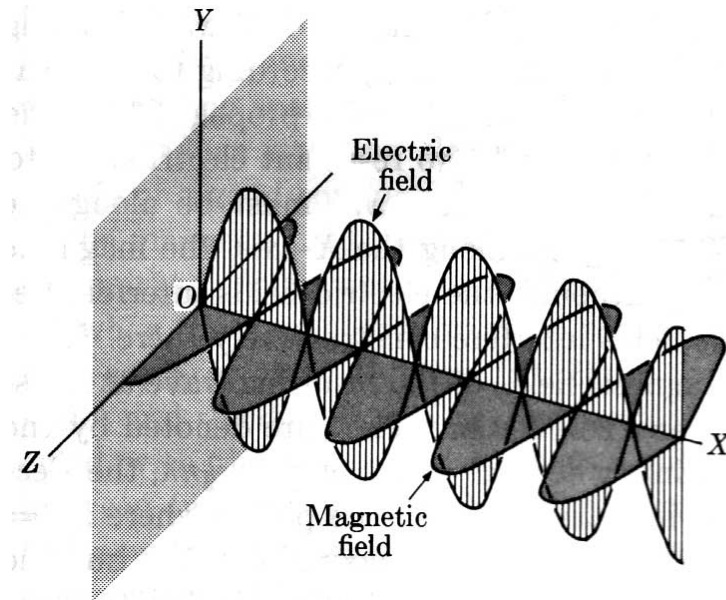
$$\mathbf{B}(0,t)=2B_0 \vec{e}_z$$

\Rightarrow

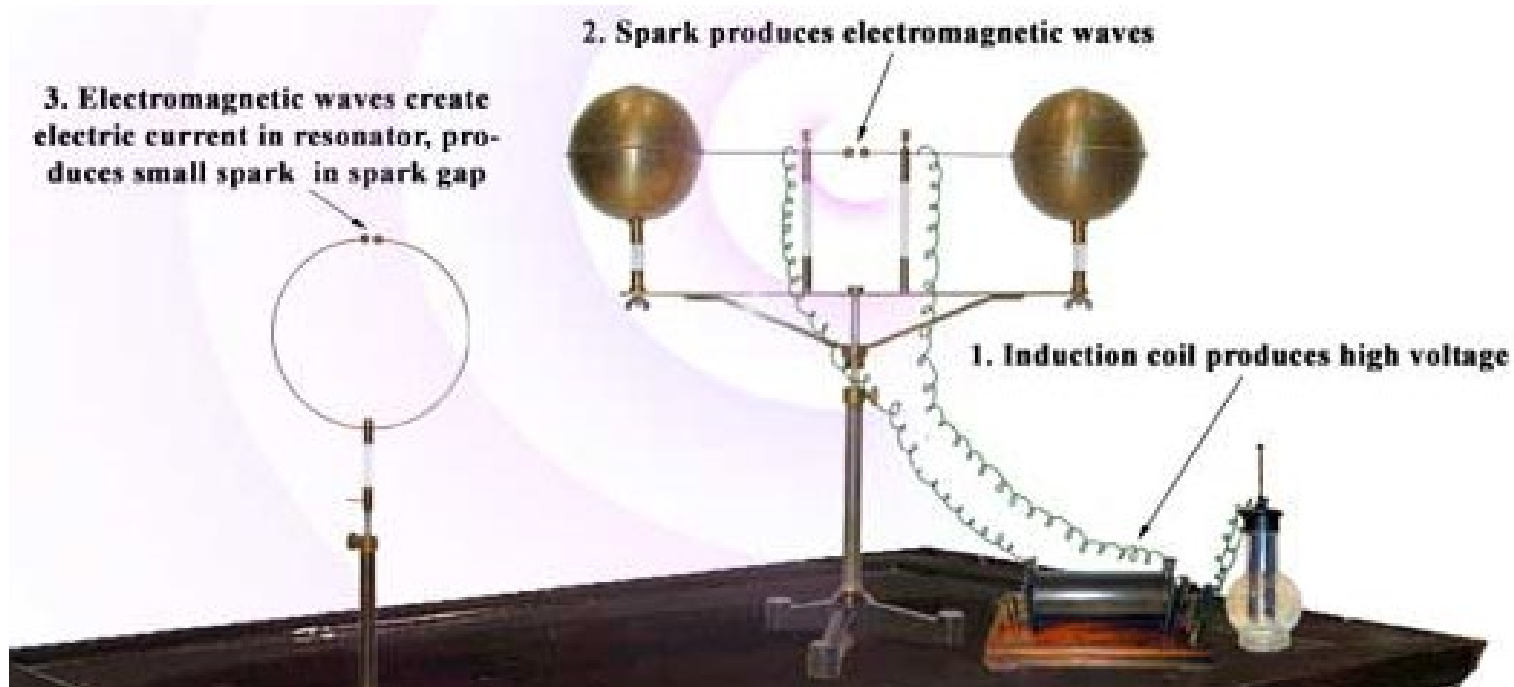
$$\mathbf{E}(x,t)=2E_0 \sin(kx) \cos(\omega t) \hat{y}$$

$$\mathbf{B}(x,t)=2B_0 \cos(kx) \cos(\omega t) \hat{z}$$

Onde stationnaires



Expérience de Hertz pour les ondes **progressives** (démonstration de l'existence des ondes électromagnétiques)

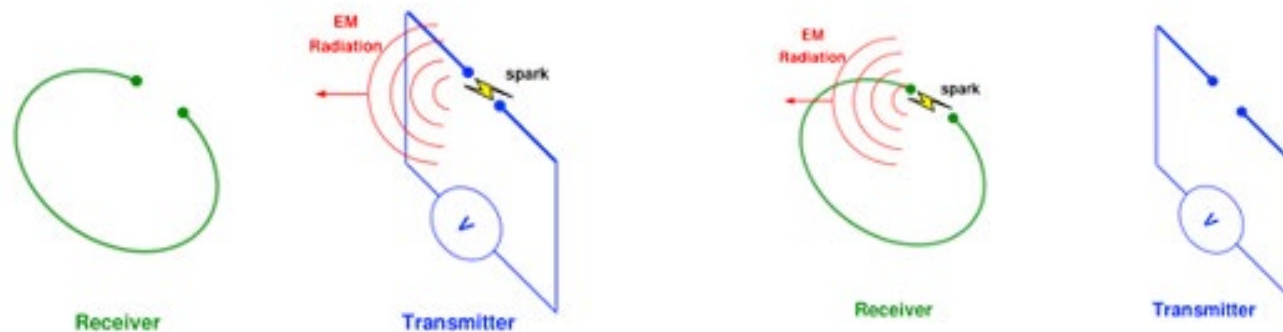


H. Hertz ne vit pas l'application de son dispositif qui allaient permettre la radio, le téléphone portable,

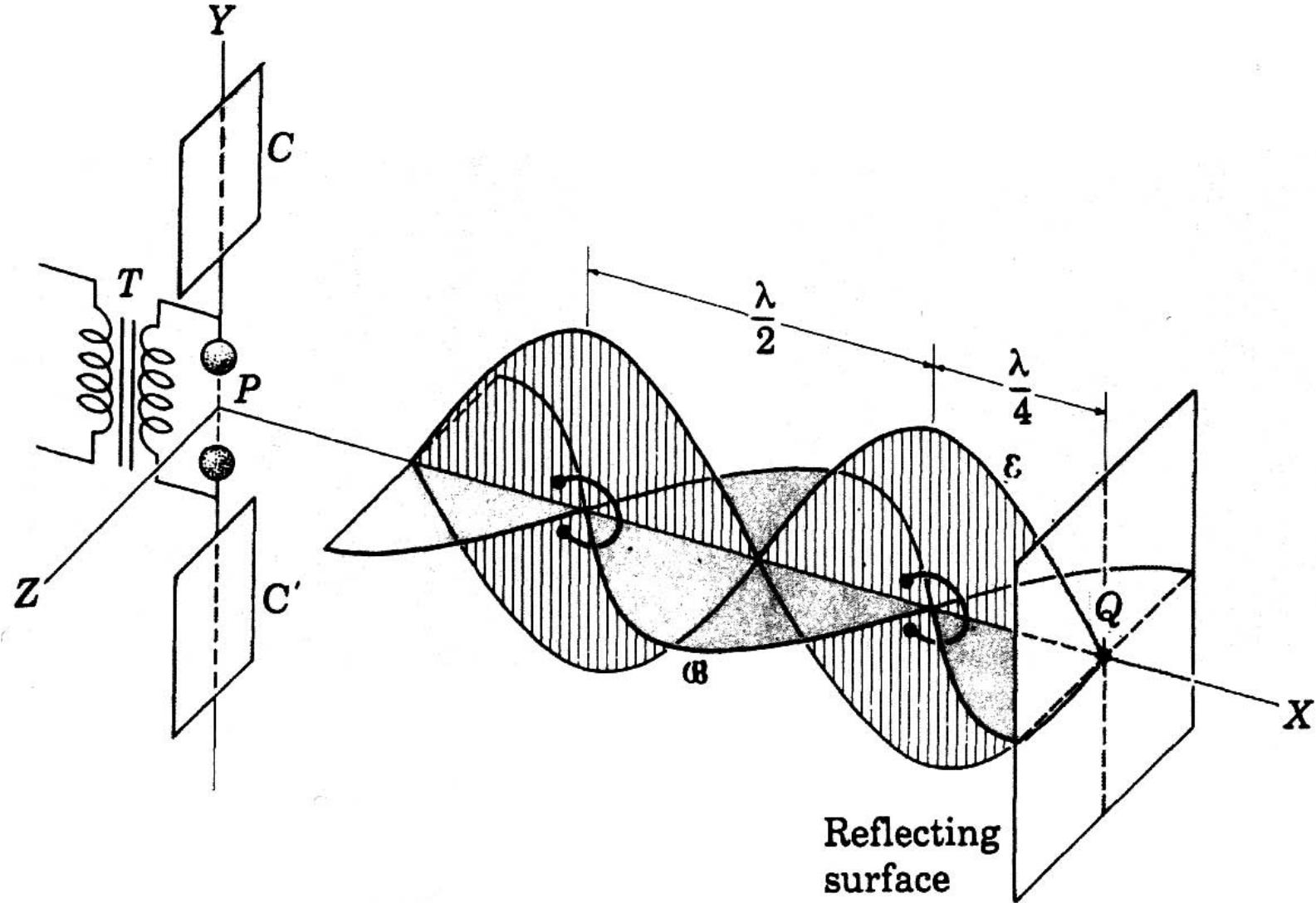
«...cela n'a aucune espèce d'application.

C'est juste une expérience qui permet de prouver que le Maxwell avait raison: nous avons simplement ces ondes électromagnétiques mystérieuses que nous ne pouvons voir à l'œil nu. Mais elles sont là»

H. Hertz

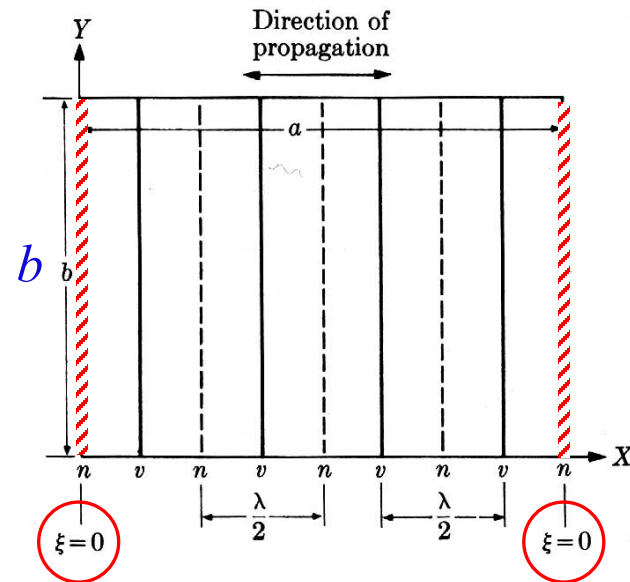


Expérience de Hertz pour les ondes **stationnaires** (démonstration de l'existence des ondes électromagnétiques **stationnaires**)



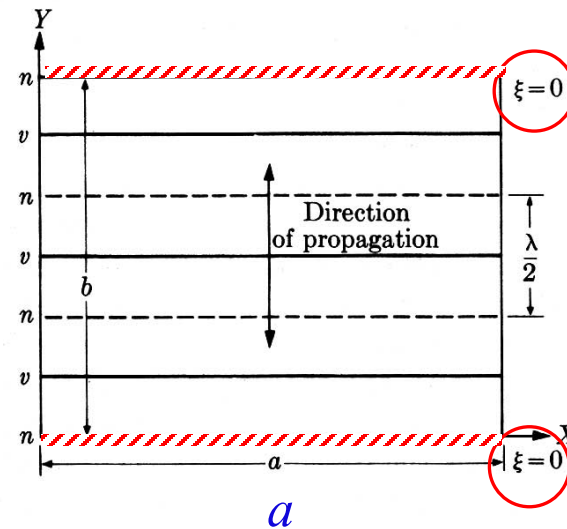
Ondes stationnaires à deux dimensions

membrane rectangulaire tendue sur un cadre



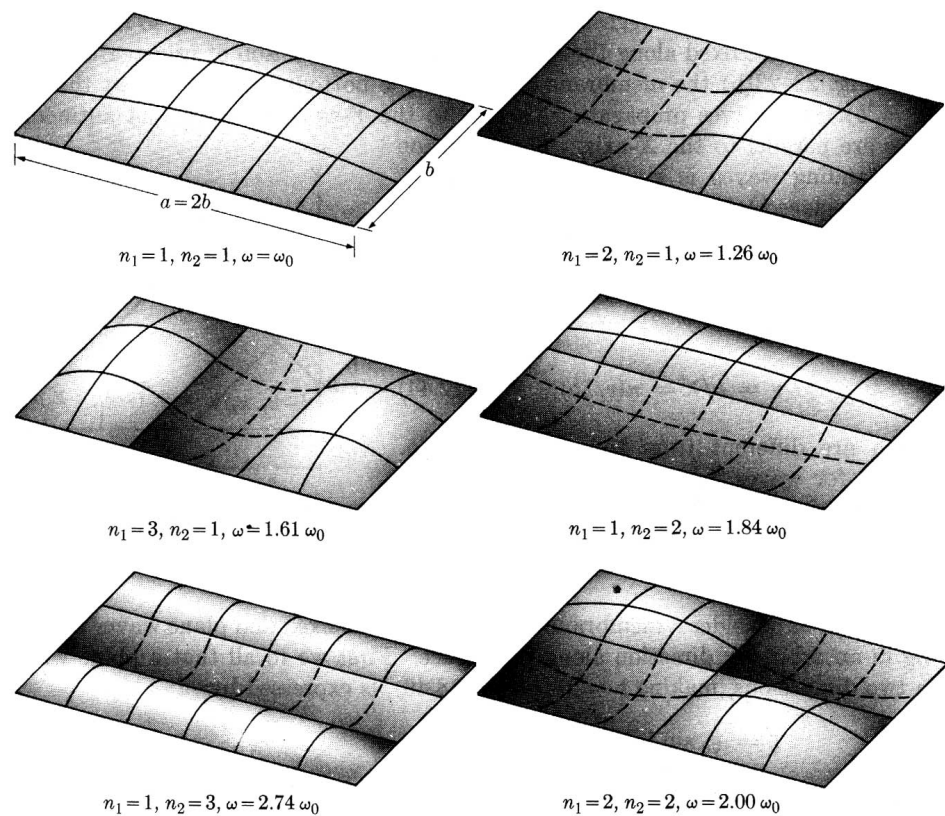
$$a = m \frac{\lambda}{2} ; k_m = m \frac{\pi}{a} ; v = m \frac{v}{2a}$$

$$\xi = A \sin kx \sin \omega t$$



$$b = m \frac{\lambda}{2} ; k = m \frac{\pi}{b} ; v = m \frac{v}{2b}$$

$$\xi = A \sin ky \sin \omega t$$



PQ: $\xi_1 = \xi_0 \sin[\omega t - (k_1 x + k_2 y)]$

QR: $\xi_2 = \xi'_0 \sin[\omega t - (k_1 x - k_2 y)]$

RS: $\xi_3 = \xi''_0 \sin[\omega t - (-k_1 x - k_2 y)]$

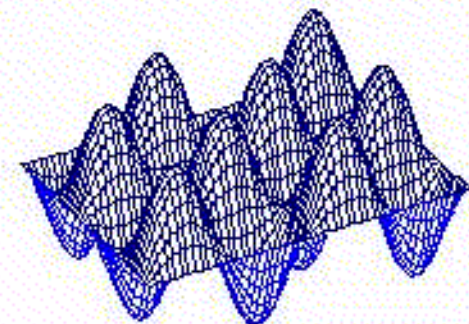
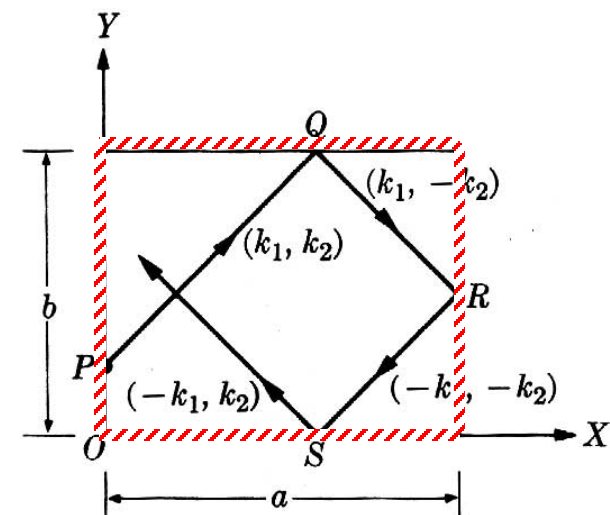
SP: $\xi_4 = \xi'''_0 \sin[\omega t - (-k_1 x + k_2 y)]$

$$\xi(x, y, t) = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$$

$$\xi(0, y, t) = \xi(a, y, t) = \xi(x, 0, t) = \xi(x, b, t) = 0$$

$$k_1 = m_1 \frac{\pi}{a} ; k_2 = m_2 \frac{\pi}{b} ; k = \pi \sqrt{\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2}}$$

$$v = \frac{v}{\lambda} = \frac{vk}{2\pi} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2}}$$



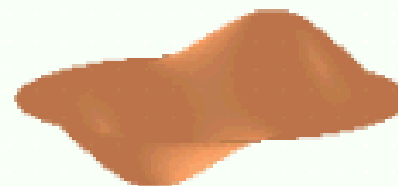
Ondes stationnaires à deux dimensions

membrane circulaire tendue sur un cadre

Mode (0,1)



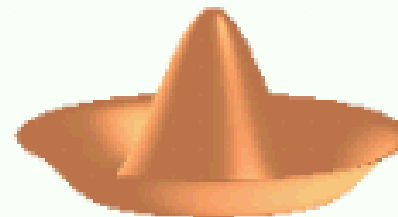
Mode (1,1)



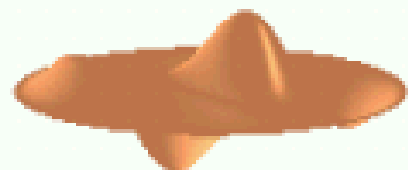
Mode (2,1)



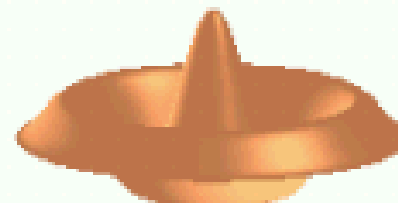
Mode (0,2)



Mode (1,2)



Mode (0,3)



(animation)

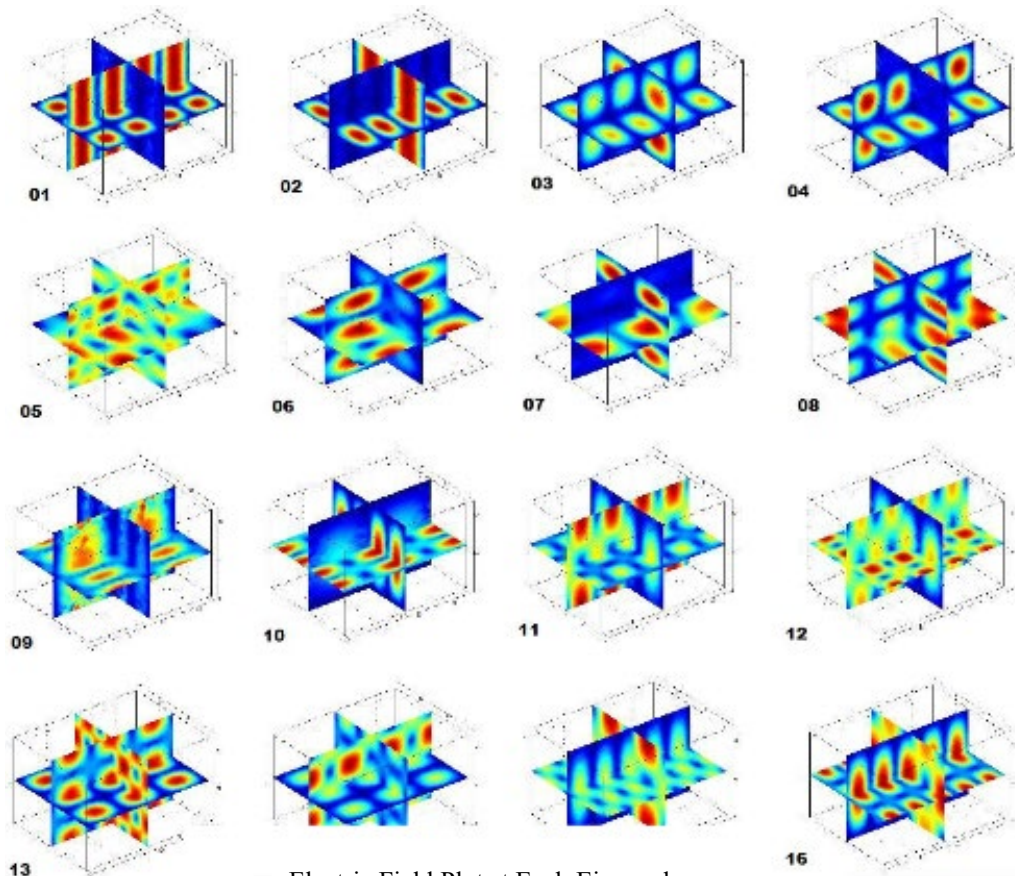
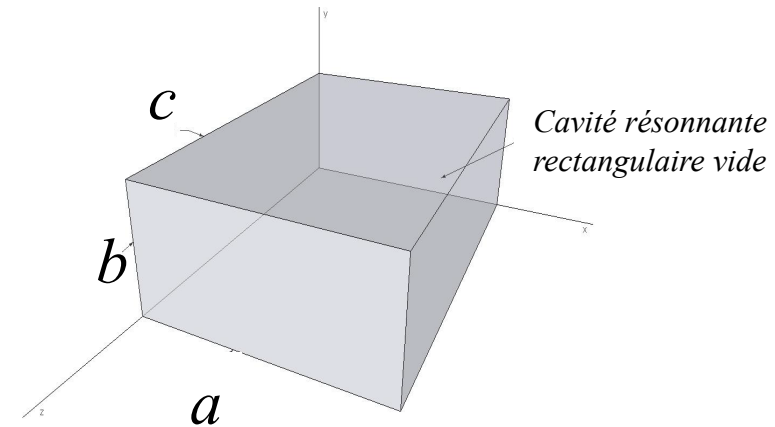
isvr

Ondes stationnaires à trois dimensions

Cavité résonnante rectangulaire vide

$$k_m = \pi \sqrt{\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} + \frac{m_3^2}{d^2}} \quad f_m = \frac{c}{2\pi} k_m = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} + \frac{m_3^2}{d^2}}$$

Example: **Microwave oven** cavity (35 cm × 22.5 cm × 27.1 cm).
Walls of the microwave cavity: Ferritic Steel S430 (1.67×10^6 S)



Electric Field Plot at Each Eigenvalue

Eigen Values	Resonant Freq (GHz)	Quality Factor	Eigen Values	Resonant Freq (GHz)	Quality Factor
1	2.3842	10208.83	9	2.4632	6988.96
2	2.4096	10657.64	10	2.4634	8463.74
3	2.4345	8038.74	11	2.4745	7754.48
4	2.4346	7511.69	12	2.4747	7998.10
5	2.4383	7354.49	13	2.4842	7359.39
6	2.4386	7231.76	14	2.4845	8119.39
7	2.4387	7623.11	15	2.4996	7987.16
8	2.4389	7648.57	16	2.5010	8015.43