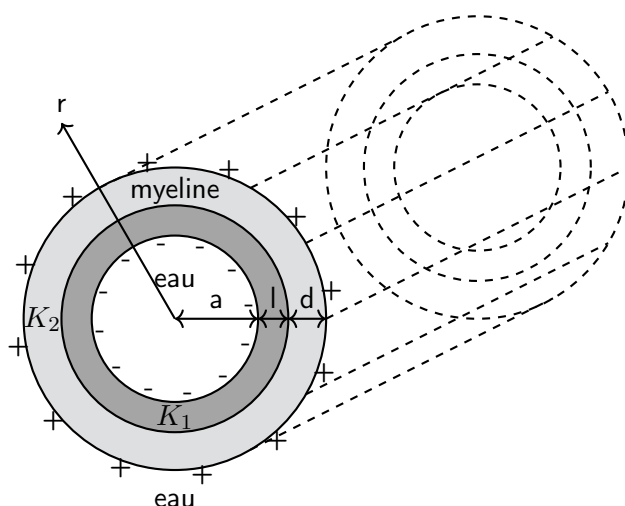


16 janvier 2025

## Examen

### 1 L'électrostatique d'un axone

Les neurones communiquent à travers de longs tubes cellulaires qu'on appelle axones. On modélise un axone connectant le cerveau à la moelle épinière comme un cylindre infini (voir dessin) avec une membrane isolante (constante diélectrique  $K_1 = 5$ ) formant le bord du cylindre. La membrane s'étend entre  $r = a$  et  $r = a + l$  avec  $a = 1 \mu\text{m}$  et  $l = 5 \text{ nm}$ . À l'intérieur de l'axone il y a de l'eau supposée conductrice. La membrane est à son tour entourée d'une couche épaisse de myéline (isolant de constante diélectrique  $K_2 = 8$ ), d'épaisseur  $d = 0.5 \mu\text{m}$ . À l'extérieur se trouve de l'eau supposée conductrice. De la charge négative est distribuée uniformément sur la surface intérieure ( $r = a$ ) avec une densité  $\sigma = -10 \mu\text{C}/\text{m}^2$ , et la surface extérieure ( $r = a + l + d$ ) est chargée positivement avec une charge totale opposée.



Indication :  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ .

- Trouver l'expression du champ électrique  $\vec{E}$  en tout point de l'espace.
- Évaluer le champ électrique en  $r = a + l/2$ .
- Quelle est la différence de potentiel  $\Delta V = V_{out} - V_{in}$  entre la surface extérieure et la surface intérieure ?
- Est-ce que la présence de la myéline augmente ou diminue  $\Delta V$  ?
- Un canal s'ouvre à travers les membranes de l'axone, entre la surface extérieure et la surface intérieure. Un ion de potassium  $K^+$  (masse  $6.5 \times 10^{-26} \text{ kg}$ , charge  $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ) initialement au repos traverse les membranes depuis l'extérieur et atteint l'intérieur de l'axone sans subir de frottement. Quelle est sa vitesse une fois arrivé à l'intérieur et combien d'énergie faut-il pour le ramener de nouveau à l'extérieur ?
- Trouver l'expression de l'énergie électrique totale stockée par l'axone si celui-ci a une longueur de  $L$ .

## 2 Clavier Capacitif

Un clavier capacitif est un capteur tactile basé sur le principe suivant. Un condensateur plan est formé de deux plaques carrées de côté  $L = 1$  cm, avec une distance entre les plaques de  $d_0 = 0.5$  mm si aucune pression n'est exercée sur le clavier (qui est une des plaques du condensateur). Un diélectrique mou de constante diélectrique  $K = 10$  est placé entre les plaques du condensateur. Le condensateur, initialement déchargé, est connecté en série avec une source de tension constante  $\mathcal{E} = 5$  V et une ampoule qu'on modélise comme une résistance  $R = 10 \Omega$ . On suppose que lorsque le courant qui traverse l'ampoule dépasse 0.2 A, l'ampoule apparaît comme allumée.

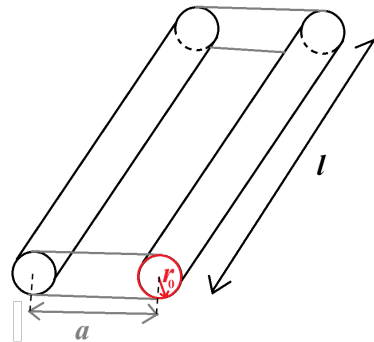
Indication :  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$  F/m.

- Aucune pression n'est exercée sur le clavier. Calculer la capacité du condensateur. Calculer le temps nécessaire pour que le condensateur se charge à 99% du maximum.
- On suppose maintenant que le condensateur a été chargé au maximum. À  $t = 0$ , on appuie sur la touche du clavier de sorte que la distance entre les plaques diminue soudainement et devient  $d = d_0 - \Delta$ , avec  $\Delta > 0$ . Montrer que le potentiel aux bornes du condensateur devient  $(1 - \Delta/d_0)\mathcal{E}$  soudainement (à  $t = 0$ ).
- En prenant  $(1 - \Delta/d_0)\mathcal{E}$  comme condition initiale, dériver une expression pour l'évolution temporelle du potentiel aux bornes du condensateur en supposant que  $\Delta$  reste constant. En déduire le courant  $i(t)$  qui circule dans le circuit.
- De combien faut-il appuyer la touche (donc quelle valeur de  $\Delta$ ) pour que l'ampoule s'allume ?
- Pour  $\Delta = 0.2$  mm, calculer l'énergie totale délivrée par la source de tension à partir du moment où on appuie.
- Pour  $\Delta = 0.2$  mm, calculer l'énergie dissipée par l'ampoule à partir du moment où on appuie. Expliquer la différence entre les énergies trouvées en (e) et (f).

### 3 Une antenne rectangulaire

On considère une antenne d'émission d'ondes électromagnétiques composée d'un cadre conducteur rectangulaire en cuivre (résistivité  $\rho_{\text{cuivre}} = 1.7 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$ ) de largeur  $a = 1 \text{ cm}$  et de longueur  $l \gg a$  (voir dessin). Le fil en cuivre composant le cadre est un fil cylindrique de rayon  $r_0 = 1 \text{ mm}$ .

Indication :  $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ .



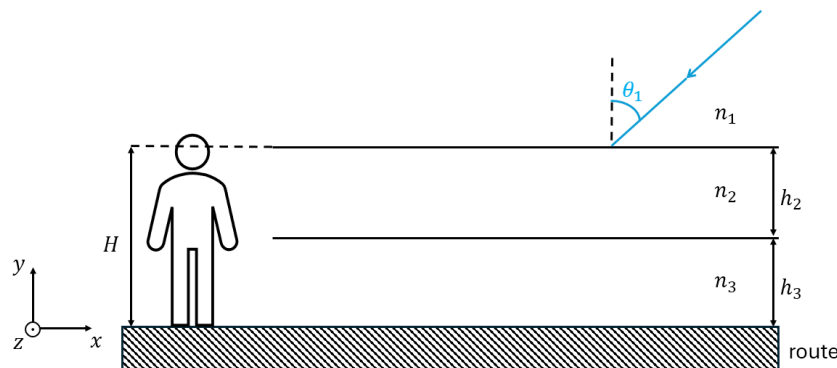
- Calculer la résistance totale  $R$  de l'antenne en considérant uniquement les deux longs bouts de fil du cadre (donc en négligeant les bouts de largeur  $a$ ) connectés en série. Montrer qu'elle est proportionnelle à la longueur  $l$  de l'antenne,  $R = \alpha l$  et déterminer la valeur de la constante  $\alpha$ .
- Calculer la capacité  $C$  de l'antenne en considérant les deux longs bouts de fil du cadre comme les deux conducteurs d'un condensateur (donc en négligeant les bouts de largeur  $a$ ). Montrer qu'elle est proportionnelle à la longueur  $l$  de l'antenne,  $C = \beta l$  et déterminer la valeur de la constante  $\beta$ .
- Calculer l'auto-inductance  $L$  de l'antenne en considérant un courant qui circule dans le cadre et en évaluant le flux magnétique à travers le cadre. Montrer qu'elle est proportionnelle à la longueur  $l$  de l'antenne,  $L = \gamma l$  et déterminer la constante  $\gamma$ .
- À l'un des bouts de l'antenne on connecte une source de tension AC avec une certaine fréquence angulaire  $\omega$ . On néglige la résistance de l'antenne et on modélise le système comme un circuit  $LC$  avec une source de tension, un condensateur et une bobine connectés tous en parallèle. Calculer l'impédance équivalente du système. Exprimer la fréquence angulaire de résonance  $\omega_0$  de ce système en fonction de  $l$ .
- On ajuste la fréquence angulaire de la source AC à  $\omega = \omega_0$ . Quelle doit être la longueur  $l$  de l'antenne pour que l'onde émise soit une onde radio de fréquence  $f = 80 \text{ MHz}$  ?
- On suppose que l'antenne produit une onde radio de fréquence  $f = 80 \text{ MHz}$  et qui se propage dans l'air (considéré comme le vide). On place un bout de fil droit de longueur  $d = 1 \text{ m}$  à une certaine distance  $D \gg d$  de l'antenne et aligné avec la direction de propagation de l'onde. À cette distance  $D$ , l'amplitude du champ électrique de l'onde est de  $5 \text{ V/m}$  et on considère l'onde comme une onde plane sinusoïdale. On suppose que le bout de fil est traversé par un courant constant  $i = 10 \text{ A}$ . Calculer l'expression de la force totale sur le fil en fonction du temps et donner sa valeur maximale.

Indication : on rappelle la formule trigonométrique  $\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin(a) \sin(b)$ .

#### 4 Modélisation d'un mirage

On souhaite modéliser un mirage observé par une personne se trouvant sur une route. On considère un rayon de lumière bleue (voir dessin) de longueur d'onde  $\lambda = 470 \text{ nm}$  traversant différentes couches de l'atmosphère sans perdre d'intensité. Pour simplifier on considère trois couches avec indices de réfraction  $n_1 = 1.02$ ,  $n_2 = 1.01$  et  $n_3 = 1.0001$ . On suppose que le rayon se trouve dans la couche supérieure d'indice  $n_1$  et arrive à l'interface avec la couche du milieu d'indice  $n_2$  avec un angle  $\theta_1 = 80^\circ$  par rapport à la normale à l'interface. Le rayon arrive finalement sur les yeux de la personne (à une hauteur  $H = 2 \text{ m}$ ) avec une intensité de  $500 \text{ W/m}^2$ . Les couches inférieures ont des épaisseurs  $h_2$  et  $h_3$  telles que  $h_2 + h_3 = H$ .

Indication :  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ .



- Calculer les angles décrivant la déviation du rayon à chaque interface et dessiner la trajectoire du rayon.
- Que vaut la distance entre la personne observant ce rayon lumineux et la position apparente du mirage (c'est à dire l'origine apparente du rayon) sur la route ?
- Que vaut l'amplitude du champ électrique et magnétique et à quelle fréquence oscillent les champs ?
- Est-ce que la lumière est polarisée en arrivant sur la personne ? Si oui, quelle est la direction du champ électrique et pourquoi ?
- Quelle est la force exercée par l'onde sur les yeux de la personne si ceux-ci ont une surface de  $2 \text{ cm}^2$  ? On suppose que la lumière est parfaitement absorbée et que le rayon arrive perpendiculairement à la surface des yeux.
- On considère un deuxième rayon de même longueur d'onde et d'angle d'incidence  $\theta_1$  arrivant depuis le haut directement sur les yeux de la personne. Trouver une expression des valeurs possibles de l'épaisseur  $h_2$  de la couche 2 pour qu'il y ait, en tout temps, une interférence destructive avec l'autre rayon à la position des yeux. On supposera que les deux rayons sont initialement en phase lorsqu'ils atteignent  $y = H$  depuis le haut, et que lors d'une réflexion la phase de l'onde augmente de  $\pi$ .