

Physique Générale: électromagnétisme – Cours 28

review théorique

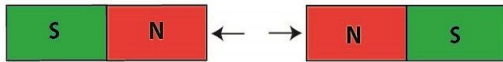
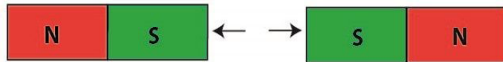
On a observé que...

(1) un **aimant** agit sur un **aimant**

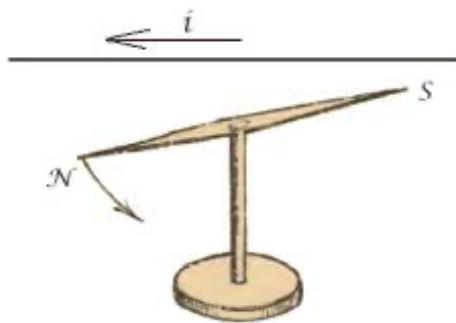
Les pôles opposés s'attirent



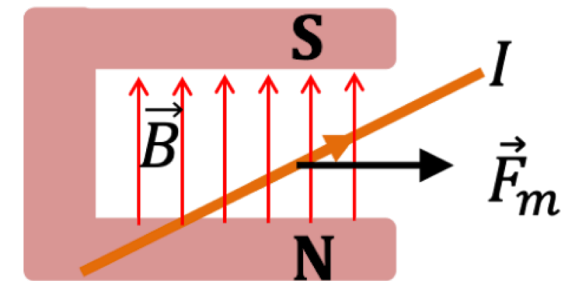
Les mêmes pôles se repoussent



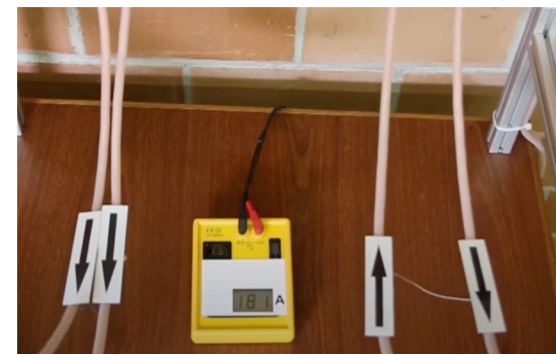
(2) un **courant** agit sur un **aimant**



(3) un **aimant** agit sur un **courant**

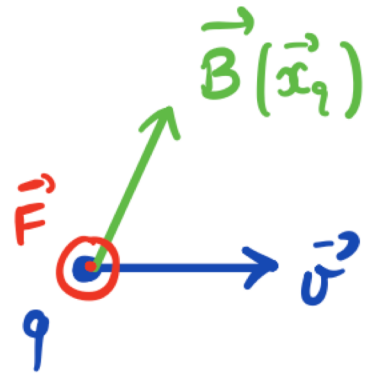


(4) un **courant** agit sur un **courant**



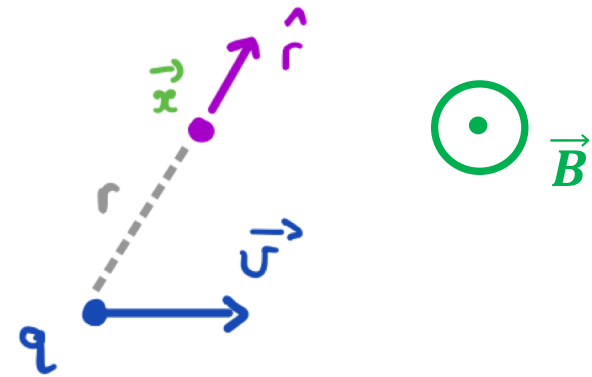
Une charge en mouvement est soumise à \vec{B} et est source de \vec{B} !

effet de \vec{B}



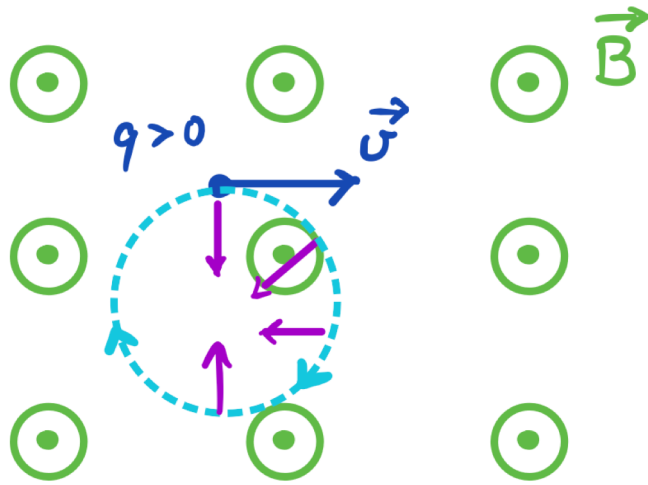
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

source de \vec{B}



$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

Conséquences de la force magnétique sur des charges:

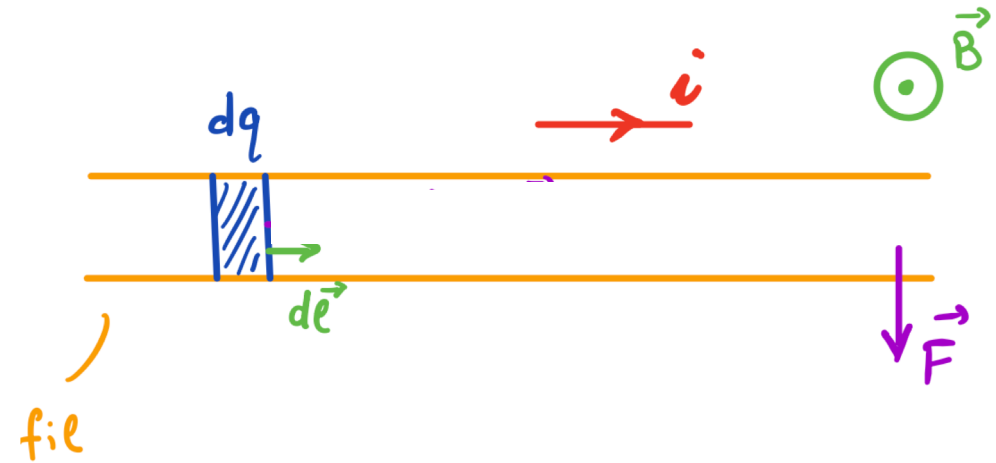


mouvement cyclotronique

$$R = \frac{mv}{|q|B} \quad (\text{rayon})$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{|q|B}{m} \quad (\text{fréquence})$$

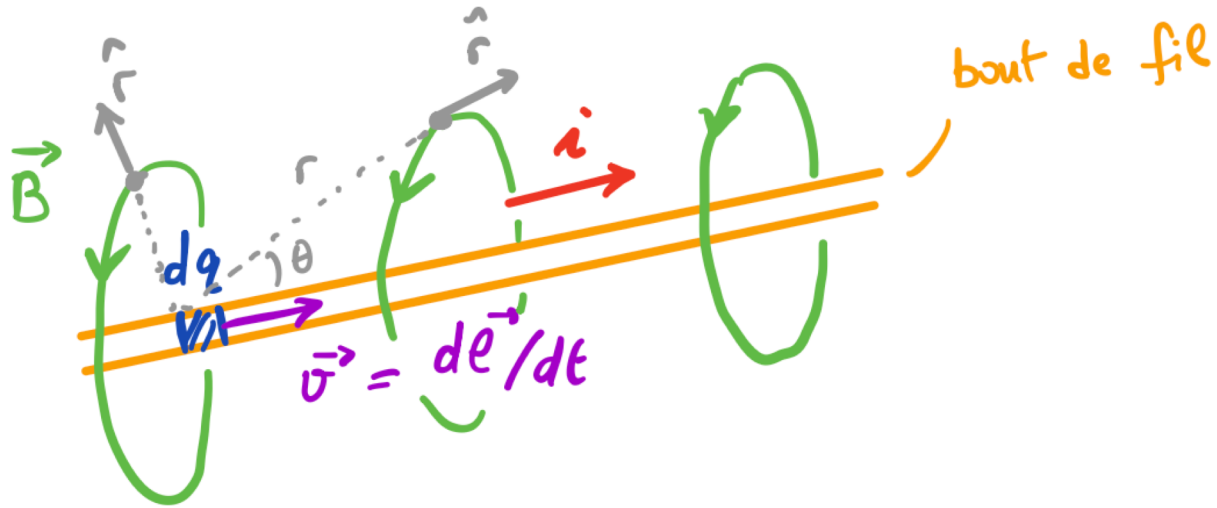
et la force ne travaille pas, donc $|\mathbf{v}| = \text{const}$



force sur un fil avec courant

$$\vec{F} = \int_{\text{fil}} i d\vec{e} \times \vec{B}$$

Conséquence de \mathbf{B} produit par le mouvement de charges:



$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

Champ produit par un courant

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_{\text{fil}} \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

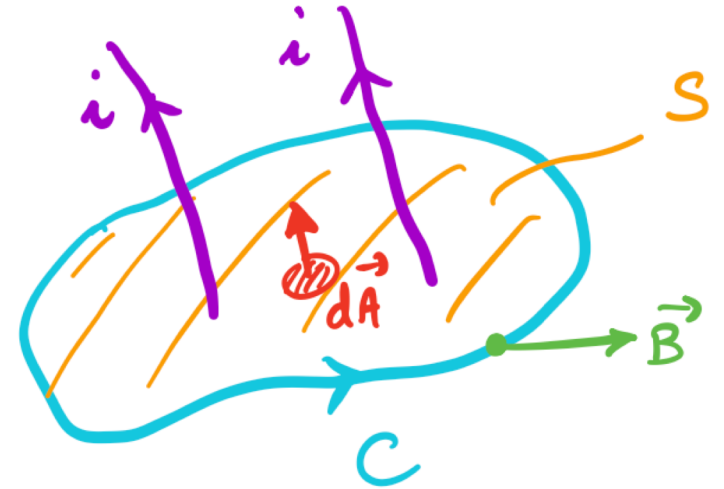
" loi de Biot - Savart "

Loi d'Ampère permet souvent de calculer \vec{B} facilement:

Pour tout parcours fermé C ,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_{\text{ent.}}^C$$

"loi d'Ampère"



$$i_{\text{ent.}}^C = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

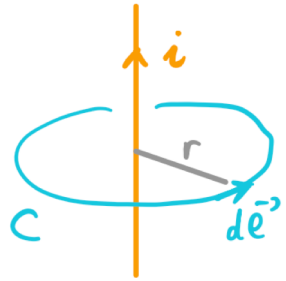
élément de surface orientée par parcours C

densité de courant $[A/m^2]$

ici, $\int \vec{B} \cdot d\vec{\ell} > 0$
car i orienté
comme S .

Exemples de calculs de \vec{B} avec Ampère:

fil droit infini

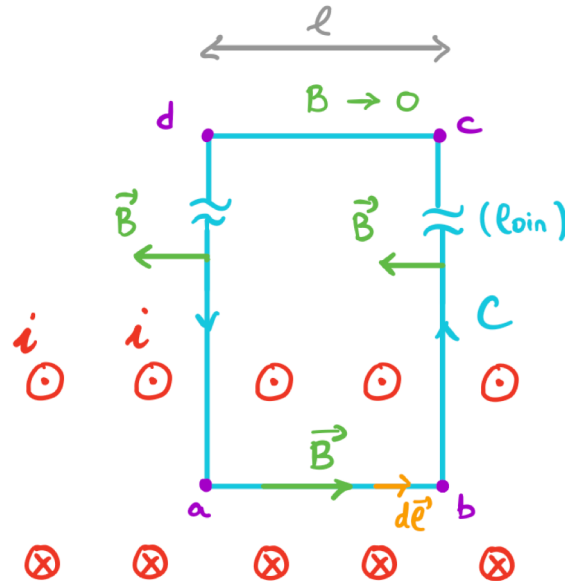
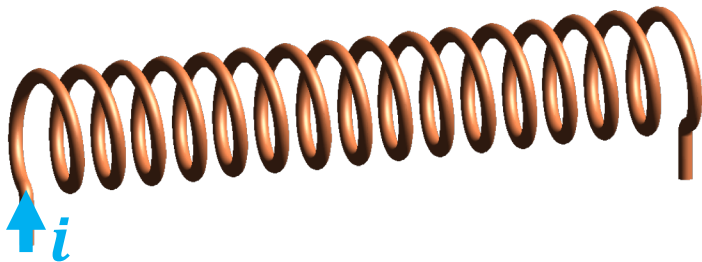


Par symétrie :

$$\begin{cases} \vec{B} \text{ azimutal} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{e} = B dl \\ B = B(r) \Rightarrow \oint B dl = B 2\pi r \end{cases}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

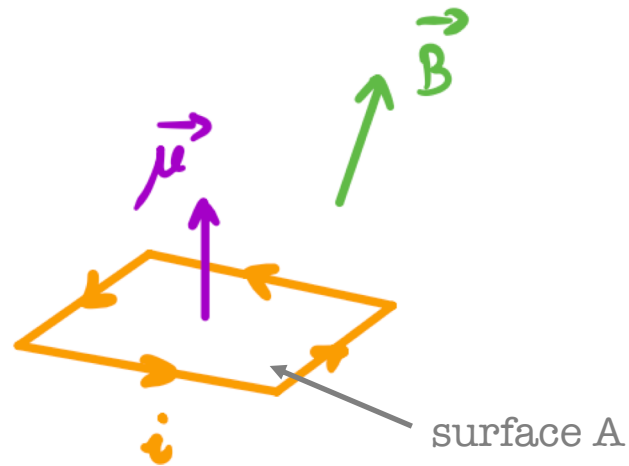
solénoïde



$$\oint_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{e} + \int_b^c \underbrace{\vec{B} \cdot d\vec{e}}_{=0} + \int_c^d \cancel{\vec{B} \cdot d\vec{e}} + \int_d^a \underbrace{\vec{B} \cdot d\vec{e}}_{=0}$$

$$B_{\text{solénoïde}} = \frac{\mu_0 i N_{\text{tot}}}{L_{\text{tot}}}$$

Dipôles magnétiques et l'équivalence "spire courant" — "aimant"

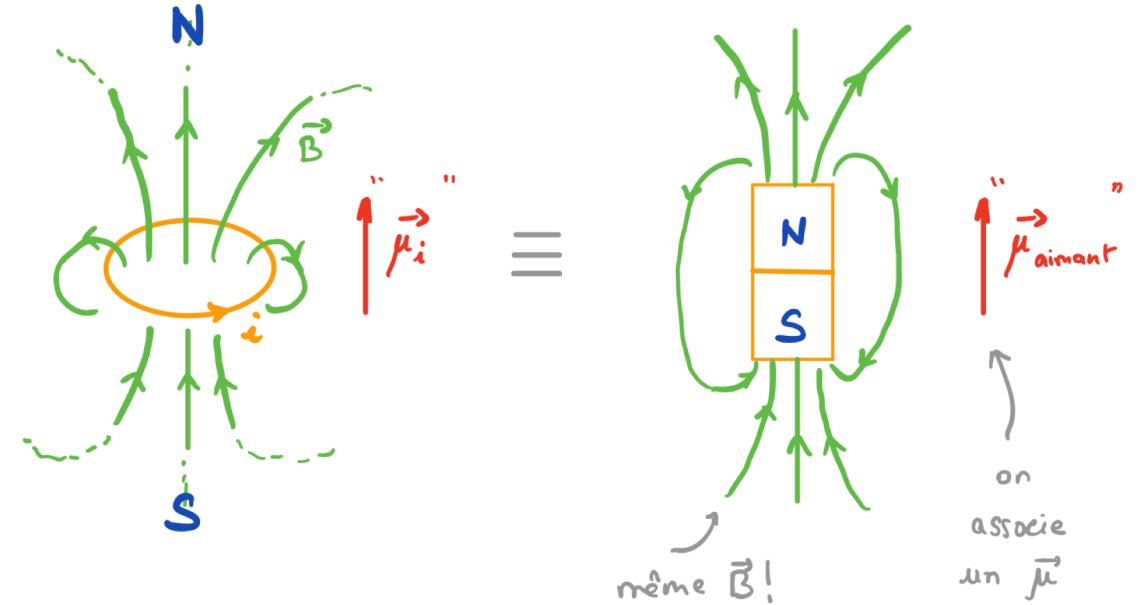


$$\vec{\mu} = i \vec{A}$$

(moment magnétique)

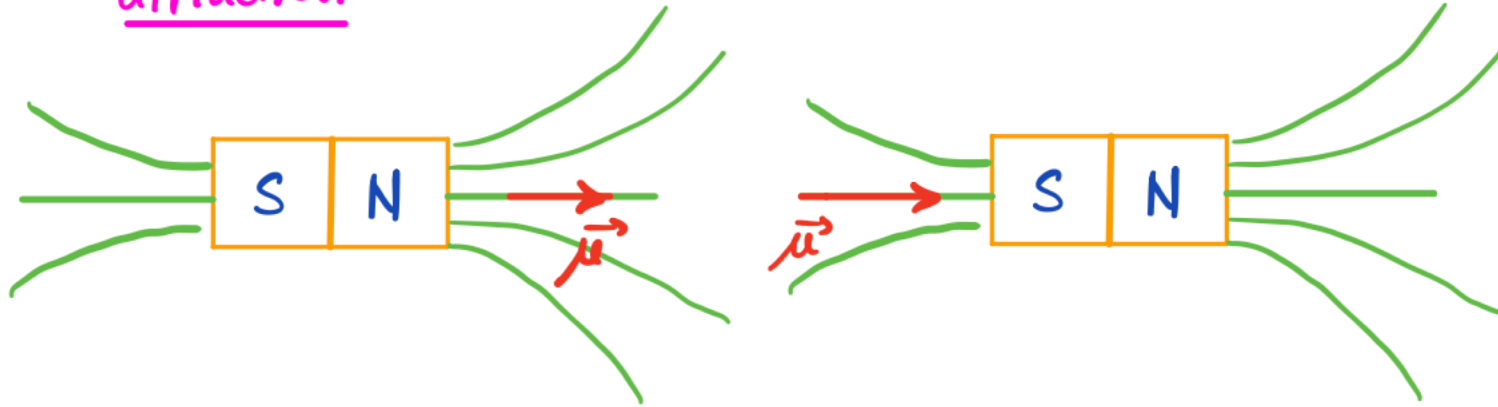
$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

(couple de force dans \mathbf{B} externe uniforme)

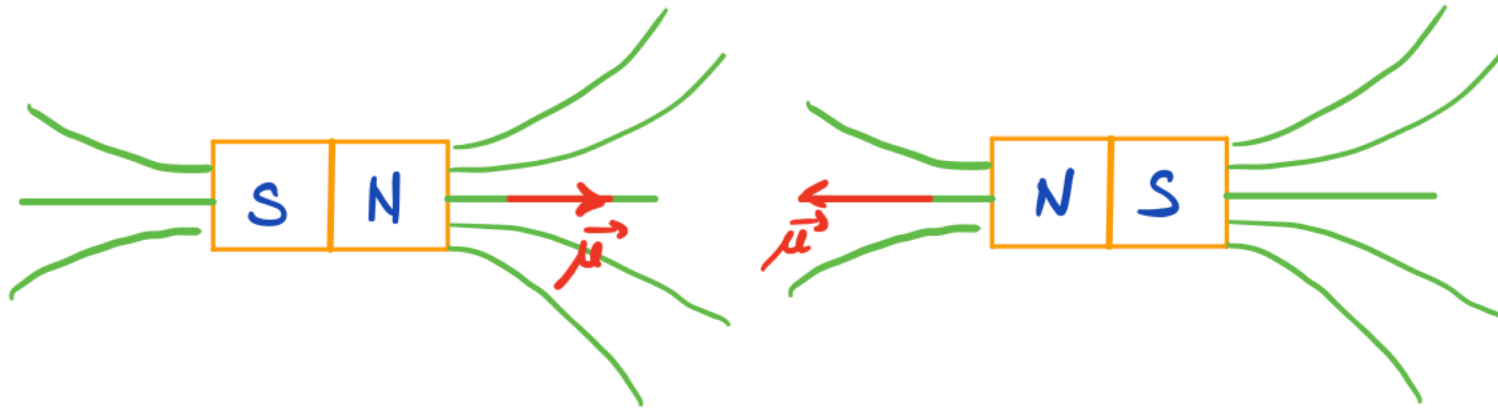


Dipôles dans \mathbf{B} non-uniforme explique force entre aimants

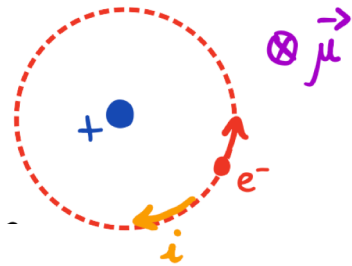
attraction :



répulsion :



B dans la matière et réponse à un champ externe:



**magnétisation
d'un milieu:**

$$\vec{M} = \frac{\sum_{\text{volume}} \vec{\mu}_i}{\text{volume}}$$

souvent $\mathbf{M} = 0$ car les μ sont aléatoires

avec un \mathbf{B}_0 externe les μ peuvent s'aligner

réponse à un champ externe \mathbf{B}_0

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} = K_m \vec{B}_0$$

permeabilité magnétique
relative

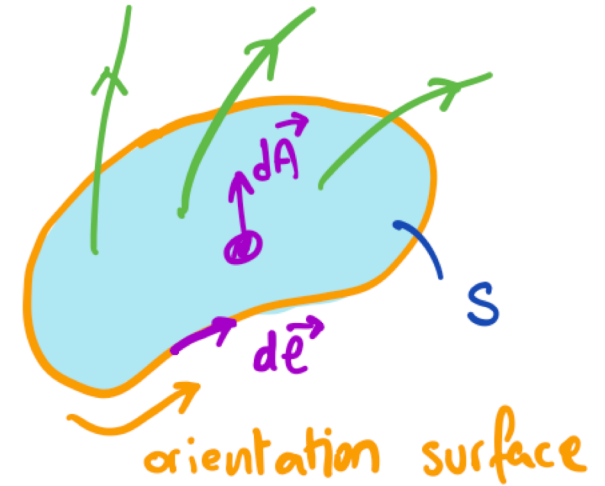
matériaux paramagnétiques: $K_m > 1$ (cas extrême: ferromagnétiques)

matériaux diamagnétiques: $K_m < 1$ (cas extrême: supraconducteurs)

Phénomène d'induction: un \mathbf{B} peut induire un \mathbf{E}

Loi de Faraday (loi d'induction)

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B^S}{dt}$$



$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\text{travail boucle}}{\text{charge}} \quad [\text{V}]$$

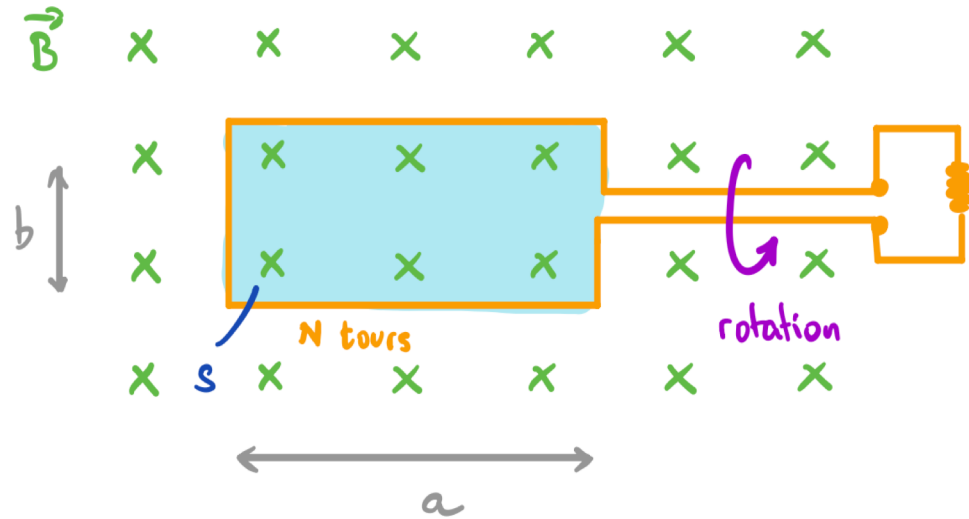
↑ emf induite!
↑ champ électrique induit!

$$\Phi_B^S = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

règle de Lenz: emf s'oppose (si courant induit) à la variation de flux magnétique

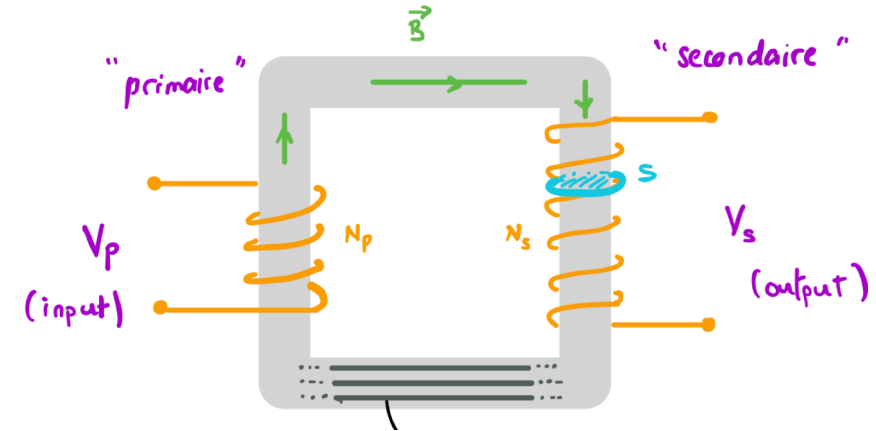
Applications du phénomène d'induction

génération d'électricité (AC)



$$\mathcal{E} = - N a b B \frac{d}{dt} (\cos\theta) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$$

transformateurs



noyau de fer a deux effets:

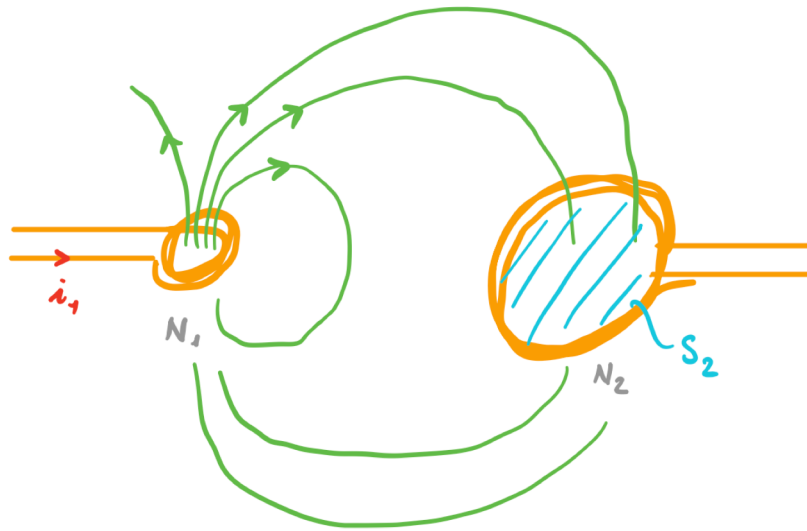
- même B traverse les bobines
- B amplifié par un facteur K_m

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p}$$

autres exemples: **chauffage par induction, freinage magnétique, striction, etc.**

Inductance mutuelle et auto-inductance

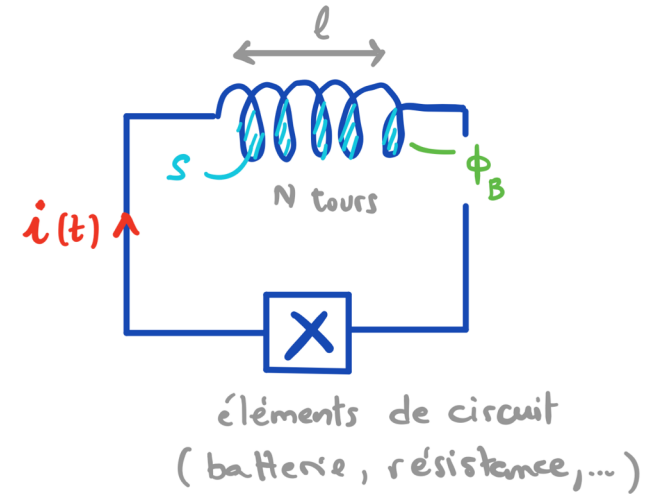
inductance mutuelle



$$M_{12} = \frac{\Phi_B^2}{i_1} = \frac{N_2 \Phi_B^{S_2}}{i_1}$$

$$M_{21} = M_{12} \equiv M$$

auto-inductance



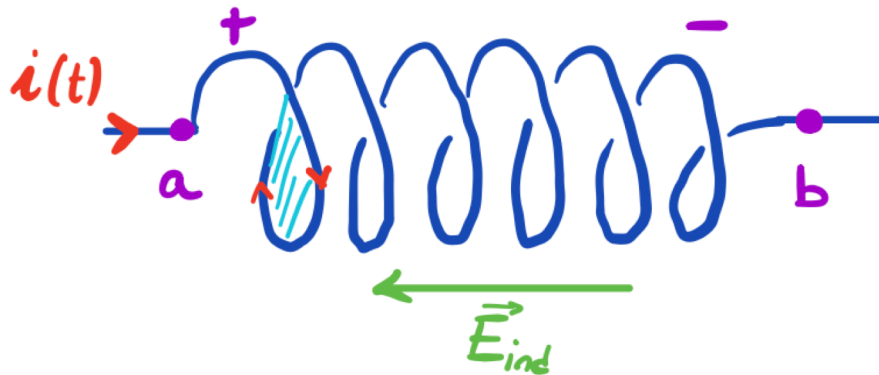
$$L \equiv \frac{\Phi_B}{i}$$

exemple solénoïde: $L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S$

Force électromotrice induite par une L

par Faraday: $\mathcal{E}_{\text{ind}} = - \frac{d\phi_B}{dt} = - L \frac{di}{dt}$

"back enf"



Ici,

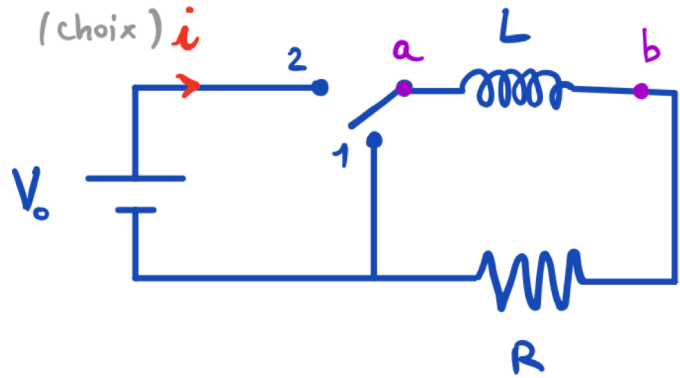
$$\frac{di}{dt} > 0$$

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} < 0$$

$$V_a - V_b = - \mathcal{E}_{\text{ind}} = L \frac{di}{dt}$$

définis par rapport
au sens choisi pour i

Circuits RL (exemple de 'charge')



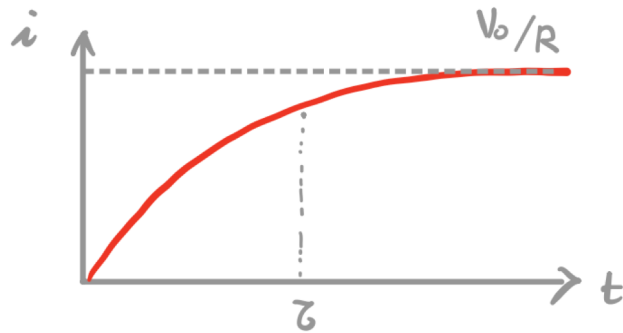
switch 1 → 2

$$i(t) = ?$$

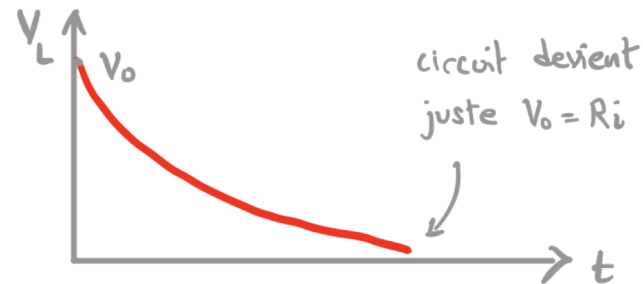
$$V_L(t) = ?$$

loi des mailles:

$$V_0 - L \frac{di}{dt} - Ri = 0$$



$$i(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$



$$V_L = V_0 e^{-t/\tau}$$

$$\tau = L/R$$

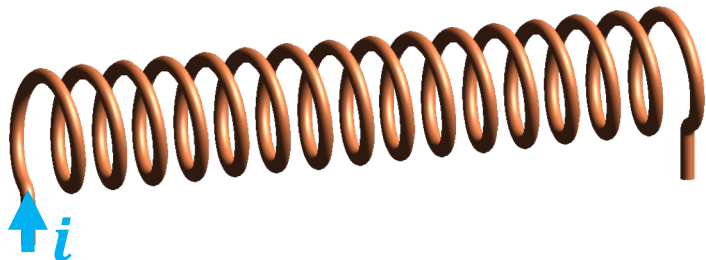
(temps caractéristique)

Important: ne pas prendre ces formules comme générales, elles dépendent des conditions initiales et de la configuration du circuit!

Energie stockée dans une bobine

**énergie (magnétique)
stockée dans une bobine:**

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2 \quad [\text{Joules}]$$

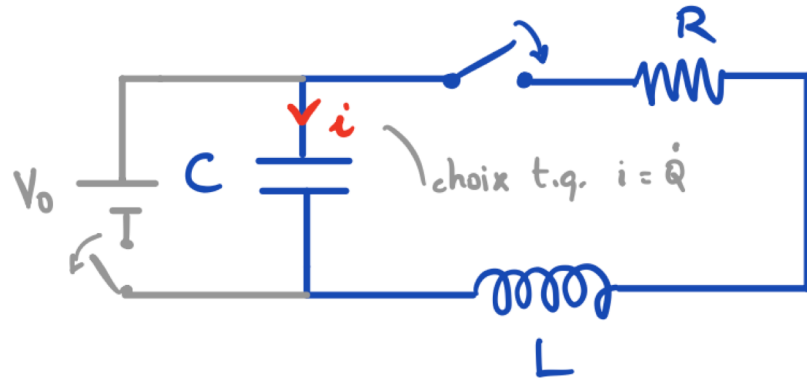


densité d'énergie (magnétique):

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad [\text{Joules/m}^3]$$

Formule plus générale, aussi valable pour l'énergie (magnétique) dans les ondes é.m.!

Circuits RLC (exemple avec condensateur initialement chargé)



On charge C.

À $t=0$, $Q(0) = Q_0$

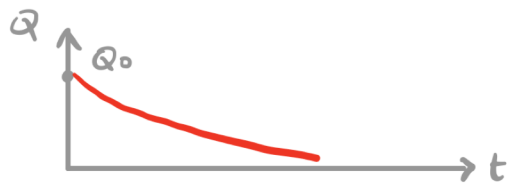
et on ferme le circuit.

loi des mailles:

$$-\frac{Q}{C} - Ri - L\frac{di}{dt} = 0$$

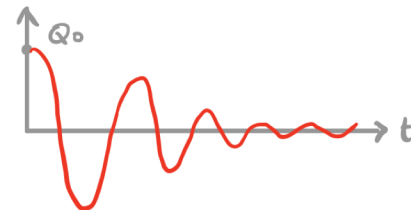
Cas "sur-amorti": $R^2/L^2 - \frac{4}{LC} > 0$

$Q(t)$ décroît exponentiellement



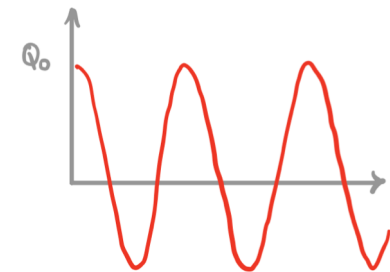
Cas "sous-amorti": $R^2/L^2 - \frac{4}{LC} < 0$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} e^{\pm i\omega t}$$



$R = 0$?

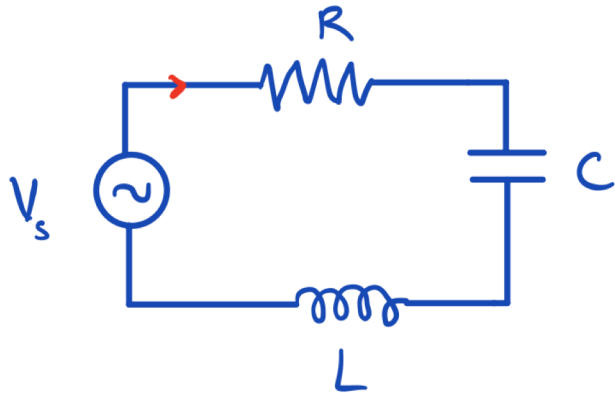
"oscillations électromagnétiques"



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Important: ne pas prendre ces formules comme générales, elles dépendent des conditions initiales et de la configuration du circuit!

Circuits AC et impédance complexe (*exemple circuit RLC série*)



$$V_s = V_0 \sin(\omega t) = \text{Im}(V_0 e^{j\omega t})$$

imposée extérieurement.

Impédances se combinent comme des résistances:

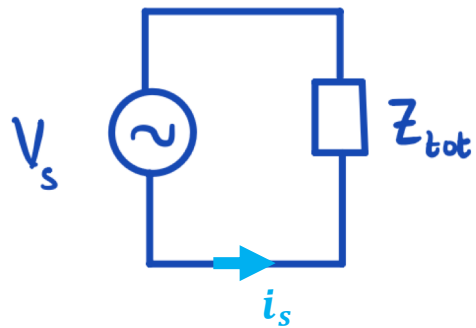
Ici: en série $\Rightarrow Z_{tot} = Z_R + Z_C + Z_L$

**Formules générales
impédances:**

$$Z_R = R$$

$$Z_L = j\omega L$$

$$Z_C = 1/j\omega C$$



Formules générales:

$$i_s(t) = \frac{V_s(t)}{Z_{tot}} \quad \text{avec} \quad Z_{tot} = |Z_{tot}| e^{j\varphi}$$

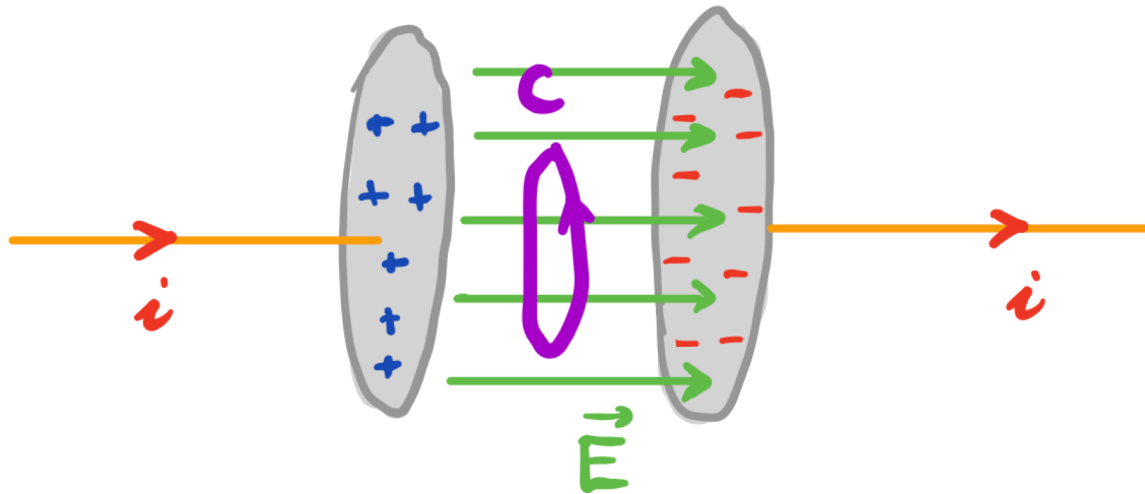
$$\text{et donc } i_s(t) = i_0 e^{j(\omega t - \varphi)} \quad \text{avec} \quad i_0(\omega) = \frac{V_0}{|Z_{tot}|}$$

ici, condition de résonance: $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ tel que $Z_{tot} \rightarrow 0$ (pour $R = 0$)

Loi d'Ampère généralisée avec un "courant de déplacement"

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_{\text{ent.}}^c + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{S(c)} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mu_0 i_D}$$



Implique que dans un condensateur avec $E(t)$, il y a aussi un champ magnétique à l'intérieur!

Plus généralement: une variation de $E(t)$ produit un champ magnétique!

Equations de Maxwell

$$\int_{S_{\text{ferm\u00e9e}}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enf}}^s}{\epsilon_0} \quad ; \quad \int_{S_{\text{ferm\u00e9e}}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$
$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_{S(c)} \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad ; \quad \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_{\text{ent}}^c + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{S(c)} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

forme int\u00e9grale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

forme diff\u00e9rentielle

Equations de Maxwell dans le vide prédisent des ondes é.m. avec $u = c$!

dans le vide:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

exemple d'équation d'onde (plane):

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}(z, t) & \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \vec{B} &= \vec{B}(z, t) \end{aligned}$$

solution générale (onde plane):

$$E_x = g(z-ct) + h(z+ct)$$

propagation
selon +z

propagation
selon -z

exemple de solution (onde plane monochromatique):

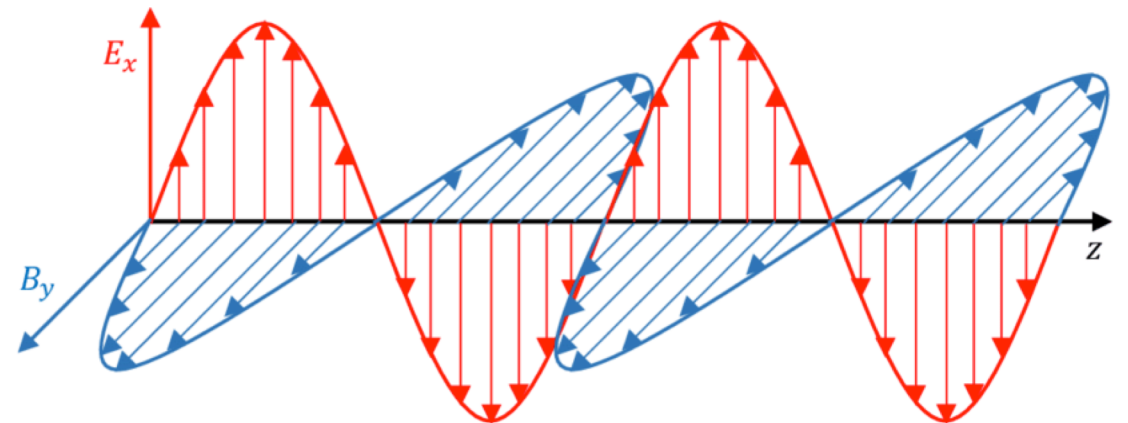
$$E_x(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t)$$

$$\lambda = 2\pi/k \quad : \quad \text{"longueur d'onde"}$$

$$T = 2\pi/\omega = \frac{1}{f} \quad : \quad \text{"période"} = 1/\text{"fréquence"}$$

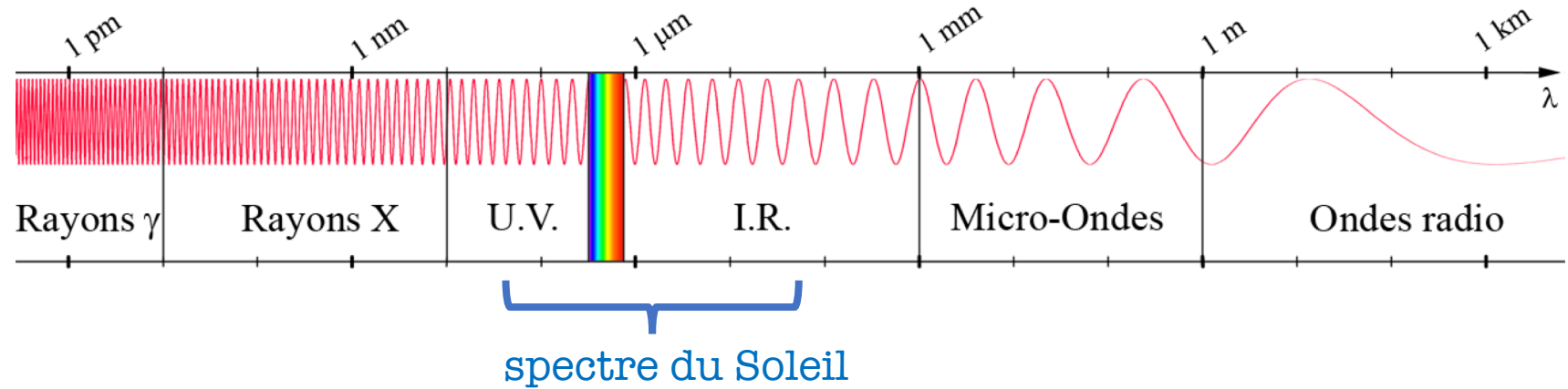
$$\boxed{\frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = c}$$

C'est la lumière!



$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{E} \times \vec{B} \propto \hat{z} \quad \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = c$$

Très souvent, les ondes é.m. ont un spectre de fréquences/longueurs d'onde:



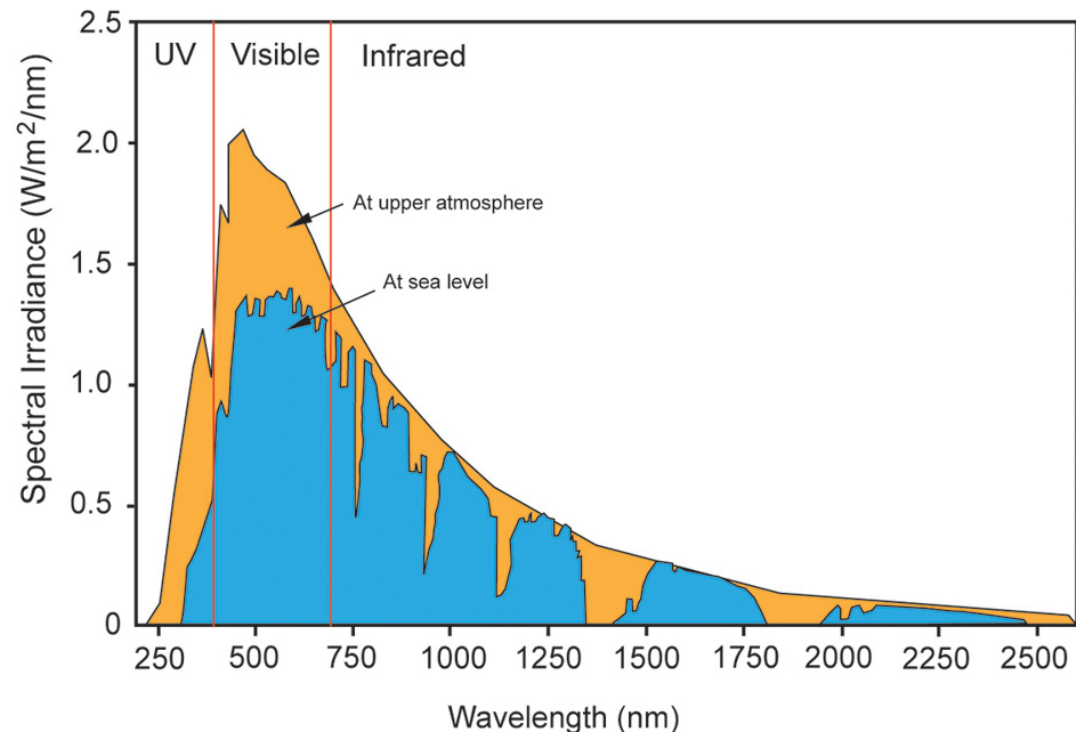
spectre Fourier 2D

$$\tilde{E}(\omega, k) = \frac{1}{2\pi} \iint E(z, t) e^{i(kz - \omega t)} dz dt$$

spectre Fourier 1D (fréquence)

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int E(t) e^{i\omega t} dt$$

avec dans le vide $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda}$



Energie dans les ondes é.m.

Densité d'énergie :

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

"vecteur de Poynting" (mesure le flux d'énergie [W/m²] et sa direction de propagation)

Intensité = moyenne temporelle de S(x,t):

$$\overline{S} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

$$\overline{S} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{\mu_0} E B dt = \epsilon_0 c E_0^2 \overbrace{\cos^2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}_{= 1/2}$$

pour une onde plane
monochromatique
dans le vide

Permet en particulier de calculer E₀ et B₀ à partir de l'intensité de la lumière.

Pression de radiation

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{S}$$

← densité de qté mvt
des champs é.m.

- cas "absorbteur parfait" :

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{g} c A$$

$$\Rightarrow \text{pression} = \frac{F}{A} = c g = \frac{S}{c} \quad \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

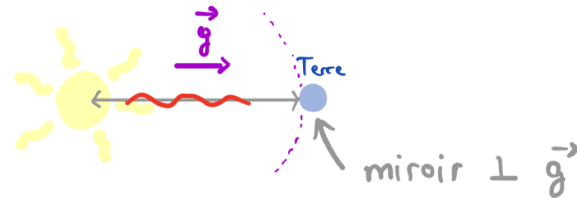
= Pa

- cas "miroir parfait" :

$$\vec{F} = 2 \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \text{pression} = \frac{2S}{c}$$

exemple: rayonnement solaire sur miroir



$$p_{\text{miroir}} = \frac{2S}{c}$$
$$\approx \frac{1.4 \times 10^3}{3 \times 10^8}$$
$$\approx 4 \times 10^{-6} \text{ Pa}$$

Ondes dans diélectriques (constante diélectrique K)

vitesse de propagation $v = \frac{1}{\sqrt{K K_m \epsilon_0 \mu_0}} := \frac{c}{n}$

$$n \approx \sqrt{K}$$

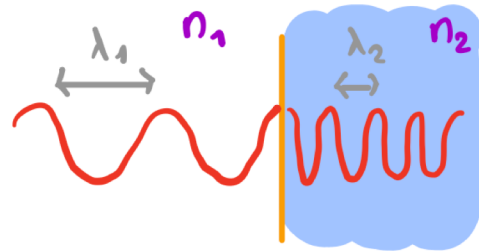
"indice de réfraction"

peut dépendre de la fréquence (couleur)!

Implication pour un rayon passant d'un milieu à un autre:

$$f \lambda = c \quad (\text{vide})$$

$$f \lambda = \frac{c}{n_2} \quad (\text{eau})$$



$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

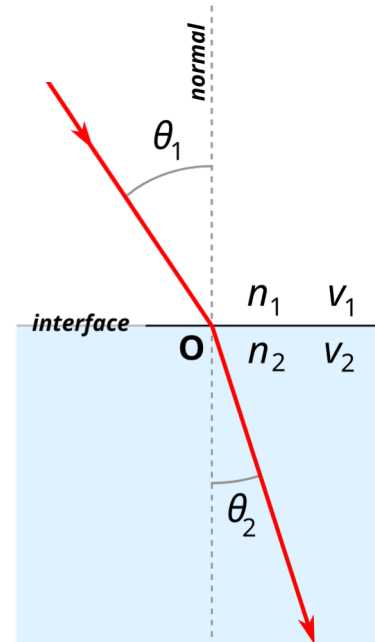
Loi de la refraction et de la réflexion:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

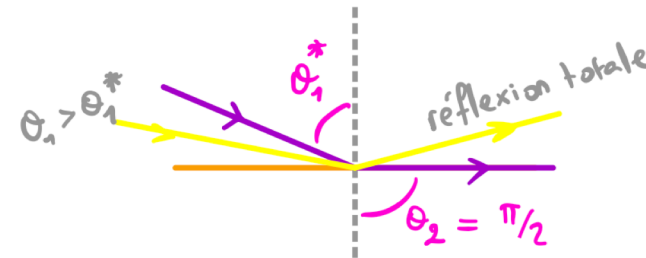
Mais $\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1$ ne peut pas être > 1 !
supposons > 1

Pour $n_1 > n_2$, il y a donc un θ_1 maximal.

Pour $\theta_1 > \theta^*$, réflexion totale ($\theta_r = \theta_i$).



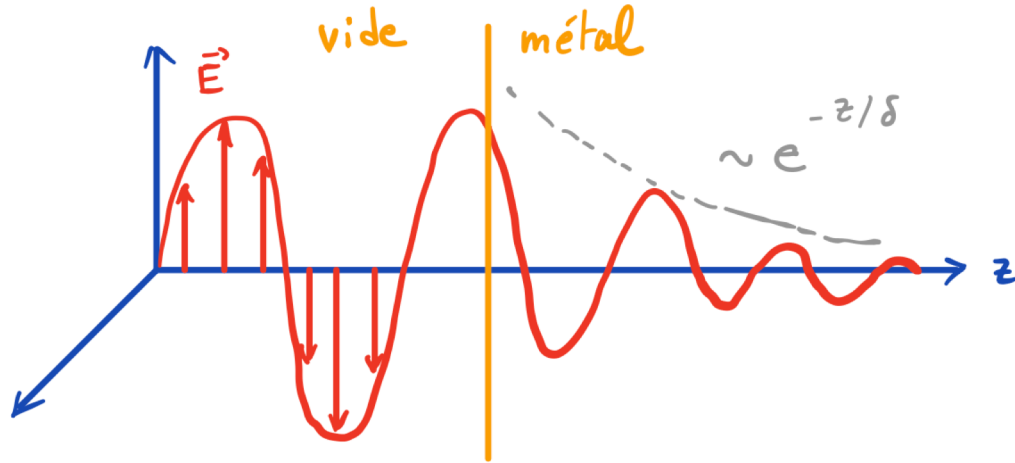
ici $n_1 < n_2$



$$\theta_1^* = \text{asin} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

«angle critique»

Ondes dans conducteurs (conductivité σ)



$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \propto e^{-z/\delta}$$

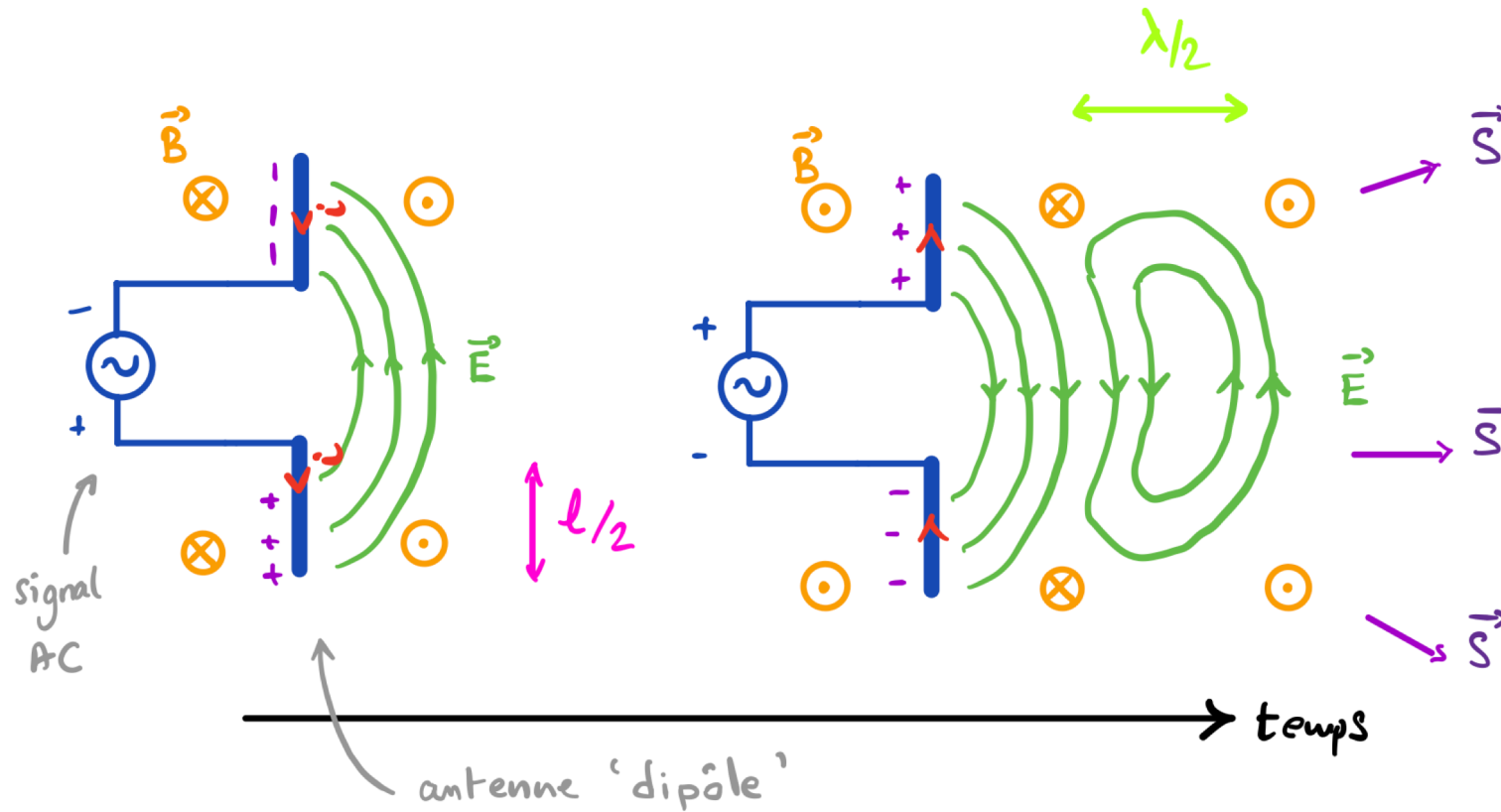
$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

Cas limite : $\sigma \rightarrow \infty$ (conducteur parfait)

$$\Rightarrow \delta = 0$$

\Rightarrow pas de propagation !

Génération d'ondes par une antenne



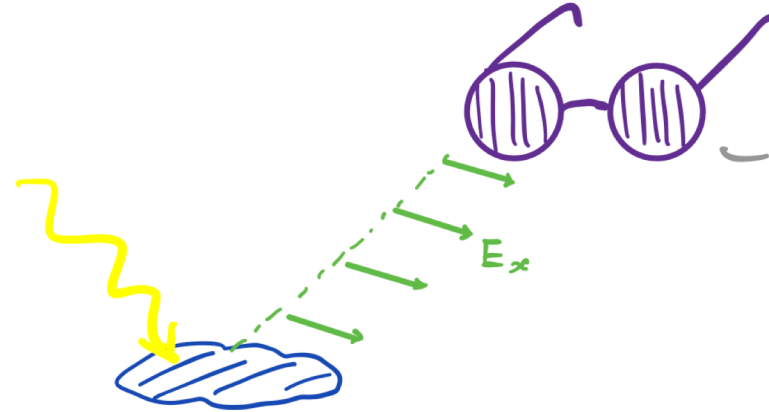
Taille optimale l d'une antenne est comparable à la longueur d'onde λ de l'onde émise (ou reçue)

Polarisation des ondes

Polarisation \equiv direction du champ électrique de l'onde

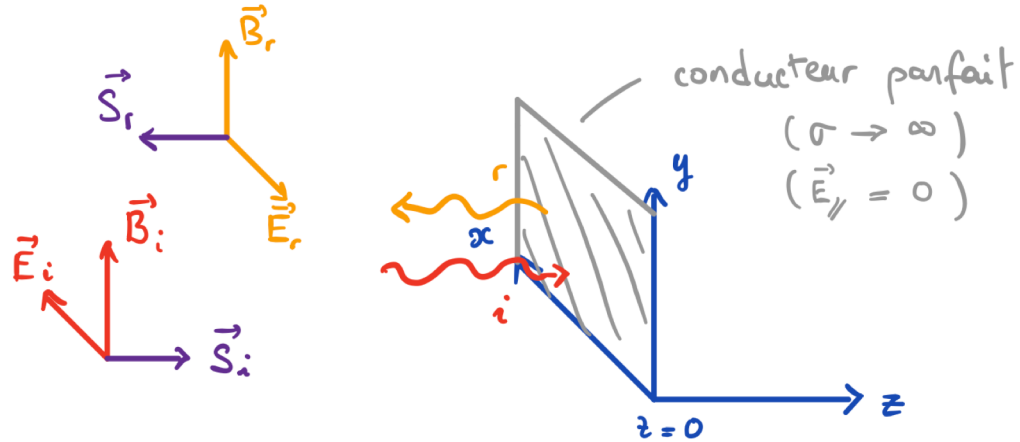


onde émise par une antenne est polarisée



onde devient polarisée après réflexion par une surface, avec \mathbf{E} parallèle au plan de réflexion

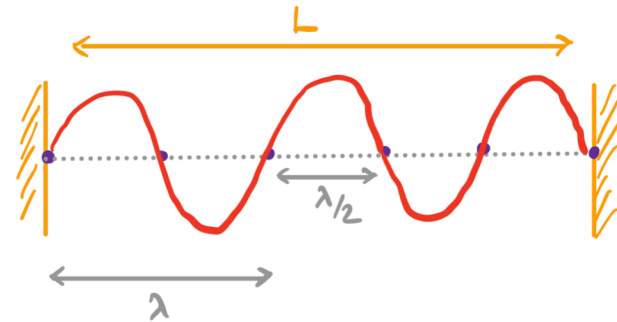
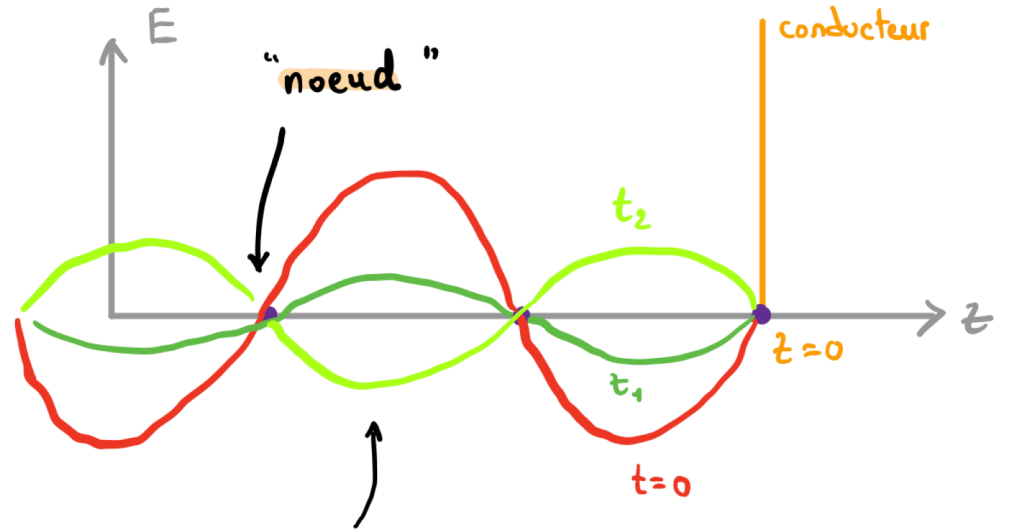
Ondes stationnaires



$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \frac{E_0}{2} [\cos(kz - \omega t) - \cos(kz + \omega t)] \hat{x}$$

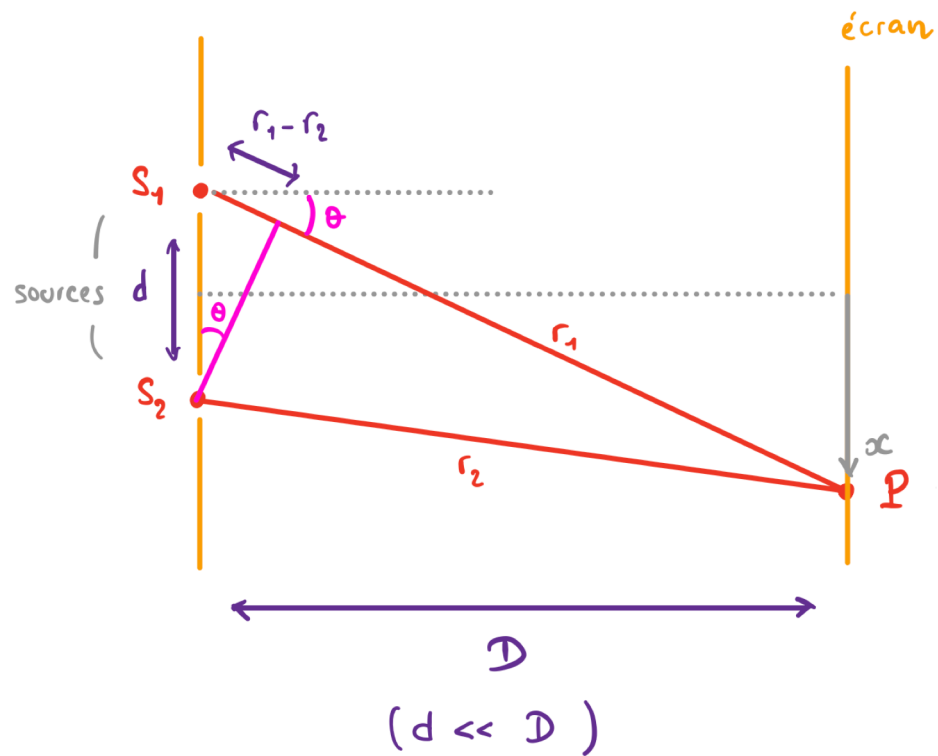
$$= E_0 \cdot \underbrace{\sin(kz)}_{\text{espace}} \underbrace{\sin(\omega t)}_{\text{temps}} \hat{x}$$

$$\vec{B} = \dots = \frac{E_0}{c} \cos(kz) \cos(\omega t) \hat{y}$$

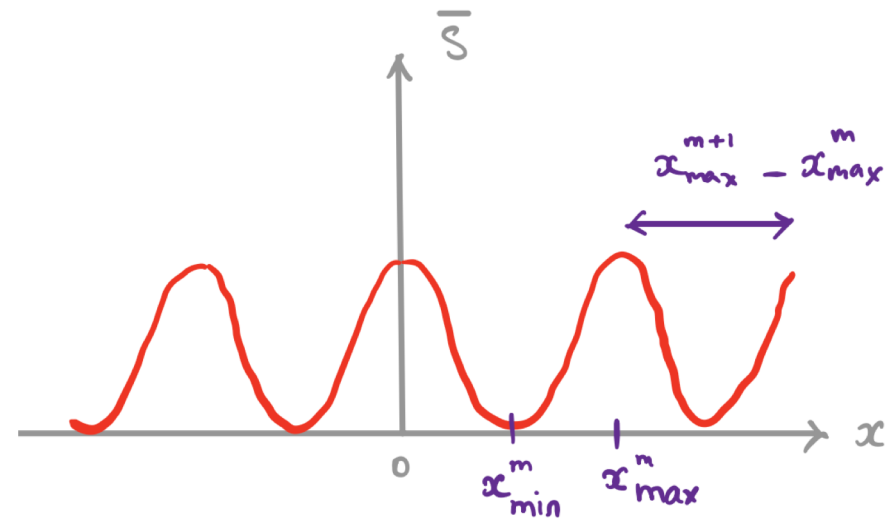


Il faut que $L = m \frac{\lambda}{2}$, $m = 1, 2, 3, \dots$

Interférences: 2 sources ponctuelles



$$\bar{S} \propto \cos^2 \left(\frac{k d}{2D} x \right) = \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda D} x \right)$$



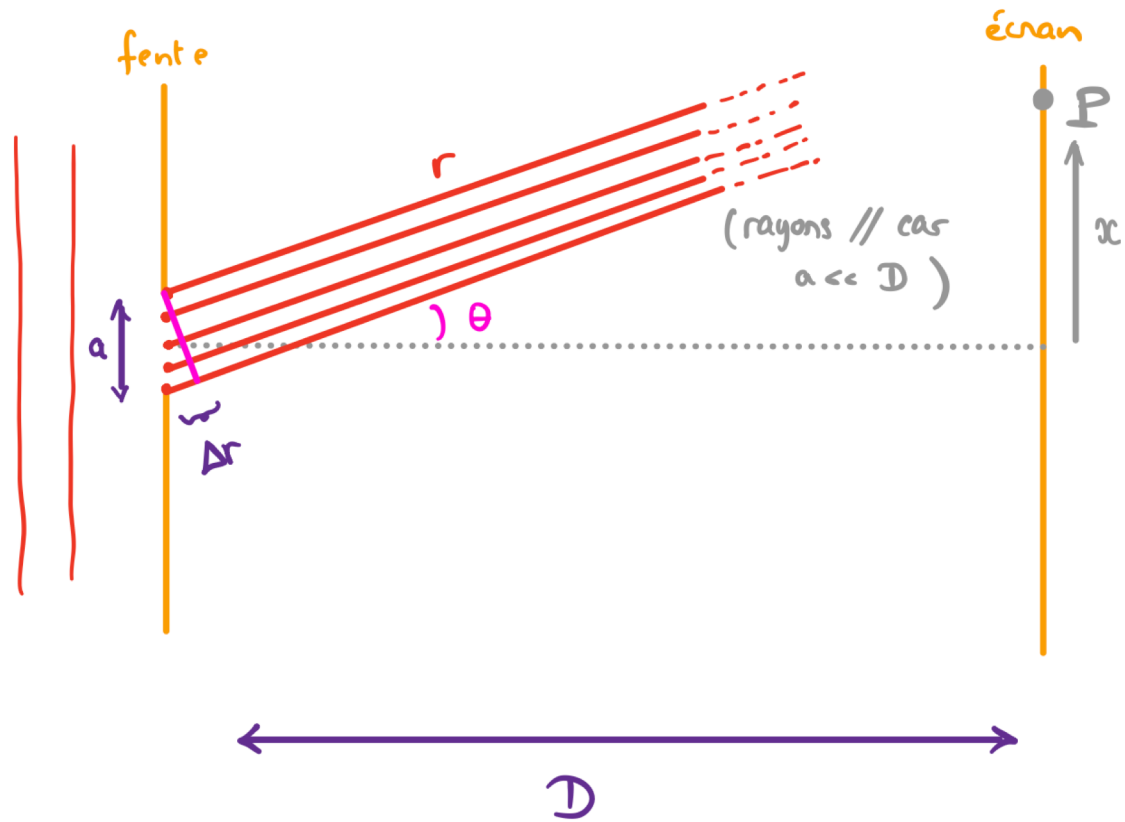
$$x_{\max}^m = m \frac{\lambda D}{d}$$

"interférences constructives"

$$x_{\min}^m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda D}{d}$$

"interférences destructives"

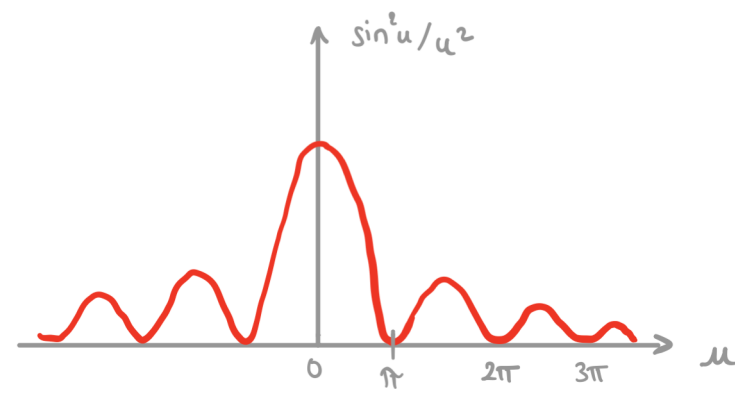
Interférences: diffraction par une fente



$$\overline{S} \propto \langle E^2 \rangle$$

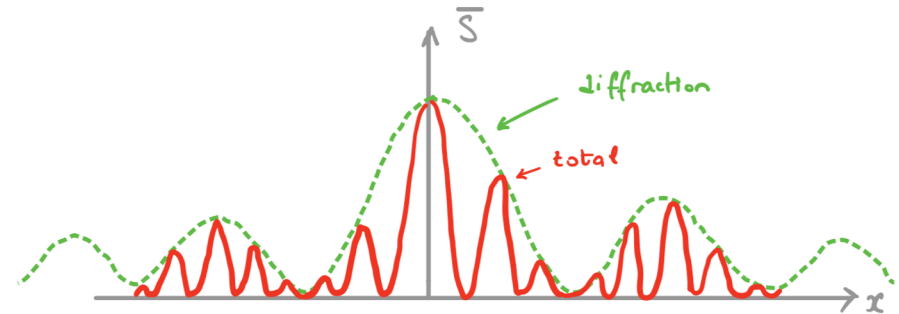
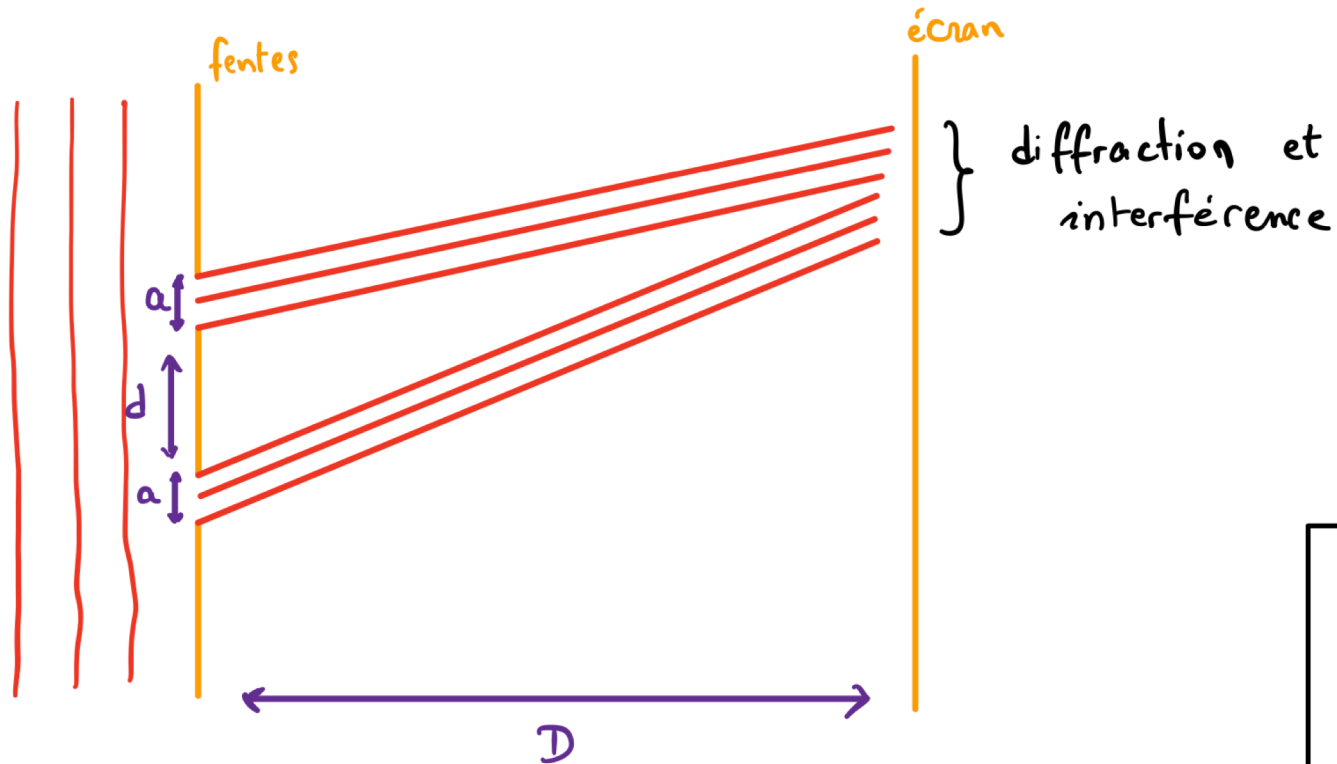
$$\propto E_0^2 \frac{a^2}{2} \frac{\sin^2(k a/2 \sin\theta)}{(k a/2 \sin\theta)^2}$$

$$\propto \frac{\sin^2(u)}{u^2} \quad u = k \frac{a}{2} \sin\theta$$



$$x_{min}^m = m D \frac{\lambda}{a}$$

Interférences: diffraction et interference par deux fentes



$$\bar{S} \propto \frac{\sin^2\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)}{\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)^2} \times \cos^2\left(\frac{kd}{2}\sin\theta\right)$$

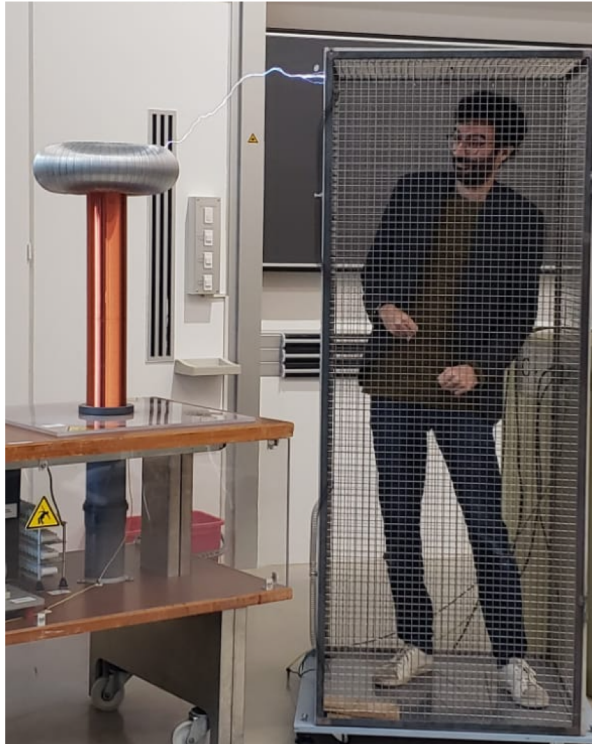
diffraction
d'une fente

interférence
entre 2 fentes

Merci et belle fin d'année 2025!



Ce fut un plaisir de vous enseigner!



Comète Halley
(dernier passage 1986, prochain passage 2061)