

Rappel

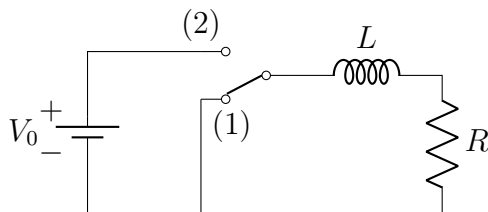
$$V_L :$$

$$V_L \equiv -\mathcal{E}_{ind} = V_a - V_b = +L \frac{di}{dt} > 0 \tag{9.8}$$

L ‘essaye’ de réduire i quand i augmente. C’est pour ça qu’on appelle \mathcal{E}_{ind} ‘back emf’. Si i diminue, $L \frac{di}{dt} < 0$, et $V_L < 0$.

Note 9.9. Dans la pratique, une résistance R est toujours associée à L (il est difficile d’avoir un fil en forme solénoïdale sans aucune résistance).

9.2 Circuits RL



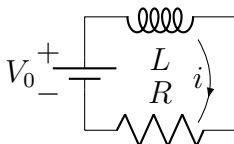
on cherche

$$i(t) = ?$$

$$V_L(t) = ?$$

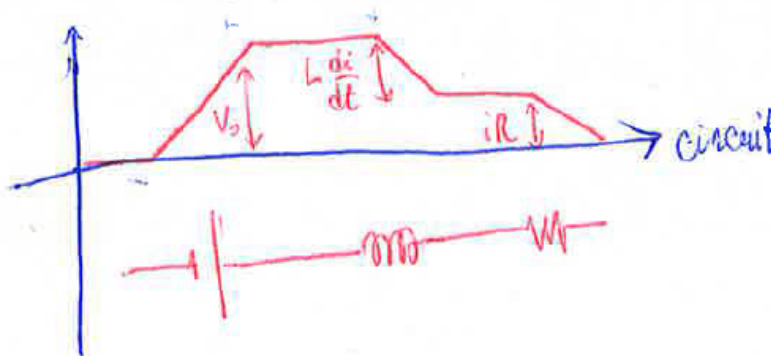
A $t = 0$, $i(t = 0) = 0$

(a) On passe l’interrupteur de la position (1) à la position (2) : on connecte la batterie.



Kirchhoff :

$$V_0 + \mathcal{E}_{ind} = iR \quad ; \quad \mathcal{E}_{ind} = -L \frac{di}{dt} \tag{9.9}$$



$$V_0 = L \frac{di}{dt} + iR \tag{9.10}$$

ou

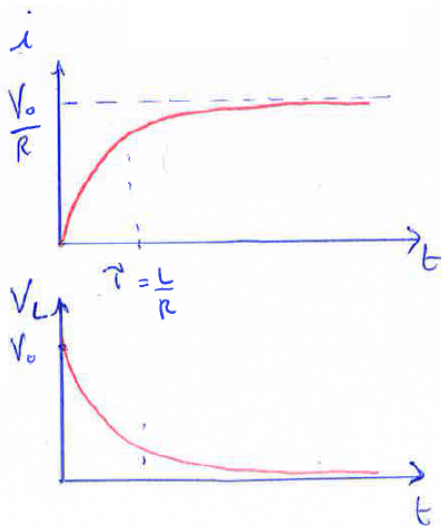
$$\frac{di}{dt} = \frac{V_0 - iR}{L} = -\frac{i - V_0/R}{L/R} \quad ; \quad \text{séparation des variables}$$

$$\frac{di}{i - V_0/R} = -\frac{dt}{L/R} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \ln\left[i(t) - \frac{V_0}{R}\right] \right\}_0^t = -\frac{t}{L/R}$$

$$\frac{i(t) - V_0/R}{i(0) - V_0/R} = e^{-\frac{t}{L/R}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i(t) = \frac{V_0}{R} \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{L/R}} \right\}} \quad (9.11)$$

Le temps caractéristique du problème est donc le paramètre dans l'exponentielle : $\tau = \frac{L}{R}$.
Tension à travers L :

$$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d}{dt} \left[\frac{V_0}{R} \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{L/R}} \right\} \right] = -L \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{L/R}} \left(-\frac{R}{L} \right) = V_0 e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (9.12)$$



V est grande au début, lorsque la variation de i est grande, et tend à 0 quand le courant ne varie plus.

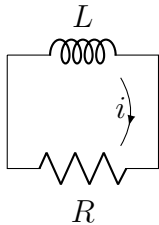
Le courant a 'besoin de temps' pour monter lorsqu'on applique soudainement la tension, et le fait sur l'échelle de temps : $\tau = \frac{L}{R}$.

Note 9.10. R , par contre, donne lieu à dissipation, mais pas à un délai.

On peut imaginer ce qu'il se passe quand on coupe un courant : le circuit essaye de contrer la réduction de courant en générant la 'back emf', donc une grande (si on coupe très rapidement) tension à travers L .

Note 9.11. C'est la 'back emf' qui cause des étincelles [et, par conséquent, même des feux parfois !] quand on retire une prise électrique très rapidement lorsque l'appareil connecté est en fonction. C'est un défi technologique significatif de construire des interrupteurs qui résistent à des variations très rapides sur des gros courants, donc des grandes emf.

Revenons à notre circuit LR , et considérons l'étape (b) : on met l'interrupteur en position (1) : on déconnecte la batterie



$$i(t=0) = \frac{V_0}{R} \quad ; \quad V_L(t=0) = 0 \text{ (juste avant de fermer l'interrupteur)}$$

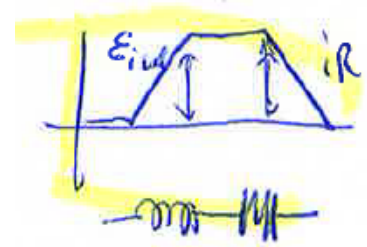
Kirchhoff :

$$\mathcal{E}_{ind} = iR$$

$$-L \frac{di}{dt} = iR$$

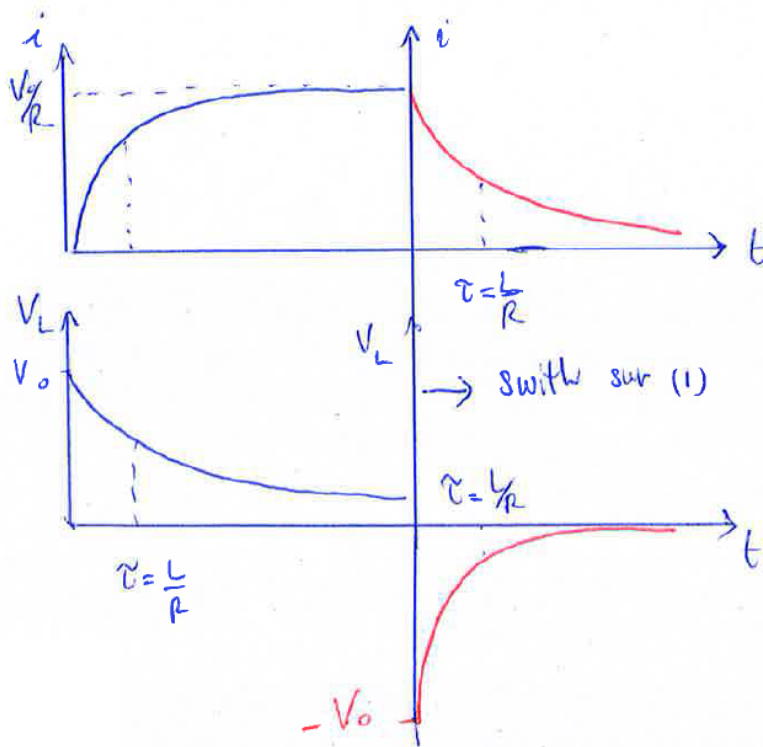
$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i \quad \Rightarrow \quad \text{séparation des variables} \quad \frac{di}{i} = -\frac{dt}{L/R}$$

$$\Rightarrow \quad i(t) = i(0)e^{-\frac{t}{L/R}} = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (9.13)$$



Tension à travers L :

$$V_L(t)L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{L/R}} \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) = -V_0 e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (9.14)$$



A la place de 'switcher' à la main entre (1) et (2), on peut donner une tension carrée (ON/OFF), avec une certaine fréquence.

Naturellement, on peut varier la constante de temps $\tau = L/R$ en variant R et/ou L .

Question : qu'est-ce qu'il se passe si la constante de temps τ devient comparable avec la période de la fonction carrée de la tension ?

→ le courant devient plus 'lisse', et de même pour V_L . Si on augmente la fréquence de la forme d'onde d'entrée (V_0), le circuit n'arrive plus à 'répondre' : les variations rapides de V_0 seront coupées : filtrage passe-bas.

9.3 Énergie magnétique

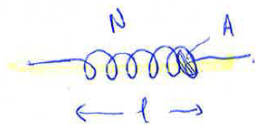
Note 9.12. Cet effet de filtrage est similaire à celui qu'on a déjà vu pour un circuit RC. Dans le cas de C, on a vu qu'il s'agit d'un 'stockage' de charge, et surtout d'énergie dans la forme d'énergie du champ électrique.

C'est justement ce 'stockage' d'énergie qui produit un effet de filtrage (passe-bas).

Est-ce que quelque chose de similaire se passe pour L ?

	\boxed{C}		\boxed{L}	
stocke		q/champ \vec{E}		courant/champ \vec{B}
énergie		$\frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$?
densité d'énergie		$\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$?

← essayons de trouver ces éléments, en partant du cas paradigme : solénoïde



$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} A$$

Puissance dans L :

$$P_L = \frac{dU_L}{dt} = |\mathcal{E}i| = L \frac{di}{dt} i = \frac{1}{2} L \frac{d}{dt} (i^2) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) \tag{9.15}$$

$$\Rightarrow \boxed{U_L = \frac{1}{2} Li^2} \tag{9.16}$$

Dans notre solénoïde :

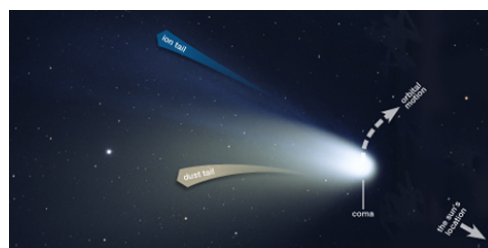
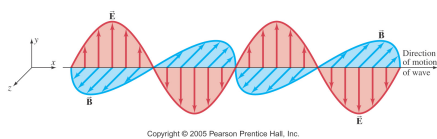
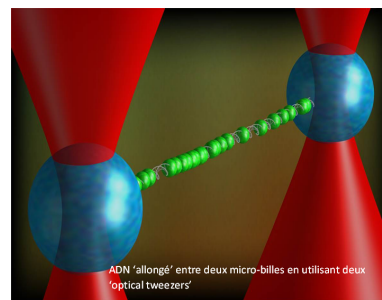
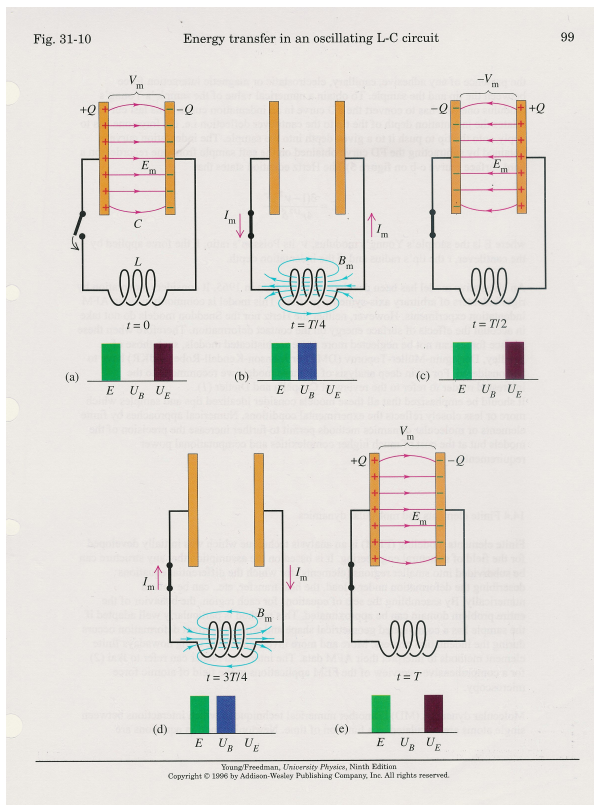
$$U_L = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \overbrace{\left(\mu_0 \frac{N^2}{l} A \right)}^L i^2 \tag{9.17}$$

mais $B = \mu_0 \frac{N}{l} i$, donc $i = \frac{Bl}{\mu_0 N}$

$$\Rightarrow U_L = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{l} A \underbrace{\left(\frac{B^2 l^2}{\mu_0^2 N^2} \right)}_{i^2} = \frac{1}{2} Al \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} (\text{volume}) B^2$$

Chapitre 10

Equations de Maxwell et ondes électromagnétiques



10.1 Oscillations électromagnétiques

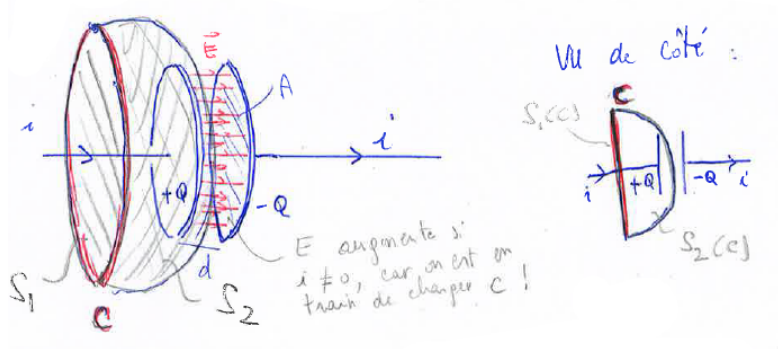
Nous sommes prêts pour mettre ensemble ce que nous avons appris sur l'électromagnétisme et voir comment un modèle complet peut nous amener à la découverte des ondes... donc à la lumière.

Rappel sur ce que nous savons de \vec{E}, \vec{B} :

\vec{E}	\vec{B}
$\vec{F} = q\vec{E}$	$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ ← effet produit par le champ
$\oint_{S \text{ fermé}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{en S}}{\epsilon_0}$	$\oint_{S \text{ fermé}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$ ← pas des charges magnétique libres
Relation $\vec{E} \Leftrightarrow \vec{B}$	
$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = ?$ <i>C : chemin fermé</i>	$-\frac{d}{dt} \oint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{A}$ ← 'manque' le 'courant' de charges magnétiques [car il n'y a pas de charges magnétiques libres]
$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré en } C}$	$+ ?$ ← manque le flux de \vec{E} pour avoir une symétrie
\updownarrow i qui perce la surface $S(C)$	

Cette idée de chercher une symétrie entre \vec{E} et \vec{B} est venue du génie de Maxwell (~ 1860– 70). En plus de remarquer un manque de symétrie pour les flux de \vec{E} et \vec{B} , Maxwell remarque un paradoxe avec la charge d'un condensateur, apparemment incohérent avec la loi d'Ampère.

Problème de la charge d'un condensateur ($i = const.$; mais la charge, donc E , augmente)



les surfaces (ouvertes) S_1 et S_2 'reposent' sur la même boucle fermée C .

$$\begin{aligned} \text{Ampère :} \quad & \text{avec } S_1 : \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré en } S_1} = \mu_0 i \Rightarrow B \neq 0 \text{ sur } C \\ & \text{avec } S_2 : \oint_C \underbrace{\vec{B} \cdot d\vec{l}}_{=B2\pi r} = \mu_0 i_{\text{entouré en } S_2} = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ sur } C \end{aligned}$$

Les deux donnent deux résultats différents ! Comment est-ce possible ? Qu'est-ce qu'il y a de spécial entre les plaques de C ?? \Rightarrow un champ électrique qui change (même si $i = \text{const.}$).

10.2 Courant de déplacement

Idée de Maxwell : il doit y avoir un autre type de courant, et pour respecter les symétries $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$, ça devrait être lié au flux de \vec{E} (en particulier, à sa variation - dans ce cas, son augmentation). Il ne s'agit pas d'un courant dans le sens qu'il y a un mouvement 'physique' de charges qui se déplacent sur un conducteur, mais c'est un courant dans le sens qu'il y a une variation de q dans le temps, $i_D = \frac{dq}{dt}$. Calculons i_D

$$i_D = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) = C \frac{dV}{dt} \quad (i_D : \text{"courant de déplacement"}) \quad (10.1)$$

mais $\frac{V}{d} = E$, et, pour un condensateur à deux faces parallèles, comme dans le dessin, $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$

$$\Rightarrow i_D = C \frac{dV}{dt} = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \frac{d}{dt}(E d) = \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}(EA) = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (10.2)$$

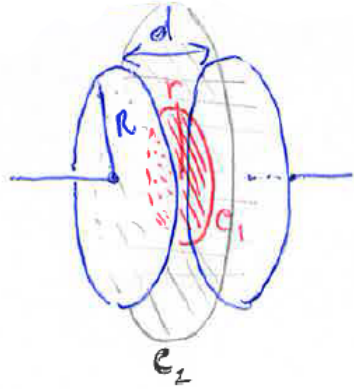
Voilà ce qui manquait ! Donc

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré}} + \mu_0 i_D = \mu_0 i_{\text{entouré}} + \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{\text{const.} = \frac{1}{c^2}} \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (10.3)$$

Cette construction a l'air purement mathématique. Comment peut-on se convaincre de l'existence de i_D ?

\rightarrow en mesurant les conséquences de i_D , notamment le champ magnétique créée par i_D , et le comparant avec la valeur calculée.

Calcul de B produit par le courant de déplacement i_D



$B = ?$

Ampère (avec i_D)

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \underbrace{i_{\text{entouré}}}_{=0} + \mu_0 i_D = \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_E}{dt}$$

(a) $r < R$

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= B 2\pi r = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (E \pi r^2) = \frac{\pi r^2}{c^2} \frac{dE}{dt} \\ &= \frac{\pi r^2}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{V}{d} \right) = \frac{\pi r^2}{c^2 d} \frac{dV}{dt} \end{aligned} \tag{10.4}$$

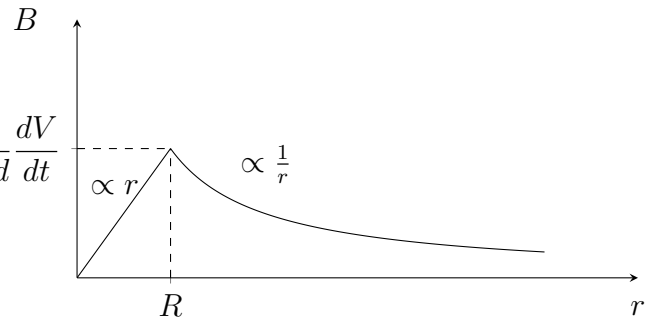
\Rightarrow on trouve $B = \frac{\pi r^2}{c^2 d} \frac{dV}{dt} \frac{1}{2\pi r} = \frac{r}{2c^2 d} \frac{dV}{dt}$ (10.5)

(b) $r \geq R$

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= B 2\pi r = \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (E \pi R^2) = \\ &= \frac{\pi R^2}{c^2 d} \frac{dV}{dt} \end{aligned} \tag{10.6}$$

\uparrow
 car en dehors des plaques du condensateur le champ $E = 0$

$\Rightarrow B = \frac{\pi R^2}{c^2 d} \frac{dV}{dt} \frac{1}{2\pi r} = \frac{R^2}{2rc^2 d} \frac{dV}{dt} = \frac{R}{2c^2 d} \frac{dV}{dt}$ (10.7)



Ce champ est réel et peut être mesuré!

Note 10.1. Le concept de courant de déplacement permet en effet d'appliquer les règles de Kirchhoff (en particulier, celle des noeuds) en présence de condensateurs C . Si non, comment pourrait-on avoir un courant "à travers" un condensateur ?

En effet, un "vrai" courant rentre d'un côté (un courant "de conduction" qui amène des charges), et un courant de déplacement sort de l'autre.

10.3 Équations de Maxwell en forme intégrale et différentielle

Voici la vision complète des champs électriques et magnétiques $\vec{E}(\vec{x}, t)$, $\vec{B}(\vec{x}, t)$, décrit par les équations de Maxwell en forme intégrale :

$$\oint_{S_{\text{fermé}}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{en } S}}{\varepsilon_0}; \quad \oint_{S_{\text{fermé}}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0; \quad (10.8)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S_C} \vec{B} \cdot d\vec{A}; \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{entouré}} + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{S_C} \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (10.9)$$

Note 10.2. La loi d'Ampère généralisée est valable aussi dans un milieu (matériau) magnétique : μ_0 doit juste être remplacé par μ (perméabilité relative du matériau).

Note 10.3. La loi d'Ampère généralisée est valable aussi dans l'espace vide, où il ne peut y avoir aucun courant de conduction. Ceci a des implications très profondes : \vec{E} et \vec{B} sont liés partout, y compris dans le vide, pour autant qu'ils varient dans le temps !

L'échange d'énergie entre \vec{E} et \vec{B} peut se faire sans un circuit matériel (ex. LC), et peut donner lieu à la propagation d'ondes, c'est à dire des perturbations qui se propagent à vitesse constante, en général sans changer de forme. Ces perturbations transportent de l'énergie, de la quantité de mouvement, de l'information, mais en général pas de masse. Essayons de trouver la forme différentielle des équations de Maxwell, et à partir de ça les équations des ondes électromagnétiques.

Pour ça, nous avons besoin de deux théorèmes mathématiques :

1. Théorème de Gauss ou de la divergence

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{V(S)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \quad (10.10)$$

↑
volume correspondant à la surface fermée S

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \text{ ou } \text{div}(\vec{E}) \quad \text{“divergence de } \vec{E}\text{”} \quad (10.11)$$

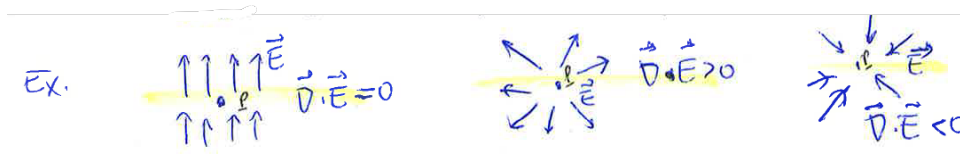
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}; \quad \text{c'est un “flux par unité de volume”} \quad (10.12)$$

Note 10.4. $\vec{\nabla}$ est un opérateur, mais dans la pratique peut être traité comme un vecteur : $\vec{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} \cdot \{E_x, E_y, E_z\} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (10.13)$$

$\vec{\nabla}$ est ‘prêt’ à être appliqué à n'importe quel champ vectoriel.

Note 10.5. $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ mesure effectivement le degré de divergence du vecteur \vec{E} en un point donné (P).



2. Théorème de Stokes

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{S(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} \tag{10.14}$$

↑
surface correspondante au circuit fermé C

$\vec{\nabla} \times \vec{B}$ ou $\text{curl}(\vec{B})$ ‘curl of \vec{B} ’ en anglais, ou ‘rotationnel de \vec{B} ’ en français (10.15)

$\vec{\nabla} \times$ est une sorte d’intégrale de boucle par unité de surface. (10.16)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{x} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \tag{10.17}$$

- $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ mesure à quel point \vec{B} “s’enroule” au tour du point considéré. Ex.



Rappel $\vec{\nabla} \cdot$ et $\vec{\nabla} \times$ sont des opérateurs différentiels.

- Nous sommes prêts à manipuler les équations de Maxwell en forme intégrale.

1. Loi de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \stackrel{\text{théorème de la divergence}}{=} \int_{V(S)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \frac{Q_{\text{en S}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V(S)} \rho dV \quad (10.18)$$

avec $\rho = \frac{dq}{dV}$ densité de charge ; en général $\rho = \rho(\vec{x}, t)$

$$\Rightarrow \int_{V(S)} \left\{ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right\} dV = 0 \quad \text{pour tout volume } V(S) \quad (10.19)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (10.20)$$

Cette équation met en relation le champ électrique \vec{E} et sa source, la densité de charge ρ .

2. Lois du flux de \vec{B} (n'a pas de nom particulier...)

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{V(S)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV = 0 \quad \text{pour tout } V(S) \quad (10.21)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad (10.22)$$

Cette équation indique la propriété de \vec{B} de ne pas avoir de 'charges' libres

3. Loi de Faraday

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{théorème de Stokes}}{=} \int_{S(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = \quad (10.23)$$

$$= -\frac{d}{dt} \int_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = - \int_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \quad (10.24)$$

note : $\frac{d}{dt} \Phi_B$ devient $\frac{\partial}{\partial t}$ pour \vec{B} , car $\vec{B} = B(\vec{x}, t)$

$$\Rightarrow \int_{S(C)} \left\{ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{pour tout } S(C) \quad (10.25)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \text{cette équation lie } \vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ directement} \quad (10.26)$$

4. Loi d'Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{th. de Stokes}}{=} \oint_{S(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \mu_0 i + \overbrace{\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{S(C)} \vec{E} \cdot d\vec{A}}^{\mu_0 i_D} \quad (10.27)$$

$$\parallel \parallel$$

$$\mu_0 i = \mu_0 \int_{S(C)} \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad \frac{1}{c^2} \int_{S(C)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

$$\text{Donc } \int_{S(C)} \left\{ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \vec{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{pour tout } S(C) \quad (10.28)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad (10.29)$$

Cette équation relie \vec{B} à sa source, \vec{J} , et au champ \vec{E} (dont la variation dans le temps aussi produit un champ \vec{B}).

Résumé

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

- \vec{E} et \vec{B} sont couplés.
- Les sources des champs sont ρ et \vec{J} .

10.4 Ondes électromagnétiques à partir des équations de Maxwell

Considérons le système de Maxwell dans le vide : $\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{J} = 0 \end{cases}$ (pas de source \Leftrightarrow pas de charges)

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Combien d'équations ? 2 scalaires + 2 vectorielles $\Rightarrow 2 + 2 \times 3 = 8$