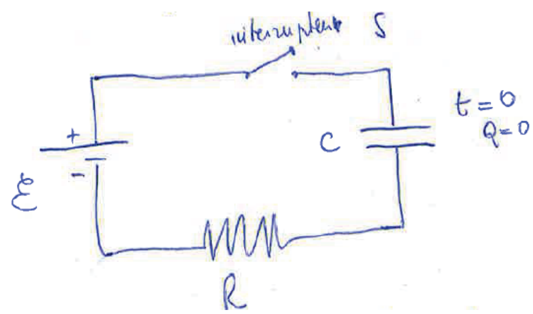
5.8 Circuits RC et applications

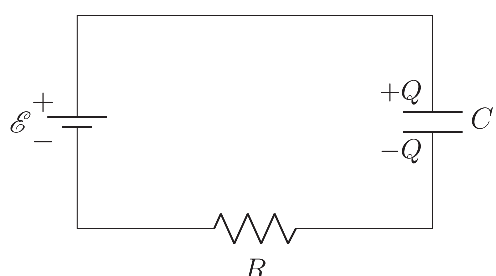
Pour l'instant, nous avons analysé les circuits DC, dans lesquels rien ne varie avec le temps. Les courants circulent (donc les charges à leur vitesse de dérivé terminale), mais toujours au même taux constant.
Mais nous avons aussi vu que les condensateurs sont des engins qui peuvent stocker de l'énergie. Le processus de charge/décharge est intrinsèquement dépendant du temps. Maintenant, sur la base des lois des circuits, on peut l'analyser quantitativement.

Circuits RC
(A) chargement d'un condensateur

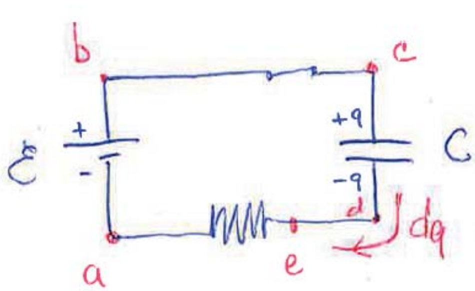


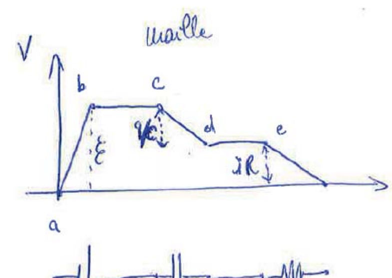
Pour charger la capacité C on a besoin de la force électromotrice $\mathscr{E}$.

A $t = 0$, on ferme l'interrupteur S et la charge est "poussée" d'un côté à l'autre de C par $\mathscr{E}$.
A $t \to \infty$, le condensateur aura reçu toute la charge qu'il peut recevoir étant donnée sa capacité C : $Q = CV = C\mathscr{E}$, et il n'y aura plus de courant.



Question : qu'est - ce qu'il se passe entre $t = 0$ et $t \to \infty$?
Dés qu'on ferme l'interrupteur S, la charge commence à s'écouler ($\to$ courant)





$$\mathscr{E} - \frac{q}{C} - iR = 0 \quad ; \quad \text{mais} \quad i = \frac{dq}{dt} \tag{5.29}$$

$$\mathscr{E} - \frac{q}{C} - \frac{dq}{dt}R = 0 \quad : \quad \text{éq. différentielle pour } q = q(t), \tag{5.30}$$

$$\text{avec } q(0) = 0, \text{ et } q(\infty) = Q$$

Note 5.14. *À $t = 0$, $q = 0$, mais $\mathscr{E} = i(0)R \quad \Rightarrow \quad i(0) = \mathscr{E}/R \neq 0$*

En réarrangeant :

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} + \frac{\mathscr{E}}{R} \quad ; \quad \text{on sépare les variables} \tag{5.31}$$

$$dq = \left(\frac{\mathscr{E}}{R} - \frac{q}{RC}\right) dt = -(q - \mathscr{E}C)\frac{dt}{RC} \tag{5.32}$$

$$\frac{dq}{q - \mathscr{E}C} = -\frac{dt}{RC} \quad \overset{\text{on intègre}}{\Rightarrow} \quad \int_0^q \frac{dq'}{q' - \mathscr{E}C} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC} \tag{5.33}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{q - \mathscr{E}C}{-\mathscr{E}C}\right) = -\frac{t}{RC} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathscr{E}C - q}{\mathscr{E}C} = \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} \tag{5.34}$$

$$\Rightarrow \quad q(t) = \mathscr{E}C\left[1 - \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\}\right] \tag{5.35}$$

$$\lim_{t\to 0} q(t) = \mathscr{E}C - \mathscr{E}C = 0 \tag{5.36}$$

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = \mathscr{E}C \tag{5.37}$$

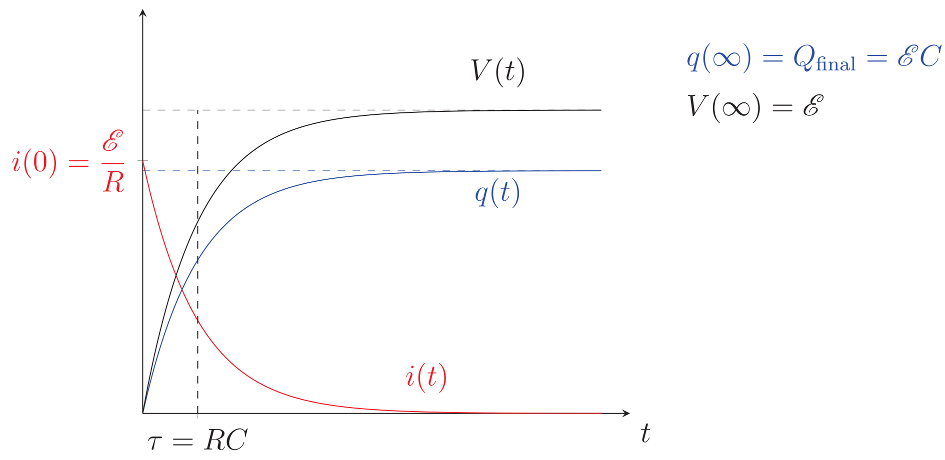
A partir de $q(t)$ on peut calculer $i(t)$ et $V(t)$:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\mathscr{E}C\exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\}\left(-\frac{1}{RC}\right) = \frac{\mathscr{E}}{R}\exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} \tag{5.38}$$

$$\rightarrow \quad i(0) = \frac{\mathscr{E}}{R} \quad ; \quad i(\infty) = 0$$

$$V(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathscr{E}\left[1 - \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\}\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V(0) = 0 \\ V(\infty) = \mathscr{E} \end{cases} \tag{5.39}$$

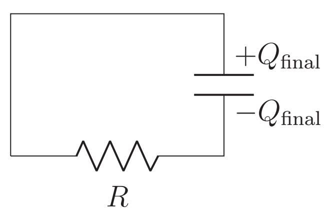
Graphiquement



$\tau = RC$ est le <u>temps caractéristique</u> du circuit RC, on l'appelle aussi "constante de temps", ou "temps de relaxation".

(B) Décharge d'un condensateur

Après avoir chargé, on enlève la batterie et on la remplace avec un fil (avec $R_{\text{fil}} \sim 0$)



A $t = 0$ on a $q(0) = Q_{\text{final}} =$ $= \mathscr{E}C$

On s'attend à quoi ? La charge revient là où elle était, c'est-à-dire le condensateur sera déchargé.
Maille (sans $\mathscr{E}$, ou $\mathscr{E} = 0$) :

$$-\frac{q}{C} - iR = 0 \tag{5.40}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{q}{C} - \frac{dq}{dt}R = 0 \quad ; \quad \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \tag{5.41}$$

$$\int_{Q_{final}}^{q} \frac{dq'}{q'} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{q}{Q_{final}}\right) = -\frac{t}{RC} \tag{5.42}$$

et

$$q(t) = Q_{final} \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} = \mathscr{E}C \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} \quad \Rightarrow \begin{cases} q(0) = Q_{final} = \mathscr{E}C \\ q(\infty) = 0 \end{cases} \tag{5.43}$$

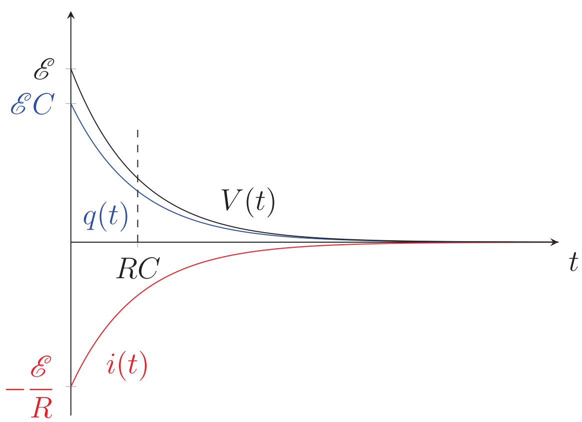
Courant

$$i(t) = \mathscr{E}C \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\}\left(-\frac{1}{RC}\right) = -\frac{\mathscr{E}}{R} \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} < 0 \tag{5.44}$$

$$i \text{ va“a l'envers”} \qquad \begin{cases} i(0) = -\frac{\mathscr{E}}{R} \\ i(\infty) = 0 \end{cases}$$

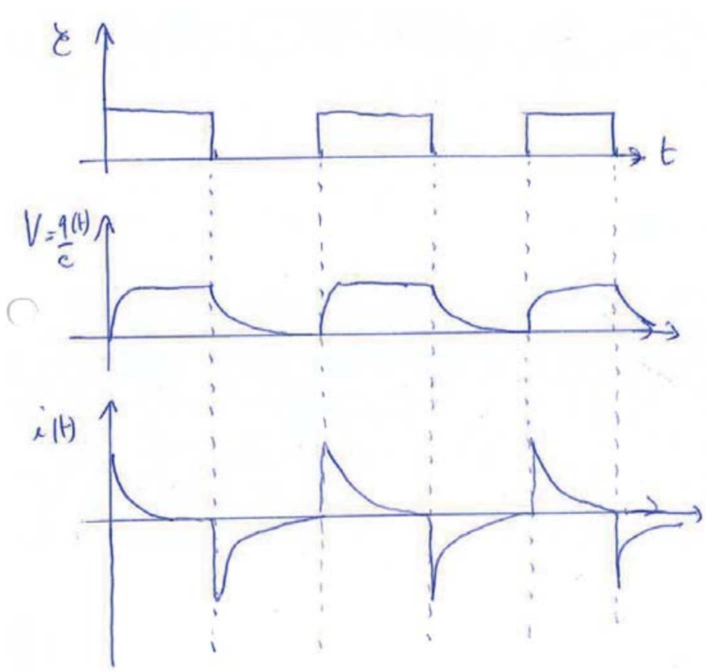
Potentiel

$$V(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathscr{E} \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V(0) = \mathscr{E} \\ V(\infty) = 0 \end{cases} \tag{5.45}$$



La variation temporelle de toutes les quantités en jeu est déterminée par le facteur dans l'exposant : $\tau = RC$

Considérons maintenant d'alterner chargement/décharge, ce qui est équivalent à “allumer/éteindre” $\mathscr{E}$.
Que pouvons nous attendre ?

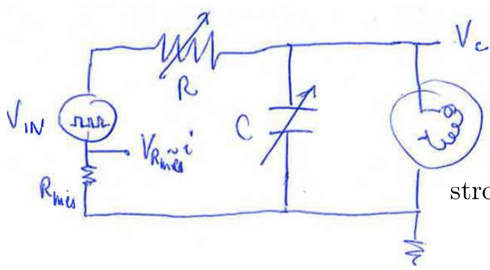


La forme de ces courbes dépend de le valeur de RC

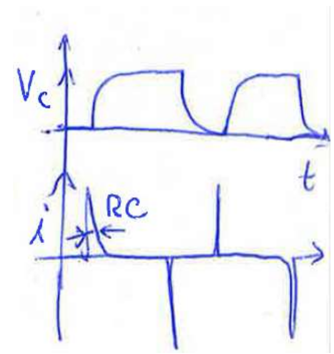
Applications du circuits RC

En voyant les différentes courbes et les variations avec les valeurs de R et C, on peut imaginer diverses applications.

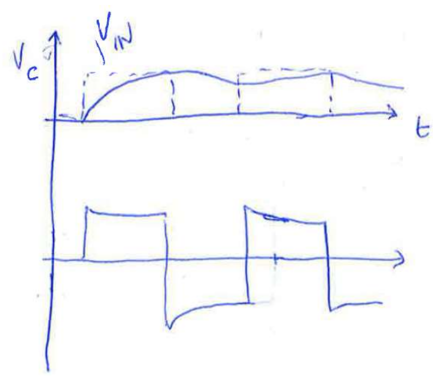
Ex. 1 - RC très court : le courant aura des très courtes impulsions, et très intenses. On pourrait aussi choisir la fréquence des impulsions de $\mathscr{E}$ pour "suivre" un certain phénomène, par ex. de la musique.
Ex. (démo) Stroboscope/oscillateur de relaxation



lumière
stroboscopique



Ex. 2 - RC très long : comparé à la période Δt qui sépare les impulsions de $\mathscr{E}$



Les variations du signal de "input" sont "lissées" : <u>filtre</u> RC

Ce filtrage a lieu parce qui il n'y a pas assez de temps pour charger/décharger C entre les pulses. <u>Intuition :</u> C est un réservoir, comme un lac de montagne. Si R est grand, c'est comme si le lac avait un émissaire (un ruisseau qui en sort pour faire descendre l'eau) trop petit.
Autre façon de voir : le signal d'entrée contient différentes fréquences. Ces fréquences sont influencées par le filtre RC de façons différentes : celles qui sont élevées, avec une période courte par rapport à RC ($\Delta t << RC$) ne peuvent pas vraiment "passer" jusqu'au signal de sortie et seraient coupées. Vice-versa, les basses fréquences, correspondantes à une période $\Delta t > RC$ ne seraient pas influencées par le circuit RC, donc passeraient inaltérées à la sortie. On peut donc éliminer les hautes fréquences : filtre passe-bas.