10.8 Densité d'énergie dans les ondes électromagnétiques, vecteur de Poynting, intensité et pression de radiation

Densité d'énergie des champs électromagnétique : $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$ (10.46)

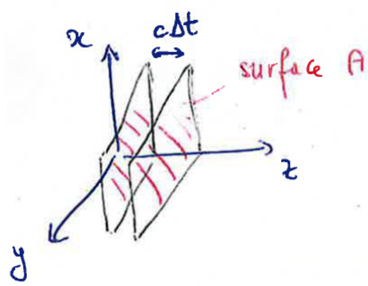
Mais dans les ondes électromagnétique : $B = \frac{E}{c}$ (10.47)

$$\text{donc } u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{E^2}{2\cancel{\mu}_0}\overbrace{\varepsilon_0\cancel{\mu}_0}^{\frac{1}{c^2}} = \varepsilon_0 E^2 : \tag{10.48}$$

la densité d'énergie peut être exprimée uniquement en fonction de E.

Les densités d'énergie de E et B sont les mêmes (dans les ondes électromagnétique dans le vide)

Cette énergie 'voyage' à vitesse c.



Sur l'intervalle de temps Δt, l'onde couvre une distance de $\Delta z = c\Delta t$. Donc, l'onde transporte une énergie ΔU à travers A, donnée par :

$$\Delta U = u \times \text{volume} = u \times Ac\Delta t = \varepsilon_0 E^2 Ac\Delta t \tag{10.49}$$

La puissance qui passe par unité de surface est donc :

$$\frac{\text{puissance}}{\text{surface}} = \frac{\Delta U}{A\Delta t} = \frac{\varepsilon_0 E^2 \cancel{A}c\cancel{\Delta}t}{\cancel{A}\cancel{\Delta}t} = \varepsilon_0 E^2 c \tag{10.50}$$

Mais

$$Bc = E \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{puissance}}{\text{surface}} = \varepsilon_0 E^2 c = \varepsilon_0 E\overbrace{(Bc)}^{E}c = \varepsilon_0 c^2 EB \underset{c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}{=} \frac{1}{\mu_0}EB \overset{\text{déf.}}{=} S \tag{10.51}$$

Cette quantité S donne le flux d'énergie d'une onde électromagnétique. Mais si on veut aussi décrire la direction, on doit définir $\vec{S}$ comme vecteur, dirigé selon la direction de propagation de l'onde.

$$\underline{\text{Déf.}} \qquad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} \qquad \text{vecteur de Poynting} \tag{10.52}$$

$$|\vec{S}| = \frac{1}{\mu_0}|\vec{E}\times\vec{B}| = \frac{1}{\mu_0}EB, \quad \text{car } \vec{E}\perp\vec{B} \tag{10.53}$$

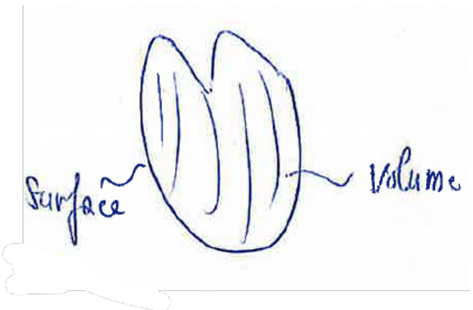
$\vec{S}$ mesure le flux instantané d'énergie :

$$[|\vec{S}|] = \left[\frac{1}{\mu_0}\right][E][B] = \left[\frac{\text{Tm}}{\text{A}}\right]^{-1}\frac{\text{V}}{\text{m}}\text{T} = \frac{\text{A}}{\text{m}\cancel{\text{T}}}\frac{\text{V}}{\text{m}}\cancel{\text{T}} = \frac{\text{VA}}{\text{m}^2} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Note 10.11. *Avec une densité d'énergie électromagnétique et un flux d'énergie électromagnétique on doit pouvoir établir une loi de conservation pour l'énergie électromagnétique sons forme d'équation de continuité.*

Espace vide pas de sources de champs électromagnétique, donc ni charges, ni courant ; donc pas de travail par $\vec{E}$, qui serait $\vec{E}\cdot\vec{j}$ (par unité de volume) : u varie uniquement s'il y a un flux ("in" ou "out" du volume en question).

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{Volume} u dV = -\int_{Surface}\vec{S}\cdot d\vec{A} = -\int_{V(S)}(\vec{\nabla}\cdot\vec{S})dV \tag{10.54}$$



En forme différentielle :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0 \qquad \text{('théorème de Poynting')} \tag{10.55}$$

Démonstration mathématique :

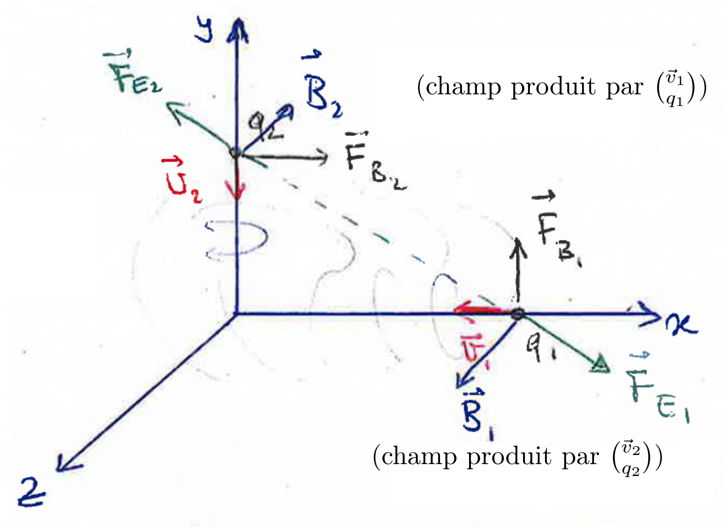
$$\vec{\nabla}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}\right)}_{\vec{S}} = \frac{1}{\mu_0}\underbrace{\left[\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})\right]}_{\text{identité vectorielle}} = \frac{1}{\mu_0}\left[-\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \vec{E}\cdot\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial|B|^2}{\partial t} - \frac{1}{2}\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial|E|^2}{\partial t}\right] = -\frac{1}{\cancel{\mu}_0}\left[\cancel{\mu}_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \cancel{\mu}_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{(\varepsilon_0 E^2)}{2}\right] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right] = -\frac{\partial}{\partial t}u \tag{10.56}$$

Une onde électromagnétique transporte de l'énergie. Est-ce qu'elle transporte d'autre quantités physiques ?
Transporter de l'information implique transporter de l'énergie.

Note 10.12. *Interaction électrique et magnétique entre deux charges ponctuelles en mouvement rectiligne uniforme : il semble y avoir un problème avec la loi d'action et réaction !*



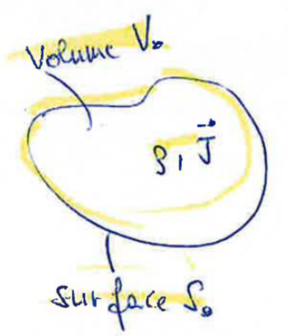
$\vec{F}_{E_2} = -\vec{F}_{E_1}$ OK !

Mais : $\vec{F}_{B_2} \neq -\vec{F}_{B_1}$!

(même pour $v << c$)

Comme résoudre ce problème ? Si la 3$^{\text{ème}}$ loi de Newton n'est pas valable, alors la loi de conservation de la quantité de mouvement est aussi remise en question !
$\left(\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{p_1} + \vec{p2}) = \frac{d}{dt}(\vec{p}_{tot}) = 0\right)$

Idée (solution) ! : il y a une quantité de mouvement associée aux champs électromagnétiques. Comment la déterminer ? Ébauche d'une démonstration.



Dans le volume V_0 il y a des particules chargées, qui donnent lieu à une densité de charge et de courant ρ et $\vec{J}$. La quantité de mouvement totale dans le volume, $\vec{p}_{\text{méc.}}$, varie parce qu'il y a la force électromagnétique.

$$\frac{d\vec{p}_{\text{méc.}}}{dt} = \vec{\text{force}} = \int_{V_0} \underbrace{(\rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B})}_{\text{densité de force } = \frac{\text{force}}{\text{volume}}} dV \tag{10.57}$$

On peut manipuler l'intégrale (on ne la fait pas ici), et on obtient :

$$\frac{d\vec{p}_{\text{méc.}}}{dt} = \underbrace{-\varepsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt}\int_{V_0} \vec{S} dV}_{\substack{\text{variation de la} \\ \text{quantité de mouvement associée} \\ \text{au champ électromagnétique en } V_0}} - \underbrace{\vec{\Phi}_{qdm}}_{\substack{\text{flux de quantité} \\ \text{de mouvement} \\ \text{à travers la surface } S_0}} \tag{10.58}$$

• On peut conclure que la densité de quantité de mouvement associée au champ électromagnétique est :

$$\left[\vec{g} = \varepsilon_0\mu_0\vec{S} = \varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{S}\right] \tag{10.59}$$

$|\vec{S}|$ peut être écrite comme $|\vec{S}| = cu \Rightarrow \boxed{g = \frac{u}{c}}$

• Rappel : vous avez vu en relativité que $\boxed{\text{énergie}^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2}$, et que pour une particule de masse au repos $m_0 = 0$, par ex. un photon, énergie^2 $= p^2c^2$, ou énergie $= pc$, donc $p = \frac{\text{énergie}}{c}$ (ça correspond à $g = \frac{u}{c}$, sauf que g et u sont 'par unité de volume').

• On peut aussi dire que le champ électromagnétique est un gaz de particules de masse au repos nul (les photons).

• Dans la plupart des cas pratiques, les effets de la quantité de mouvement et surtout de l'énergie associées à une onde ne sont pas instantanés, mais se manifestent sur un temps macroscopique (ex. chauffage, transmission des informations, etc.).
On doit donc considérer des moyennes temporelles.

Déf. Intensité $I \equiv \overline{|\vec{S}|} = \frac{1}{T}\int_0^T |\vec{S}|dt$ (moyenne temporelle sur une période de l'onde).

Si on considère des ondes planes, à 1-D

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T |\vec{S}|dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{\mu_0}E_0 cos(kx-\omega t)B_0\cos(kx-\omega t)dt = \tag{10.60}$$

$$= \frac{E_0B_0}{\mu_0}\underbrace{\left[\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(kx-\omega t)dt\right]}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\mu_0}E_0B_0 = \frac{1}{2}c\varepsilon_0E_0^2$$

$[I] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$, comme $[S]$ naturellement, mais I donne lieu à des effets bien plus facilement mesurables.

• La même moyenne temporelle se fait pour u et g :

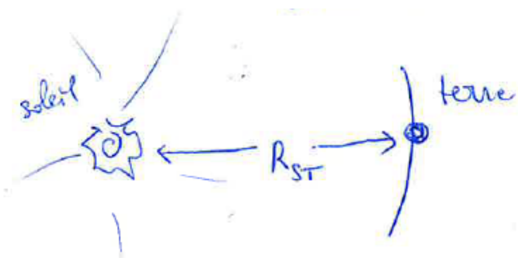
$$\bar{u} = \frac{\overline{|\vec{S}|}}{c} = \frac{I}{c}$$

$$\bar{u} = \varepsilon_0E_0^2\overline{\cos^2(kx-\omega t)} = \frac{1}{2}\varepsilon_0E_0^2 = \frac{I}{c}$$

$$\bar{g} = \frac{1}{c^2}\bar{S} = \frac{1}{c^2}I = \frac{1}{2c}\varepsilon_0E_0^2 \qquad \Rightarrow \qquad I = \bar{g}c^2, \boxed{\bar{g} = \frac{I}{c^2}}$$

Ex. 1 **Émission de lumière par le soleil.**

$P_{\text{tot}} \cong 4 \times 10^{26}\,\text{W}$; distance soleil-terre : $R_{ST} \simeq 1.5 \times 10^{11}\,\text{m}$. Quelle est la valeur maximale de $|\vec{E}|$ et $|\vec{B}|$ sur notre corps, lorsque nous sommes exposés au soleil ?



Intensité à la distance correspondante à la terre (à l'extérieur de l'atmosphère) :

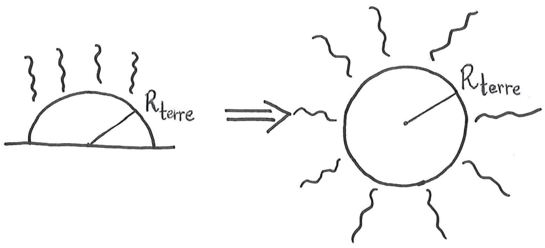
$$I = \frac{P_{\text{tot}}}{\text{surface sphère de rayon } R_{ST}} = \frac{P_{\text{tot}}}{4\pi R_{ST}^2} =$$

$$= \frac{\cancel{4} \times 10^{26}\,\text{W}}{\cancel{4}\pi \times (1.5 \times 10^{11})^2 \text{m}^2} \cong 1400 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Note 10.13. *Si on considère que notre corps a une surface de* $\sim 1\,\text{m}^2$ *cela correspond a* $\sim 140\,\text{W}$ *: très grand !*

Note 10.14. *En considérant la moyenne sur toute la surface de la terre (donc sur toutes les saisons) on devrait corriger par le facteur :*

$$\frac{\pi R_{terre^2}}{4\pi R_{terre^2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1400}{4} \sim 350 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$



Note 10.15. *L'atmosphère nous protège, car elle* <u>*absorbe*</u> $\sim 20\%$ *de la radiation, et* <u>*diffuse/réfléchit*</u> $\sim 30\%$, *donc elle réduit de* $\sim 50\%$ *la puissance. Donc, au max du rayonnement (été) :*

$$I^{max}_{\substack{terre \\ réel}} \sim \frac{I}{2} = 700 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Comme $\quad I^{max}_{\substack{terre \\ réel}} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} = \frac{E^2_{0,max}}{2\mu_0 c} \quad \Rightarrow \quad E_{0,max} = \sqrt{2\mu_0 c I^{max}_{\substack{terre \\ réel}}} =$

$$= \sqrt{2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 3 \times 10^8 \times 700}$$

$$E_{0,max} \simeq 726 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad \textit{(assez grand !)}$$

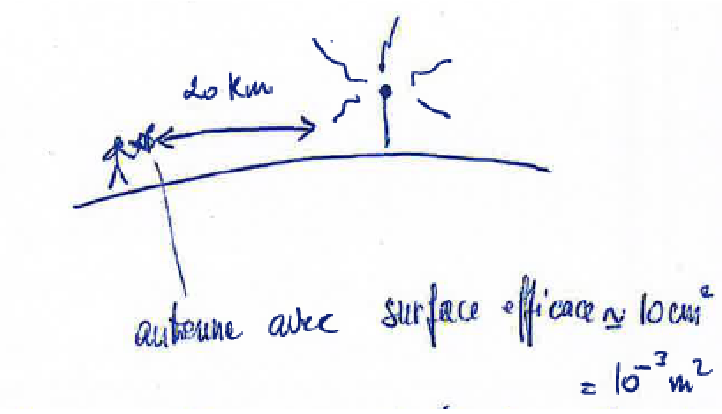
$$\Rightarrow \quad B_{0,max} = \frac{E_{0,max}}{c} = 2.4 \times 10^{-6}\,\text{T} \quad \textit{(assez petit...)}$$

Ex. 2 **Station radio** $P_{tot} \simeq 10\,\mathrm{kW}$
puissance reçue dans notre appareil radio ?
$E_0^{\text{reçue}} =?$

$$\Rightarrow I(r) = \frac{P_{\text{tot}}}{4\pi r^2} \Rightarrow P_{\text{reçue}} = I(r = 20\,\mathrm{km}) \times (\text{surface efficace}) =$$

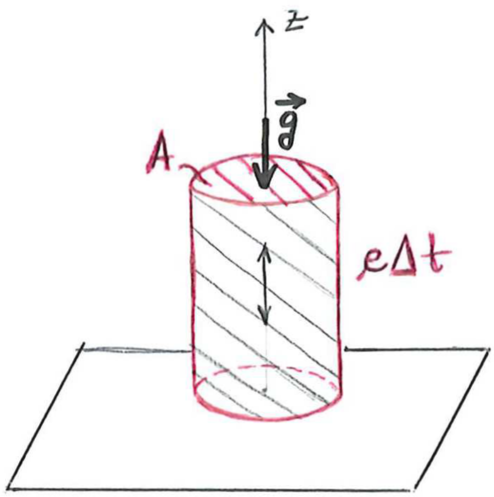
$$\cong \frac{P_{\text{tot}}}{4\pi(2\times 10^4)^2} \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2 \cong P_{\text{tot}} \times 2\times 10^{-13} = 2\times 10^{-9}\,\mathrm{W} = 2\,\mathrm{nW}$$

($\Rightarrow$ petite valeur, on doit amplifier pour entendre quelque chose...)



Pression de radiation
Comme nous avons vu, les ondes électromagnétiques transportent, en plus de l'énergie, de la quantité de mouvement. Si une onde 'frappe' une surface, elle lui cède de la quantité de mouvement, comme si c'était des particules de gaz (d'ailleurs on peut penser au gaz de photons...).

Déf.
$\Delta\vec{p}$: quantité de mouvement transportée à la surface A sur l'intervalle Δt
$\Delta\vec{p} = c\vec{g}A\Delta t$



Absorbeur parfait : l'onde ne 'rebondit' pas. La force est donc :

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = c\vec{g}A = -\frac{I}{c}A\hat{z}$$

en moyenne $\bar{g} = \frac{I}{c^2}$

et la pression est : $$\text{pression} = \frac{F}{A} = \frac{I}{c}$$

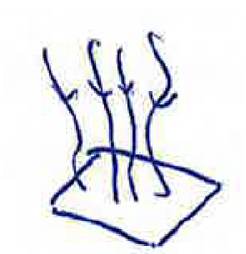
Miroir parfait : l'onde rebondit (à 100%)

$$\vec{F} = 2\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = -2\frac{I}{c}A\hat{z}$$

et la pression : $$\text{pression} = \frac{F}{A} = 2\frac{I}{c}$$

Note 10.16. *On a considéré la force moyenne sur le temps (c'est ça qui compte pour la pression), donc I, et pas S ($I = \bar{S}$).*

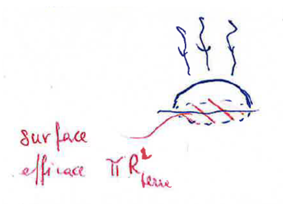
Ex. numérique :



la pression due au rayonnement solaire sur un miroir sur terre est (au max) :

$$p_{\text{miroir}} = 2\frac{I_{\substack{\text{terre}\\ \text{réel}}}}{c} = 2 \times \frac{700}{3\times 10^8}\frac{\text{N}}{\text{m}} \cong 5\times 10^{-6}\,\text{Pa}$$

Force sur la terre entière :



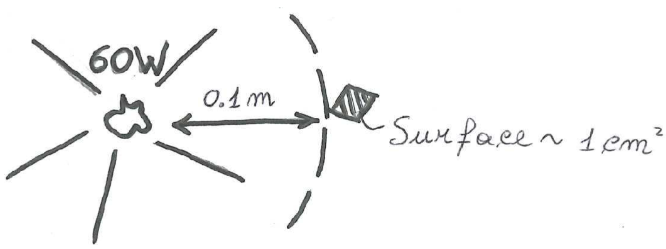
$$p_{\text{miroir}}/2 \times \pi R^2_{\text{terre}} \simeq 5\times\frac{10^{-6}}{2}\times\pi\times(6\times 10^6)^2 \cong 30\times 10^7\,\text{N}$$

car la terre n'est pas un bon réflecteur

$$= 30000\,\text{tonnes}$$

$\boxed{\textbf{DEMO}}$ **Radiomètre de Crooks**

On penserait que cette manip. 'visualise' bien la pression de radiation. Mais, est-ce vrai ? Check quantitatif : l'ampoule a une puissance de 60 W.
Distance ~ 0.1 m



La force sur la surface absorbante est

$$F = \text{pression} \times \text{surface} = \frac{I}{c} \times \text{surface} = \overbrace{\left[\frac{P_{\text{tot}}}{4\pi(0.1\,\cancel{\text{m}})^2}\right]}^{I} \frac{1}{c} \times 10^{-4}\,\cancel{\text{m}}^2 =$$

$$= \frac{60 \times 10^{-4}}{4\pi \times 0.1^2 \times 3 \times 10^8}\,\text{N} = 1.6 \times 10^{-10}\,\text{N} \qquad \text{très petit !}$$

et ça devrait tourner dans le sens inverse !

Note 10.17. *Celle-ci serait la différence de force entre la face absorbante et la face réfléchissante.*

C'est très difficile de construire un apparat qui est sensible à cette force... de plus, on voit que l'effet disparaît si on fait un vide très poussé. Explication ?
⇒ Idée : les faces noires (absorbantes) se chauffent plus rapidement, ce qui crée une différence de température entre le côté noir et le côté 'miroir'. Les molécules qui tapent contre les faces noires (plus chaudes), le font avec plus d'énergie que celles qui tapent contre les faces miroir (plus froides).
Ex. comètes : la forme de la queue des comètes est déterminée par une compétition entre la gravitation, d'un côté, et la pression de radiation du soleil, de l'autre.