4. **Loi d'Ampère**

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} \overset{\text{th. de Stokes}}{=} \oint_{S(C)} (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{A} = \mu_0 i + \overbrace{\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_{S(C)} \vec{E}\cdot d\vec{A}}^{\mu_0 i_D} \tag{10.27}$$

$$\mu_0 i = \mu_0 \int_{S(C)} \vec{J}\cdot d\vec{A} \qquad \frac{1}{c^2}\int_{S(C)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{A}$$

$$\text{Donc} \int_{S(C)} \left\{ \vec{\nabla}\times\vec{B} - \mu_0\vec{J} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\}\cdot d\vec{A} = 0 \qquad \text{pour tout S(C)} \tag{10.28}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \tag{10.29}$$

Cette équation relie $\vec{B}$ à sa source, $\vec{J}$, et au champ $\vec{E}$ (dont la variation dans le temps aussi produit un champ $\vec{B}$).

Résumé

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}; & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}; & \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

- $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont couplés.
- Les sources des champs sont ρ et $\vec{J}$.

10.4 Ondes électromagnétiques à partir des équations de Maxwell

Considérons le système de Maxwell dans le vide : $\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{J} = 0 \end{cases}$ (pas de source $\Leftrightarrow$ pas de charges)

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0; & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}; & \vec{\nabla}\times\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Combien d'équations ? 2 scalaires + 2 vectorielles $\Rightarrow 2 + 2\times 3 = 8$

Combien d'inconnus ? $E_x, E_y, E_z; B_x, B_y, B_z \Rightarrow 6$
$\Rightarrow$ système "sur-déterminé" !
Mais les 8 équations ne sont en effet pas toutes indépendantes :

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = 0 \quad \text{toujours, et} \quad \underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E})}_{=0} = -\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})}_{=0} = 0$$

La même chose pour $\quad \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = 0$

Pour résoudre le système, choisissons une géométrie simple. Supposons que les champs varient uniquement le long de z :

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}(z,t) \\ \vec{B} = \vec{B}(z,t) \end{cases}$$

1.
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E_z = const. \tag{10.30}$$

Mais je ne peux pas avoir $E_z = const. \neq 0$ partout, car cela correspondrait à une énergie infinie : $U_E = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

Donc $E_z = const. = 0 \qquad \Rightarrow \qquad$ ondes transversales !

2.
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{même raisonnement que pour } E_z \tag{10.31}$$

$$B_z = const. = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{ondes transversales !} \tag{10.32}$$

3.
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{10.33}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{x}\left(-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{10.34}$$

$$\text{On peut écrire} \quad \left\{-\frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z}, 0\right\} = \left\{-\frac{\partial B_x}{\partial t}, -\frac{\partial B_y}{\partial t}, 0\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = \dfrac{\partial B_x}{\partial t} \end{cases} \qquad \text{A} \tag{10.35}$$

4.
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{10.36}$$

$$\Rightarrow \quad \left\{-\frac{\partial B_y}{\partial z}, \frac{\partial B_x}{\partial z}, 0\right\} = \left\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}, \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}, 0\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial t} = -c^2 \dfrac{\partial B_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial B_x}{\partial z} \end{cases} \qquad \text{B} \tag{10.37}$$

Il nous reste à combiner les systèmes A et B.
Prenons la dérivée de A par rapport au temps

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial E_y}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} \end{cases} \text{, mais, de B :} \qquad \frac{\partial E_x}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} \tag{10.38}$$

$$\text{Donc } \frac{\partial}{\partial z}\left(-c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}, \text{ ou} \tag{10.39}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0}; \qquad \text{avec la même procédure on trouve} \tag{10.40}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0} \qquad \text{et idem pour } E_x, B_x. \tag{10.41}$$

Ces équations couplent les variations spatiales et temporelles des champs, en donnant lieu à des ondes qui se propagent à vitesse $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s.

10.5 L'équation d'onde et la solution générale

En considérant les équations de Maxwell dans le vide dans leur forme différentielle, et une géométrie simple, et en assumant que les champs varient uniquement sur une direction (z), nous avons vu que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ doivent satisfaire à une équation d'onde.
Mais que signifie satisfaire à une équation d'onde ?
$\rightarrow$ cas générique $A = A(z,t)$ [à une dimension], équation d'onde (ou équation de “d'Alem-

bert")

$$\boxed{\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0}$$

La solution générale a la forme $A(z,t) = g(z-ct)+h(z+ct)$ avec g, h fonctions arbitraires. En utilisant la notation générale pour la dérivée, $\dfrac{dg}{dx} = g'$; $\dfrac{d^2g}{dx^2} = g''$:

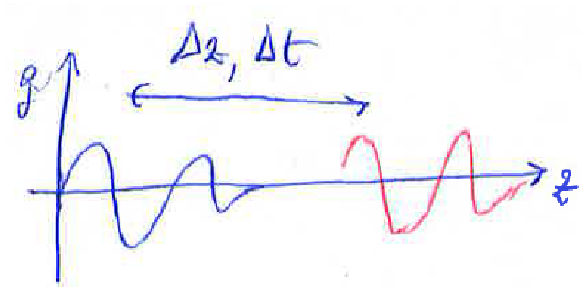
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = g'' + h''$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = g'\frac{\partial}{\partial t}(z-ct) + h'\frac{\partial}{\partial t}(z+ct) = g'\cdot(-c) + h'\cdot(c)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -cg''\cdot(-c) + ch''\cdot(+c) = c^2(g''+h'')$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = g'' + h'' - \frac{1}{c^2}c^2(g''+h'') = 0 \qquad \square$$

Quelle est la signification de g, h ? Considérons une certaine forme pour g



Après la distance Δz et le temps Δt, nous avons $g(z + \Delta z - ct - c\Delta t)$. Ce terme a la même forme que $g(z-ct)$ toujours, pour autant que $\Delta z - c\Delta t = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta z}{\Delta t} = c$. Ceci veut dire qu'une perturbation (de n'importe quelle forme) se propage (à travers l'espace et le long du temps) avec la vitesse $c = \frac{\Delta z}{\Delta t}$, sans donner lieu à un transport de masse.

Note 10.6. *Le terme $g(z-ct)$ nous donne une propagation qui avance dans le temps vers les z croissants (vers la droite $+z$). On aurait pu choisir $h(z+ct)$: ceci nous aurait donné une perturbation qui se propage dans la direction opposée $(-z)$, donc vers la gauche.*

Donc notre onde électromagnétique peut être exprimée comme

$$E_{x,y}(z,t) = g(z-ct) + h(z+ct).$$

Mettons ensemble $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en se rappelant que $\frac{\partial E_x}{\partial t} = -c^2\frac{\partial B_y}{\partial z}$. Considérons la propagation dans la direction $+z$ uniquement

$$\vec{E} = \{f(z-ct); \quad g(z-ct); \quad 0\}$$

$$\vec{B} = \left\{-\frac{1}{c}g(z-ct); \quad \frac{1}{c}f(z-ct); \quad 0\right\}$$

g, f sont des fonctions arbitraires, indépendantes entre elles.

Note 10.7. *E_x est indépendant de E_y, B_x est indépendant de B_y, mais B_x et E_y et B_y et E_x, sont couplés.*

Propriétés

(1) $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \perp \vec{B}$

(2) $\vec{E} \times \vec{B}$ donne la direction de propagation

(3) $\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = c$

(4) Les ondes électromagnétiques sont transversales (les composantes non-nulles de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont $\perp$ à la direction de propagation)

(5) Vitesse de propagation $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

A la place de considérer des fonctions génériques g et f, on peut se rappeler du théorème de Fourier, et du formalisme de la transformée de Fourier, et exprimer la solution en termes d'"ondes planes".

10.6 Transformée de Fourier et ondes planes

Fonctions périodiques : $f(t) = f(t+nT) \quad ; \quad n = 1, 2, 3...$
$f(t)$ peut être exprimée comme une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales (sin ou cos) :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \quad ; \quad \frac{a_0}{2} = \bar{f}$$

moyenne de $f(t)$ sur une période
$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \quad ; \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T}n$$

$$et \begin{cases} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega_n t)dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega_n t)dt \end{cases}$$

La décomposition en générale peut s'écrire comme

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \tilde{\vec{E}}(\vec{k},\omega)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}d\vec{k}d\omega$$

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \vec{E}(\vec{x},t)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}d\vec{x}dt \longleftarrow \tilde{\vec{E}}(\vec{k},\omega) \text{ “spectre” de } \vec{E}(\vec{x},t)$$

Note 10.9. *Dans la transformée de Fourier on introduit des quantités complexes. Rien de préoccupant ... car ou peut considérer que les quantités physiques correspondent aux parties réelles (ou imaginaires) de ces éléments. Considérer ceci correspond à choisir les termes de l'expansion en* “cos”*, ou en* “sin”*, respectivement.*

10.7 Ondes planes, fréquence, période, nombre d'onde et longueur d'onde

Pour une composante donnée du champ de l'onde qui se propage le long de z ou on donc des termes en “sin” ou en “cos”. Choisissons le “cos” :

$$E = \sum E_n\cos(k_nz-\omega_nt) \quad \text{ou} \quad E = \int \tilde{E}\cos(kz-\omega t)d\omega dt$$

$$\text{ou} \quad E = \mathrm{Re}\left\{\int \tilde{E}e^{i(kz-\omega t)}dkd\omega\right\}$$

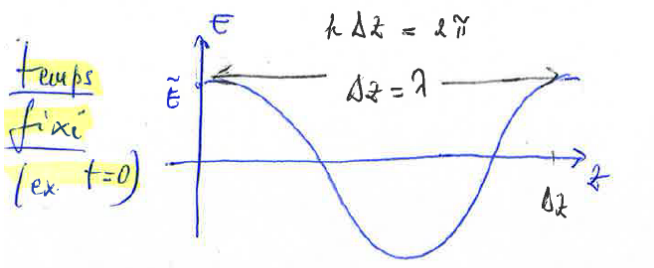
Chaque terme sinusoïdal est une <u>onde plane</u>.

$$E = \tilde{E}\cos(kz-\omega t) = \tilde{E}\cos\left[k\left(z-\frac{\omega}{k}t\right)\right]$$

Cette fonction est effectivement de la forme $g(z-\omega t)$ (solution générale de l'équation d'onde), pour autant que $\boxed{\frac{\omega}{k}=c}$ vitesse de phase.

$$\omega = \text{fréquence angulaire } [\omega] = \text{rad/s}$$
$$k = \text{nombre d'onde } [k] = 1/\text{m}$$

$E = \tilde{E}\cos(kz-\omega t)$ est une fonction à double périodicité (en z et en t)



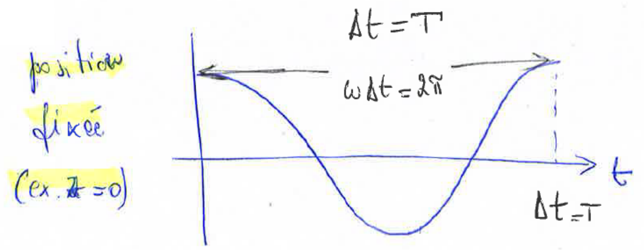
$$\Delta z = \frac{2\pi}{k} = \lambda \quad \text{“longueur d'onde”}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{“nombre d'onde”}$$

Car

$$E(z,t) = \tilde{E}\cos(kz-\omega t) = E(z+\lambda,t) = \tilde{E}\cos(k(z+\lambda)-\omega t)$$

si $k\lambda = 2\pi$.



$$\omega \Delta t = 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{“période”}$$

Car

$$E(z,t) = \tilde{E}\cos(kz - \omega t) = \tilde{E}(z, t+T) = \tilde{E}\cos[kz - \omega(t+T)]$$

$$\text{si} \quad \omega T = 2\pi \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\text{fréquence}}$$

La vitesse de phase $c = \frac{\omega}{k}$ peut aussi être écrite comme

$$\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T}\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \times \text{fréquence} = c$$

On peut visualiser à travers des démos le fait que les ondes peuvent être le résultat de la superposition d'ondes monochromatiques, donc de composantes de Fourier.
Exemples ondes radio FM :

$$\lambda = \frac{c}{f} \cong \frac{3 \times 10^8}{100 \times 10^6} \simeq 3\,\text{m}$$

Les antennes radio sont de cet ordre de dimensions. Téléphone portable :

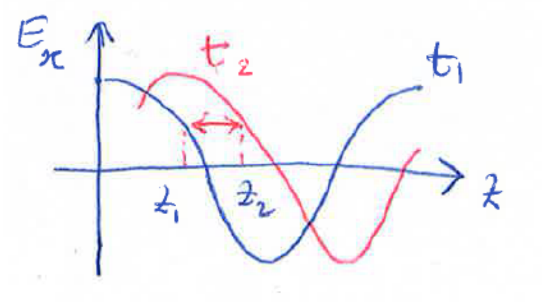
$$f \simeq 3 \times 10^9\,\text{Hz} \quad ; \quad \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^9}\,\text{m} = 10\,\text{cm}$$

Utilisons cette représentation en terme d'ondes planes pour retrouver les relations entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le vide.
Prenons une onde qui se propage le long de z, comme au début de la discussion, avec uniquement $\begin{cases} E_x \neq 0 \\ B_y \neq 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} E_y = 0 \\ B_x = 0 \end{cases}$

$$\vec{E}(z,t) = \{E_x(z,t), 0, 0\} \quad ; \quad \vec{B}(z,t) = \{0, B_y(z,t), 0\}$$

avec

$$\begin{cases} E_x(z,t) = E_0\cos(\omega t - kz) \\ B_y(z,t) = B_0\cos(\omega t - kz) \end{cases}$$



Pour que la forme ne change pas :

$$\omega t_1 - kz_1 = \omega t_2 - kz_2$$

$$\Rightarrow k(z_2 - z_1) = \omega(t_2 - t_1)$$

et

$$z_2 - z_1 = \frac{\omega}{k}(t_2 - t_1) > 0 \quad \Rightarrow \quad z_2 > z_1, \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{k} = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}$$

Calculons $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ pour ces ondes planes :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{y}\left(-\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = \hat{y}\left(-\frac{\partial B_y}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z}\left[E_0 \cos(\omega t - kz)\right] = E_0(-k)[-\sin(\omega t - kz)] = -\frac{\partial}{\partial t}[B_0 \cos(\omega t - kz)]$$

$$\Rightarrow \quad E_0 k \cancel{\sin}(\omega t - kz) \underset{\forall t, \forall z}{=} \omega B_0 \cancel{\sin}(\omega t - kz) \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{E_0}{c}}$$

Résumé :

• Nous avons vu comment on arrive à des équations d'ondes à partir du système de Maxwell. Nous avons mentionné que l'équation d'onde, par ex. pour une composante du champ électrique, a la forme $\frac{\partial^2 E_{y,x}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_{y,x}}{\partial t^2} = 0$
La solution générale a la forme $E_{y,x}(z,t) = g(z - ct) + h(z + ct)$ où g et h sont des fonctions arbitraires. g et h décrivent la propagation à vitesse c d'une perturbation le long de la direction z.

• Nous avons dit qu'il est utile de considérer que g et h sont (comme toutes les fonctions satisfaisant certaines conditions de régularité) le résultat d'une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales (ou, dans la notation complexe, de fonctions exponentielles). Cette combinaison est sons forme d'intégrale pour les ondes en général non-sinusoïdales.

Les champs sont donc le résultat d'une somme (ou une intégrale) de composantes élémentaires, chacune desquelles est une "onde plane" :

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = const. \times \mathrm{Re}\left\{\int \underbrace{\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}}_{\text{ondes planes } (\equiv \text{"couleurs"})} d\vec{k}\, d\omega\right\} \tag{10.43}$$

(en notation réelle : $\vec{E}_0 \cos\left(\vec{k}\vec{x} - \omega t\right)$)

Note 10.10. *Dans ce formalisme de la transformée de Fourier, on peut appliquer la correspondance* $\begin{cases} \vec{\nabla} & \Rightarrow \quad i\vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} & \Rightarrow \quad -i\omega \end{cases}$ *[équations différentielles → algébriques]*

$$car \quad \vec{\nabla}\begin{pmatrix}\times \\ \cdot\end{pmatrix}\vec{E}(\vec{x},t) = const. \times \mathrm{Re}\left\{\int \vec{\nabla}\begin{pmatrix}\times \\ \cdot\end{pmatrix}\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x})}e^{-i\omega t}d\vec{k}d\omega\right\} =$$

$$= const. \times \mathrm{Re}\left\{\int \underbrace{i\vec{k}\begin{pmatrix}\times \\ \cdot\end{pmatrix}\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}}_{i\vec{k}\begin{pmatrix}\times \\ \cdot\end{pmatrix} onde\ plane} d\vec{k}d\omega\right\} \tag{10.44}$$

et

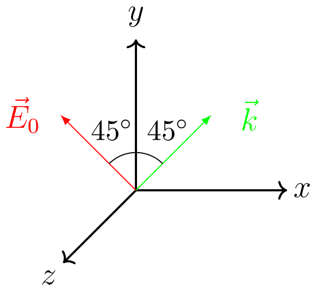
$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{x},t) = const. \times \mathrm{Re}\left\{\int \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\frac{\partial}{\partial t}(e^{-i\omega t})d\vec{k}d\omega\right\} =$$

$$const. \times \mathrm{Re}\left\{\int \underbrace{(-i\omega)\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}d\vec{k}}_{-i\omega\times onde\ plane}\, d\omega\right\} \tag{10.45}$$

⇒ *Vérification de la relation entre* $\vec{E}$ *et* $\vec{B}$: $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \cancel{i}\vec{k}\times\vec{E} = \cancel{i}\omega\vec{B}$ *et* $\vec{B}(\vec{x},t) = \dfrac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E} = \left(comme\ \dfrac{\omega}{k} = c\right) = \dfrac{1}{c}\dfrac{\vec{k}}{k}\times\vec{E}$

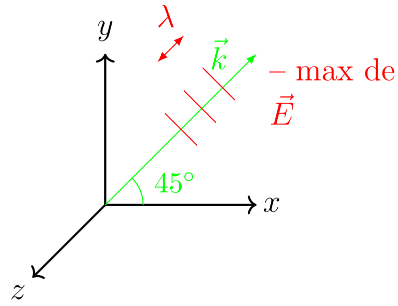
Exemple d'exercice

$$\text{on a} \begin{cases} \vec{k} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\left[\dfrac{\hat{x}}{\sqrt{2}} + \dfrac{\hat{y}}{\sqrt{2}}\right] \\ \vec{E}_0 = -\dfrac{E_0}{\sqrt{2}}\hat{x} + \dfrac{E_0}{\sqrt{2}}\hat{y} \end{cases}$$



$\Rightarrow$ Exprimez $\vec{E}(\vec{x},t)$ comme onde plane, et trouvez $\vec{B}(\vec{x},t)$

Solution :



$$\vec{k}\cdot\vec{x} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) = \frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda}(x+y)$$

$$\vec{E}(x,y,t) = E_0\left(-\frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{y}}{\sqrt{2}}\right)\cos\left[\frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda}(x+y) - \omega t\right]$$

$$\vec{B}(x,y,t) = \frac{1}{c}\frac{\vec{k}\times\vec{E}}{k} = \frac{E_0}{c}\cos\left[\frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda}(x+y) - \omega t\right] \times \underbrace{\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}}_{1\times\hat{z}}$$

$$= \frac{E_0}{c}\hat{z}\cos\left[\frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda}(x+y) - \omega t\right]$$

Cette onde se propage dans le vide à l'infini.