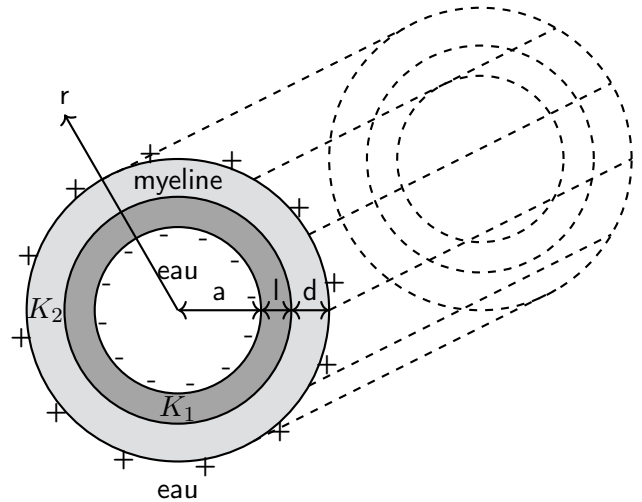


16 janvier 2025

Corrigé Examen

1 L'électrostatique d'un axone (25 points)

Les neurones communiquent à travers de longs tubes cellulaires qu'on appelle axones. On modélise un axone connectant le cerveau à la moelle épinière comme un cylindre infini (voir dessin) avec une membrane isolante (constante diélectrique $K_1 = 5$) formant le bord du cylindre. La membrane s'étend entre $r = a$ et $r = a + l$ avec $a = 1 \mu\text{m}$ et $l = 5 \text{ nm}$. À l'intérieur de l'axone il y a de l'eau supposée conductrice. La membrane est à son tour entourée d'une couche épaisse de myéline (isolant de constante diélectrique $K_2 = 8$), d'épaisseur $d = 0.5 \mu\text{m}$. À l'extérieur se trouve de l'eau supposée conductrice. De la charge négative est distribuée uniformément sur la surface intérieure ($r = a$) avec une densité $\sigma = -10 \mu\text{C}/\text{m}^2$, et la surface extérieure ($r = a + l + d$) est chargée positivement avec une charge totale opposée.



Indication : $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$.

(a) Trouver l'expression du champ électrique \vec{E} en tout point de l'espace.

En utilisant la loi de Gauss, à travers une surface S cylindrique de rayon r et de longueur L :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enf}}}{\epsilon_0}. \quad (1)$$

L'aire de la surface est $A = 2\pi rL$. La charge enfermée par S q_{enf} dépend de r , ce qui conduit aux cas suivants :

Région 1 : $r < a$

À l'intérieur de l'eau conductrice, le champ électrique est nul : $\vec{E} = 0$.

Région 2 : $a \leq r \leq a + l$

Dans la membrane diélectrique ($K_1 = 5$) $q_{\text{enf}} = \sigma(2\pi aL)$. De plus par symétrie cylindrique de la distribution des charges, E ne dépend que de r , et est orienté selon \vec{e}_r , donc $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$. On peut donc écrire :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(2\pi rL) = \frac{\sigma(2\pi aL)}{\epsilon_0 K_1}. \quad (2)$$

Ainsi :

$$E = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 K_1 r}. \quad (3)$$

Région 3 : $a + l \leq r \leq a + l + d$

Dans la myéline ($K_2 = 8$) :

$$E = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 K_2 r}. \quad (4)$$

Région 4 : $r > a + l + d$

À l'extérieur de la surface externe, le système est électriquement neutre, donc : $E = 0$.

(b) Évaluer le champ électrique en $r = a + l/2$.

Ce point se situe dans la membrane ($a \leq r \leq a + l$) :

$$E(a + l/2) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 K_1 (a + l/2)}. \quad (5)$$

L'application numérique donne : $E = -2.25 \times 10^5 \text{ N/C}$.

(c) Quelle est la différence de potentiel $\Delta V = V_{out} - V_{in}$ entre la surface extérieure et la surface intérieure ?

La différence de potentiel est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta V = V_{out} - V_{in} &= \int_{r_{out}}^{r_{in}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_{out}}^{r_{in}} E dr \\ &= + \int_{a+l}^a E dr + \int_{a+l+d}^{a+l} E dr. \end{aligned} \quad (6)$$

Pour la membrane :

$$\int_{a+l}^a E dr = \int_{a+l}^a \frac{\sigma a}{\epsilon_0 K_1 r} dr = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 K_1} \ln \left(\frac{a}{a+l} \right). \quad (7)$$

Pour la myéline :

$$\int_{a+l+d}^{a+l} E dr = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 K_2} \ln \left(\frac{a+l}{a+l+d} \right). \quad (8)$$

En combinant les résultats :

$$\Delta V = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{K_1} \ln \left(\frac{a}{a+l} \right) + \frac{1}{K_2} \ln \left(\frac{a+l}{a+l+d} \right) \right]. \quad (9)$$

En substituant les valeurs : $\Delta V = 58 \text{ mV}$.

(d) Est-ce que la présence de la myéline augmente ou diminue ΔV ?

La myéline augmente l'amplitude de ΔV car elle ajoute de l'épaisseur à l'isolant, ce qui augmente la différence de potentiel totale, même si elle est inversement proportionnelle à K_2 .

(e) Un canal s'ouvre à travers les membranes de l'axone, entre la surface extérieure et la surface intérieure. Un ion de potassium K^+ (masse $6.5 \times 10^{-26} \text{ kg}$, charge $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$) initialement au repos traverse les membranes depuis l'extérieur et atteint l'intérieur de l'axone sans subir de frottement. Quelle est sa vitesse une fois arrivé à l'intérieur et combien d'énergie faut-il pour le ramener de nouveau à l'extérieur ?

D'après la conservation de l'énergie de l'ion, entre le moment où il est à l'extérieur (vitesse nulle, et potentiel V_{out}) et celui où il arrive à l'intérieur des membranes (vitesse v , et potentiel

V_{in}) :

$$\Delta E_c + \Delta U = 0 \quad (10)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - q\Delta V = 0 \quad (11)$$

$$v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}. \quad (12)$$

L'application numérique donne $v = 534$ m/s. L'énergie nécessaire pour le ramener de nouveau à l'extérieur W est l'opposé du travail de la force électrique qui l'a poussé à l'intérieur : $W = -W_{el} = -\int_{in}^{out} q\vec{E}\cdot d\vec{l} = q(V_{out} - V_{in}) = q\Delta V$. L'application numérique donne $W = 9.2 \times 10^{-21}$ J.

- (f) Trouver l'expression de l'énergie électrique totale stockée par l'axone si celui-ci a une longueur de L .

La formule de l'énergie totale est donnée par :

$$U_E = \int_{membrane} \frac{1}{2}K_1\epsilon_0 E^2 dV + \int_{myline} \frac{1}{2}K_2\epsilon_0 E^2 dV \quad (13)$$

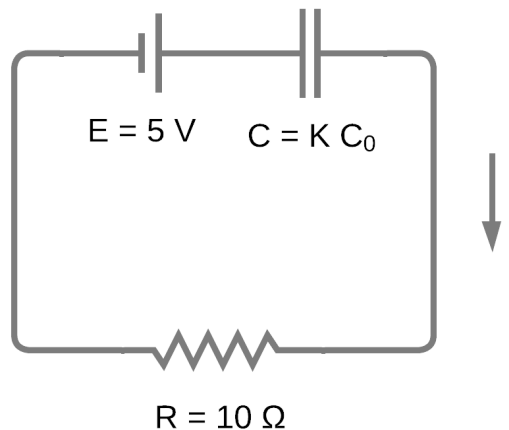
$$= \frac{\pi L\sigma^2 a^2}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{K_1} \ln \left(1 + \frac{l}{a} \right) + \frac{1}{K_2} \ln \left(1 + \frac{d}{a+l} \right) \right]. \quad (14)$$

2 Clavier Capacitif (25 points)

Un clavier capacitif est un capteur tactile basé sur le principe suivant. Un condensateur plan est formé de deux plaques carrées de côté $L = 1$ cm, avec une distance entre les plaques de $d_0 = 0.5$ mm si aucune pression n'est exercée sur le clavier (qui est une des plaques du condensateur). Un diélectrique mou de constante diélectrique $K = 10$ est placé entre les plaques du condensateur. Le condensateur, initialement déchargé, est connecté en série avec une source de tension constante $\mathcal{E} = 5$ V et une ampoule qu'on modélise comme une résistance $R = 10 \Omega$. On suppose que lorsque le courant qui traverse l'ampoule dépasse 0.2 A, l'ampoule apparaît comme allumée.

Indication : $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m.

- (a) Aucune pression n'est exercée sur le clavier. Calculer la capacité du condensateur. Calculer le temps nécessaire pour que le condensateur se charge à 99% du maximum.



Le condensateur contient un diélectrique entre ses deux plaques. Sa capacité est donc $C = KC_0$, où C_0 est la capacité du condensateur en l'absence de diélectrique. C_0 dépend de la surface des plaques et de leur distance : $C_0 = \epsilon_0 \frac{L^2}{d_0}$. Donc $C = K\epsilon_0 \frac{L^2}{d_0} \approx 1.77 \cdot 10^{-11}$ F.

Pour calculer le temps que met le condensateur à se charger à 99%, on commence par établir les équations du circuit. (Ici, comme c'est un circuit RC en série avec une batterie, notez que l'on peut aussi directement utiliser le résultat du cours). Avec la loi des mailles on obtient :

$$\mathcal{E} - \frac{Q}{C} - RI = 0 \quad (15)$$

$$\mathcal{E} - \frac{Q}{C} - R \frac{dQ}{dt} = 0 \quad (16)$$

$$(17)$$

Pour avoir l'expression explicite de la charge du condensateur en fonction du temps, $Q(t)$, on réarrange les termes et on intègre comme suit (et en utilisant la condition initiale d'un

condensateur déchargé, i.e. $Q(t) = 0$) :

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R} \left(\mathcal{E} - \frac{Q}{C} \right) \quad (18)$$

$$dQ = \frac{1}{RC} (C\mathcal{E} - Q) dt \quad (19)$$

$$\frac{dQ}{(Q - C\mathcal{E})} = \frac{-1}{RC} dt \quad (20)$$

$$\int_{Q_0}^Q \frac{1}{(Q' - C\mathcal{E})} dQ' = \int_0^t \frac{-1}{RC} dt \quad (21)$$

$$\ln \left(\frac{Q - C\mathcal{E}}{Q_0 - C\mathcal{E}} \right) = \frac{-t}{RC} \quad (22)$$

$$\frac{C\mathcal{E} - Q}{C\mathcal{E}} = e^{\frac{-t}{RC}} \quad (23)$$

$$Q(t) = C\mathcal{E} \left(1 - e^{\frac{-t}{RC}} \right) \quad (24)$$

$$(25)$$

La charge du condensateur croît strictement donc sa valeur maximale est sa valeur limite quand $t \rightarrow \infty$: $Q_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = C\mathcal{E}$. Ainsi :

$$0.99C\mathcal{E} = Q(t_{0.99}) = C\mathcal{E} \left(1 - Q_0 e^{\frac{-t_{0.99}}{RC}} \right) \quad (26)$$

$$e^{\frac{-t_{0.99}}{RC}} = 0.01 \quad (27)$$

$$t_{0.99} = -RC \ln(0.01) = -R \frac{K\varepsilon_0 L^2}{d_0} \ln(0.01) \approx 8.15 \cdot 10^{-10} \text{ s} \quad (28)$$

- (b) On suppose maintenant que le condensateur a été chargé au maximum. À $t = 0$, on appuie sur la touche du clavier de sorte que la distance entre les plaques diminue soudainement et devient $d = d_0 - \Delta$, avec $\Delta > 0$. Montrer que le potentiel aux bornes du condensateur devient $(1 - \Delta/d_0)\mathcal{E}$ soudainement (à $t = 0$).

Le changement de capacité du condensateur est soudain, donc la charge du condensateur reste constante. En revanche comme la capacité change, c'est le potentiel à ses bornes qui s'adapte instantanément. La charge initiale du condensateur est maximale, donc $Q_{ini} = C\mathcal{E}$, on a donc :

$$Q_{ini} = Q_{final} \quad (29)$$

$$C\mathcal{E} = C_{final} V_{final} \quad (30)$$

$$K\varepsilon_0 \frac{L^2}{d_0} \mathcal{E} = K\varepsilon_0 \frac{L^2}{d_0 - \Delta} V_{final} \quad (31)$$

$$V_{final} = \left(1 - \frac{\Delta}{d_0} \right) \mathcal{E} \quad (32)$$

- (c) En prenant $(1 - \Delta/d_0)\mathcal{E}$ comme condition initiale, dériver une expression pour l'évolution temporelle du potentiel aux bornes du condensateur en supposant que Δ reste constant. En déduire le courant $i(t)$ qui circule dans le circuit.

En suivant le même raisonnement qu'à la première question, avec la nouvelle capacité du condensateur $C_2 = C_{final}$, et une condition ititiale $Q_0 = C_2 V_{final}$ obtient :

$$\ln\left(\frac{Q - C_2\mathcal{E}}{Q_0 - C_2\mathcal{E}}\right) = \frac{-t}{RC_2} \quad (33)$$

$$Q(t) = C_2\mathcal{E} + (Q_0 - C_2\mathcal{E})e^{\frac{-t}{RC_2}} \quad (34)$$

$$(35)$$

La tension est donnée par $V(t) = Q(t)/C_2$ donc :

$$V(t) = \mathcal{E} + (V_{final} - \mathcal{E})e^{\frac{-t}{RC_2}} \quad (36)$$

$$= \mathcal{E} \left(1 - \frac{\Delta}{d_0} e^{\frac{-t}{RC_2}}\right) \quad (37)$$

$$(38)$$

De l'équation du circuit on en déduit :

$$I(t) = \frac{1}{R}(\mathcal{E} - V(t)) \quad (39)$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \frac{\Delta}{d_0} e^{\frac{-t}{RC_{final}}} \quad (40)$$

(d) De combien faut-il appuyer la touche (donc quelle valeur de Δ) pour que l'ampoule s'allume ?

Le courant est une fonction strictement décroissante du temps, sa valeur maximale est donc sa valeur initiale, $I_{max} = I_{(t=0)}$. La touche s'allume donc si :

$$I(t=0) = \frac{\mathcal{E}}{R} \frac{\Delta}{d_0} > 0.2 \quad (41)$$

$$\Delta > \frac{0.2d_0R}{\mathcal{E}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (42)$$

(e) Pour $\Delta = 0.2 \text{ mm}$, calculer l'énergie totale délivrée par la source de tension à partir du moment où on appuie.

L'énergie totale apportée par la source de tension est l'intégrale en fonction du temps de la puissance de cet élément :

$$E_{in} = \int_0^{\infty} P_{\text{source de tension}} dt = \int_0^{\infty} \mathcal{E}I(t) dt \quad (43)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{E}^2}{R} \frac{\Delta}{d_0} e^{\frac{-t}{RC_{final}}} dt \quad (44)$$

$$= -RC_{final} \frac{\mathcal{E}^2}{R} \frac{\Delta}{d_0} e^{\frac{-t}{RC_{final}}} \Big|_0^{\infty} \quad (45)$$

$$= C_{final} \mathcal{E}^2 \frac{\Delta}{d_0} \approx 2.95 \cdot 10^{-10} \text{ J} \quad (46)$$

(f) Pour $\Delta = 0.2 \text{ mm}$, calculer l'énergie dissipée par l'ampoule à partir du moment où on appuie. Expliquer la différence entre les énergies trouvées en (e) et (f).

L'énergie dissipée par l'ampoule est l'intégrale en fonction du temps de la puissance dissipée

par cet élément :

$$E_{\text{out, ampoule}} = \int_0^{\infty} P_{\text{ampoule}} dt = \int_0^{\infty} V_{\text{ampoule}} I(t) dt \quad (47)$$

$$= \int_0^{\infty} RI(t)^2 dt \quad (48)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{E}^2}{R} \frac{\Delta^2}{d_0^2} e^{\frac{-2t}{RC_{\text{final}}}} dt \quad (49)$$

$$= -\frac{C_{\text{final}}}{2} \frac{\mathcal{E}^2}{R} \frac{\Delta^2}{d_0^2} e^{\frac{-2t}{RC_{\text{final}}}} \Big|_0^{\infty} \quad (50)$$

$$= \frac{C_{\text{final}}}{2} \mathcal{E}^2 \frac{\Delta^2}{d_0^2} \approx 5.9 \cdot 10^{-11} \text{ J} \quad (51)$$

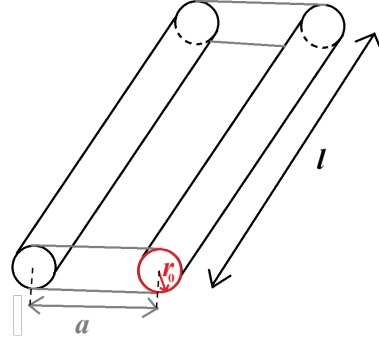
$$(52)$$

La différence entre l'énergie apportée au système par la source de tension et celle dissipée par l'ampoule est l'énergie qui va recharger le condensateur de sa tension juste après l'enfoncement de la touche, $V = (1 - \Delta/d_0)\mathcal{E}$, à sa tension d'équilibre, quand t tend vers l'infini, $V = \mathcal{E}$. Cette différence d'énergie est donc positive et est stockée dans le condensateur.

3 Une antenne rectangulaire (25 points)

On considère une antenne d'émission d'ondes électromagnétiques composée d'un cadre conducteur rectangulaire en cuivre (résistivité $\rho_{\text{cuivre}} = 1.7 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$) de largeur $a = 1 \text{ cm}$ et de longueur $l \gg a$ (voir dessin). Le fil en cuivre composant le cadre est un fil cylindrique de rayon $r_0 = 1 \text{ mm}$.

Indication : $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$.



- (a) Calculer la résistance totale R de l'antenne en considérant uniquement les deux longs bouts de fil du cadre (donc en négligeant les bouts de largeur a) connectés en série. Montrer qu'elle est proportionnelle à la longueur l de l'antenne, $R = \alpha l$ et déterminer la valeur de la constante α .

En négligeant les côtés du rectangle de longueur a , il suffit de considérer les côtés de longueur l . Chacun d'eux a une résistance de $R_l = \rho_{\text{cuivre}} l / \pi r^2$. Les deux côtés sont connectés en série, ce qui signifie que la résistance totale de la boucle est $2R_l$. En utilisant la forme $R = \alpha l$ et en remplaçant les valeurs numériques, nous obtenons :

$$R = \frac{2\rho_{\text{cuivre}} l}{\pi r^2} = \alpha l; \quad (53)$$

$$\alpha = 2 \frac{1.7 \times 10^{-8}}{\pi 10^{-6}} = 1.08 \times 10^{-2} \Omega/\text{m}. \quad (54)$$

- (b) Calculer la capacité C de l'antenne en considérant les deux longs bouts de fil du cadre comme les deux conducteurs d'un condensateur (donc en négligeant les bouts de largeur a). Montrer qu'elle est proportionnelle à la longueur l de l'antenne, $C = \beta l$ et déterminer la valeur de la constante β .

Pour déterminer la capacité entre les côtés longs du rectangle, nous devons d'abord obtenir le champ électrique généré par chacun d'eux lorsqu'il est chargé d'une certaine charge q . En supposant que les fils soient suffisamment longs pour négliger le champ à leurs extrémités, nous pouvons utiliser la loi de Gauss pour trouver le champ produit par un seul fil (en considérant un cylindre de rayon x autour de lui) :

$$2\pi x l E = \frac{q}{\epsilon_0}; \quad (55)$$

$$E = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 x l}. \quad (56)$$

La chute correspondante du potentiel entre les fils est alors obtenue en intégrant ce champ :

$$\Delta V = \int_r^{a-r} E dx = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 l} \ln\left(\frac{a-r}{r}\right). \quad (57)$$

En prenant en compte le fait que chaque côté long produit son propre champ, la chute de tension totale est doublée. Finalement, nous pouvons écrire l'expression finale de la capacité.

$$C = \frac{q}{2\Delta V} = \frac{\pi \epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{a-r}{r}\right)} = \beta l; \quad (58)$$

$$\beta = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{a-r}{r}\right)} = \frac{8.854 \times 10^{-12} \pi}{\ln\left(\frac{10^{-2} - 10^{-3}}{10^{-3}}\right)} = 1.3 \times 10^{-11} \text{ F/m}; \quad (59)$$

- (c) Calculer l'auto-inductance L de l'antenne en considérant un courant qui circule dans le cadre et en évaluant le flux magnétique à travers le cadre. Montrer qu'elle est proportionnelle à la longueur l de l'antenne, $L = \gamma l$ et déterminer la constante γ .

Pour déterminer l'auto-inductance du cadre, nous devons supposer qu'il transporte le courant I et trouver le flux magnétique généré par le cadre à travers lui. Pour ce faire, nous pouvons à nouveau négliger les côtés courts du rectangle et supposer que les côtés longs sont suffisamment longs pour que nous puissions utiliser la loi d'Ampère en considérant un cercle de rayon x autour du fil du côté long. En effet par symétrie cylindrique le champ \vec{B} créé par un courant circulant dans ce fil est invariant en θ et z (avec z la coordonnée le long du fil) et il est orienté selon \vec{e}_θ , donc $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$. Ainsi, en appliquant le théorème d'Ampère sur un cercle C de rayon r autour du fil on a :

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\theta=0}^{2\pi} B(r)r d\theta = \mu_0 I_{int} \quad (60)$$

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I; \quad (61)$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}; \quad (62)$$

Le flux total de ce champ à travers le cadre est obtenu en intégrant cette valeur sur l'aire du rectangle :

$$\Phi_B = \iint_{S_{cadre}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_r^{a-r} \int_{z=0}^l B(r)\vec{e}_\theta \cdot dr dz \vec{e}_\theta \quad (63)$$

$$= l \int_r^{a-r} B dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\left(\frac{a-r}{r}\right); \quad (64)$$

Une fois encore, le flux total est doublé car chaque côté du rectangle produit un champ magnétique indépendant. Maintenant que nous avons trouvé le flux magnétique, nous pouvons enfin trouver l'auto-inductance :

$$L = \frac{2\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln\left(\frac{a-r}{r}\right) = \gamma l; \quad (65)$$

$$\gamma = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{a-r}{r}\right) = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{\pi} \ln\left(\frac{10^{-2} - 10^{-3}}{10^{-3}}\right) = 8.8 \times 10^{-7} \text{H/m} \quad (66)$$

- (d) À l'un des bouts de l'antenne on connecte une source de tension AC avec une certaine fréquence angulaire ω . On néglige la résistance de l'antenne et on modélise le système comme un circuit LC avec une source de tension, un condensateur et une bobine connectés tous en parallèle. Calculer l'impédance équivalente du système. Exprimer la fréquence angulaire de résonance ω_0 de ce système en fonction de l .

Sachant que l'impédance de la capacité $Z_C = 1/i\omega C$ et que l'impédance de l'inductance est $Z_L = i\omega L$, nous pouvons écrire l'impédance totale du système comme :

$$Z = \frac{Z_C Z_L}{Z_C + Z_L} = \frac{\frac{L}{C}}{\frac{1}{i\omega C} + i\omega L} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC} = \frac{i\omega \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln\left(\frac{a-r}{r}\right)}{1 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 l^2}; \quad (67)$$

La fréquence de résonance est donc :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 l}} = \frac{c}{l}. \quad (68)$$

- (e) On ajuste la fréquence angulaire de la source AC à $\omega = \omega_0$. Quelle doit être la longueur l de l'antenne pour que l'onde émise soit une onde radio de fréquence $f = 80$ MHz ?

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{c}{2\pi l}; \quad (69)$$

La longueur de l'antenne doit donc être de :

$$l = \frac{c}{2\pi f} = \frac{3 \times 10^8}{2\pi \cdot 80 \times 10^6} = 0.6 \text{ m}. \quad (70)$$

- (f) On suppose que l'antenne produit une onde radio de fréquence $f = 80$ MHz et qui se propage dans l'air (considéré comme le vide). On place un bout de fil droit de longueur $d = 1$ m à une certaine distance $D \gg d$ de l'antenne et aligné avec la direction de propagation de l'onde. À cette distance D , l'amplitude du champ électrique de l'onde est de 5 V/m et on considère l'onde comme une onde plane sinusoïdale. On suppose que le bout de fil est traversé par un courant constant $i = 10$ A. Calculer l'expression de la force totale sur le fil en fonction du temps et donner sa valeur maximale.

Indication : on rappelle la formule trigonométrique $\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin(a) \sin(b)$.

Le champ magnétique de l'onde est perpendiculaire à sa direction de propagation et par conséquent, au fil. Ainsi, nous pouvons écrire la force agissant sur un morceau de fil :

$$dF = iBdx = iB_0 \sin(kx - \omega t) dx = iB_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi ft\right) dx; \quad (71)$$

Ici $\lambda = c/f$ est la longueur d'onde de l'onde. En prenant en compte le fait que pour les ondes électromagnétiques les amplitudes des champs sont connectées comme $B_0 = E_0/c$, et en intégrant sur le fil :

$$F = i \int_0^d B_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi ft\right) dx = -i \frac{E_0}{c} \frac{\lambda}{2\pi} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}d - \omega t\right) - \cos(-\omega t) \right] \quad (72)$$

$$= -\frac{iE_0}{\omega} \left[\cos\left(\omega t - \frac{2\pi d}{\lambda}\right) - \cos(\omega t) \right] \quad (73)$$

$$= -\frac{iE_0}{\omega} \left[\cos\left(\omega t - \frac{\pi d}{\lambda} - \frac{\pi d}{\lambda}\right) - \cos\left(\omega t - \frac{\pi d}{\lambda} + \frac{\pi d}{\lambda}\right) \right] \quad (74)$$

$$= -\frac{2iE_0}{\omega} \sin\left(\frac{\pi d}{\lambda}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\pi d}{\lambda}\right) \quad (75)$$

$$(76)$$

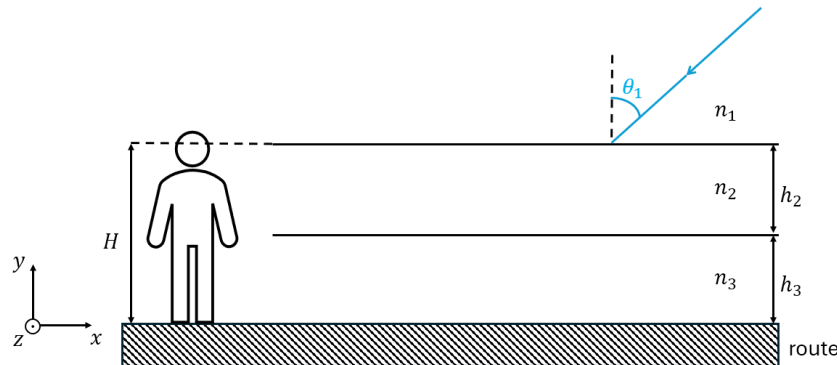
L'amplitude de la force est donc :

$$F_{max} = 2i \frac{E_0}{\omega} \sin\left(\frac{\pi}{\lambda}d\right) = 1.5 \times 10^{-7} \text{ N}. \quad (77)$$

4 Modélisation d'un mirage (25 points)

On souhaite modéliser un mirage observé par une personne se trouvant sur une route. On considère un rayon de lumière bleue (voir dessin) de longueur d'onde $\lambda = 470 \text{ nm}$ traversant différentes couches de l'atmosphère sans perdre d'intensité. Pour simplifier on considère trois couches avec indices de réfraction $n_1 = 1.02$, $n_2 = 1.01$ et $n_3 = 1.0001$. On suppose que le rayon se trouve dans la couche supérieure d'indice n_1 et arrive à l'interface avec la couche du milieu d'indice n_2 avec un angle $\theta_1 = 80^\circ$ par rapport à la normale à l'interface. Le rayon arrive finalement sur les yeux de la personne (à une hauteur $H = 2 \text{ m}$) avec une intensité de 500 W/m^2 . Les couches inférieures ont des épaisseurs h_2 et h_3 telles que $h_2 + h_3 = H$.

Indication : $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$.



- (a) Calculer les angles décrivant la déviation du rayon à chaque interface et dessiner la trajectoire du rayon.

À l'interface entre les couches 1 et 2, l'angle de réfraction θ_2 est donné par la relation

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2, \quad (78)$$

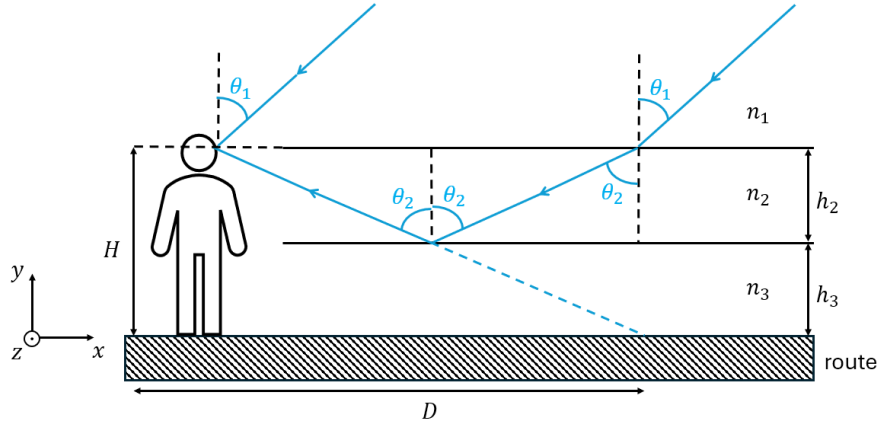
et on en déduit

$$\theta_2 = \sin^{-1} \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \right) = 84.02^\circ. \quad (79)$$

À l'interface entre les couches 2 et 3, l'angle d'incidence du rayon par rapport à la normale est θ_2 . On remarque que $\theta_2 > \theta_c$, avec

$$\theta_c = \sin^{-1} \frac{n_3}{n_2} = 81.97^\circ \quad (80)$$

l'angle critique pour la réfraction. Ainsi, il y a réflexion totale du rayon à l'interface entre les couches 2 et 3 avec un angle θ_2 par rapport à la normale. Le trajet du rayon lumineux est représenté sur la figure suivante.



- (b) Que vaut la distance entre la personne observant ce rayon lumineux et la position apparente du mirage (c'est à dire l'origine apparente du rayon) sur la route ?

La distance D entre l'observateur et l'origine apparent du rayon sur la route est obtenue en prolongeant le rayon lumineux arrivant sur les yeux de l'observateur. Le rayon est incliné d'un angle $90^\circ - \theta_2$ par rapport à la route et arrive au niveau des yeux de la personne à une hauteur H . On en déduit la relation

$$\tan(\pi/2 - \theta_2) = \frac{H}{D}, \quad (81)$$

ce qui permet d'exprimer

$$D = H / \tan(\pi/2 - \theta_2) = 19.1 \text{ m}. \quad (82)$$

- (c) Que vaut l'amplitude du champ électrique et magnétique et à quelle fréquence oscillent les champs ?

L'intensité \bar{S} du rayon lumineux, définie comme la moyenne temporelle du vecteur de Poynting S sur une période, est donnée par

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2, \quad (83)$$

avec E_0 l'amplitude du champ électrique. On peut ainsi exprimer les amplitudes des champs électrique et magnétique,

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\bar{S}}{\varepsilon_0 c}} \quad (84)$$

et

$$B_0 = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\bar{S}}{\varepsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2\mu_0 \bar{S}}{c}}, \quad (85)$$

respectivement. L'application numérique donne $E_0 = 613.7 \text{ V/m}$ et $B_0 = 2.05 \times 10^{-6} \text{ T}$. La fréquence d'oscillation de ces champs est obtenue avec la relation $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{470 \times 10^{-9}} = 638 \text{ THz}$.

- (d) Est-ce que la lumière est polarisée en arrivant sur la personne ? Si oui, quelle est la direction du champ électrique et pourquoi ?

La lumière parvenant à l'observateur est polarisée. Cette polarisation est due à la réflexion du rayon à l'interface entre les couches 2 et 3. La lumière est polarisée dans le plan parallèle à l'interface, c'est-à-dire le plan xz . La direction du champ électrique est perpendiculaire à

la direction de propagation et dans le plan parallèle à l'interface, donc le champ électrique est selon la direction z .

- (e) Quelle est la force exercée par l'onde sur les yeux de la personne si ceux-ci ont une surface de 2 cm^2 ? On suppose que la lumière est parfaitement absorbée et que le rayon arrive perpendiculairement à la surface des yeux.

La force due à la pression de radiation qui s'exerce sur les yeux de l'observateur dans le cas d'une absorption parfaite est donnée par

$$F_{rad} = p_{rad}A, \quad (86)$$

avec $p_{rad} = \bar{S}/c$ la pression de radiation et A la surface des yeux. L'application numérique donne $F_{rad} = 3.34 \times 10^{-10} \text{ N}$.

- (f) On considère un deuxième rayon de même longueur d'onde et d'angle d'incidence θ_1 arrivant depuis le haut directement sur les yeux de la personne. Trouver une expression des valeurs possibles de l'épaisseur h_2 de la couche 2 pour qu'il y ait, en tout temps, une interférence destructive avec l'autre rayon à la position des yeux. On supposera que les deux rayons sont initialement en phase lorsqu'ils atteignent $y = H$ depuis le haut, et que lors d'une réflexion la phase de l'onde augmente de π .

La différence de trajet entre le rayon réfléchi et le rayon arrivant directement dans les yeux est

$$\Delta L = \frac{2h_2}{\cos \theta_2}. \quad (87)$$

La différence de phase totale entre les 2 rayons, en prenant en compte l'augmentation de phase π liée à la réflexion est

$$\Delta\phi = k\Delta L + \pi = \frac{2kh_2}{\cos \theta_2} + \pi, \quad (88)$$

avec $k = 2\pi/\lambda_2$ le vecteur d'onde. L'onde se propage dans le milieu d'indice $n_2 > 1$, sa longueur d'onde est par conséquent modifiée et vaut $\lambda_2 = \lambda/n_2 = 465 \text{ nm}$. La condition pour avoir une interférence destructive est $\Delta\phi = (2p + 1)\pi$ avec p un entier. En imposant cette condition, on a

$$\frac{2kh_2}{\cos \theta_2} + \pi = (2p + 1)\pi. \quad (89)$$

On en déduit la condition pour l'épaisseur h_2 :

$$h_2 = \frac{p\pi \cos \theta_2}{k} = \frac{p\lambda \cos \theta_2}{2n_2}, \quad (90)$$

avec p un entier strictement positif.