Cours de physique générale III (SV) – Prof. Ambrogio Fasoli, Dr. Joaquim Loizu

Semestre Automne 2023 *25 janvier 2024*

Examen - Corrigé

Exercice 1 : Sphère pleine chargée

Une sphère pleine de rayon $R = 1$ m contient une charge négative $Q = -50$ mC, distribuée avec symétrie sphérique, mais non-uniformément selon la position radiale r (définie par rapport au centre de la sphère), avec une densité volumique de charge $\rho = \rho_0(1 - r/R)$.

a) Est-ce que le matériau de la sphère pleine peut être conducteur ? Pourquoi ?

b) Déterminer la valeur de la constante ρ_0.

c) Calculer le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de l'objet et le représenter graphiquement en fonction de r.

d) Déterminer la position radiale à laquelle l'amplitude du champ est maximale, et calculer la valeur de cette amplitude maximale.

e) Faire un dessin des lignes de champ à l'intérieur et à l'extérieur de l'objet.

f) Discuter qualitativement de l'effet qu'un fluide ayant une constante diélectrique de $K = 3$, présent à l'intérieur de la sphère, aurait sur le champ à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère pleine.

Corrigé

a) 2 points : bonne réponse (1pt) + explication (1pt)
Non, le matériau ne peut pas être conducteur car les charges ne peuvent pas se déplacer librement en surface dans cette configuration.

b) 4 points :
→ utilisation de la densité volumique pour trouver la valeur de dQ (1 pt)
→ intégrale volumique pour trouver la valeur totale de Q (2 pts)
→ bonne réponse (1 pt)
→ Si l'expression de dQ et la réponse ne sont pas correctes, mais l'utilisation de l'intégrale volumique (2pts).

La valeur de ρ_0 est obtenue d'après la relation $Q = \rho V$, où V représente le volume de la sphère.

La densité volumique dépend du rayon $\rho(r)$, et elle est intégrée sur le rayon pour obtenir sa valeur.

$$
\begin{aligned}
Q = \int_0^R dQ = \int_0^R \rho dV & \\
= \int_0^R \rho(4\pi r^2)dr & \quad (1)\\
= 4\pi\rho_0 \int_0^R \left(r^2 - \frac{r^3}{R}\right)dr & \quad (2)\\
= 4\pi\rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right]_0^R & \quad (3)\\
= \frac{\pi R^3}{3}\rho_0 = -50mC & \quad (4)
\end{aligned}
$$

Enfin, la constante ρ_0 est

$$\rho_0 \approx -47.7 \cdot 10^{-3}\text{C.m}^{-3} \quad (5)$$

c) (6 points)
→ Le champ E à l'intérieur de la sphère (2 pts)
→ Le champ E à l'extérieur de la sphère (2 pts)
→ le profil de champ E en fonction de r (2 pts)
→ Dans cette question c), si l'expression de la charge totale Q en b) est incorrecte, il n'est pas possible d'avoir la bonne réponse. Je donne 1 point pour chaque approche correcte, même si la réponse n'est pas bonne.
→ les reponses ne sont pas correces mais l'utilisation de la loi de Gausse (1pt)
Dans le cas d'une sphère où la densité volumique dépend uniquement du rayon $\rho(r)$, le champ électrique $E(r)$ est symétrique par rapport à l'angle et dépend uniquement du rayon r, ce qui permet l'application de la loi de Gauss. Cette loi est appliquée dans deux régions distinctes : (1) à l'intérieur de la sphère et (2) à l'extérieur de la sphère.

$$\int \vec{E} \cdot d\mathbf{S} = (4\pi r^2)\vec{E}(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (6)$$

$$(7)$$

Nous obtenons l'expression pour le champ électrique à une distance r du centre de la sphère :

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \quad (8)$$

A l'intérieur de la sphère $(r < R)$

La charge totale Q contenue dans une sphère de rayon r peut être écrite comme suit :

$$Q(r) = 4\pi\rho_0\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right) \quad (9)$$

Le champ électrique E à l'intérieur de la sphère $(r \leq R)$ est donné par :

$$E(r \leq R) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R}\right) \quad (10)$$

A l'extérieur de la sphère $(r < R)$
$\rightarrow$ l'expression avec la charge totale Q (1pt)
$\rightarrow$ l'expression en utilisant ρ_0 (2pts)
La charge totale Q à l'extérieur de la sphère $(r \geq R)$ est égale à la charge totale contenue dans toute la sphère.

$$Q = \frac{\pi R^3}{3}\rho_0 \tag{11}$$

Le champ électrique E à l'extérieur de la sphère $(r \geq R)$ est donné par :

$$E(r > R) = \frac{\rho_0}{12\epsilon_0}\frac{R^3}{r^2} \tag{12}$$

ou, plus simplement, en utilisant la charge totale Q_{tot}

$$E(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{13}$$

Profil radial du champ électrique $E(r)$
$\rightarrow$ le signe du profil (1pt)
$\rightarrow$ la position du champ où $dE/dr = 0$ avec $2R/3$ (1pt)
Le profil radial du champ électrique peut être visualisé en utilisant les expressions du champ électrique obtenues dans les questions précédentes. Et aussi, étant donné que le champ électrique E est continu, cela impose donc la condition que $E(r = R)$ doit être égal pour les deux expressions.

$$E(r = R) = \frac{R\rho_0}{12\epsilon_0} \tag{14}$$

Le profil radial qui satisfait ces conditions peut être représenté graphiquement comme suit :

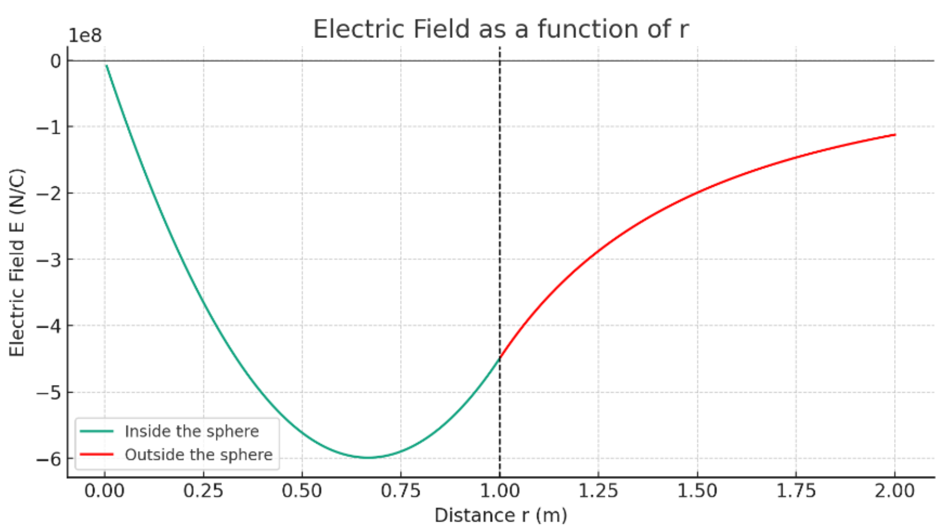


FIGURE 1 – Profile radial du champ E

d) 4 points :
$\rightarrow$ La dérivée radiale pour déterminer la position radiale où le champ est minimal $dE/dr =$ expressions
$\rightarrow$ Bonne position (2 pts) + la bonne amplitude (2 pts)

D'après la figure 1, nous pouvons déterminer la position où l'amplitude du champ électrique est maximale à l'intérieur de la sphère. Cette position peut être obtenue en calculant la dérivée du champ électrique par rapport au rayon, ce qui nous donne l'équation suivante :

$$\frac{dE(r)}{dr} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{r}{2R}\right) = 0 \tag{15}$$

En résolvant cette équation pour r, nous obtenons :

$$r = \frac{2R}{3} = \frac{2}{3} \tag{16}$$

Et en substituant cette valeur dans l'expression du champ électrique, nous trouvons :

$$E(r = \frac{2}{3}) = \frac{\rho_0}{9\epsilon_0} \tag{17}$$

e) 2 points : bonne présentation graphique des lignes de champ (direction et amplitude).
Si jamais la position du point maximal, $2R/3$, est trouvée dans la question précédente, il suffit de déterminer la bonne direction (2 pts).
D'après les expressions du champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère, la description approximative des lignes de champ électrique est la suivante :

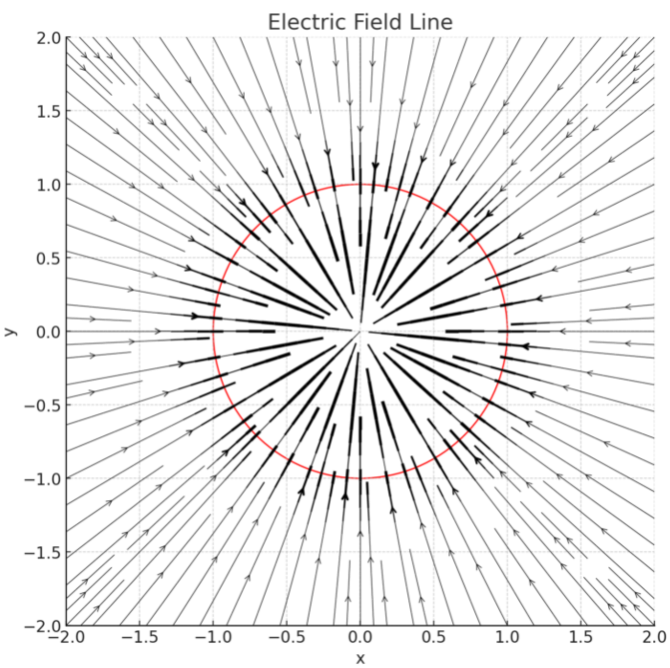


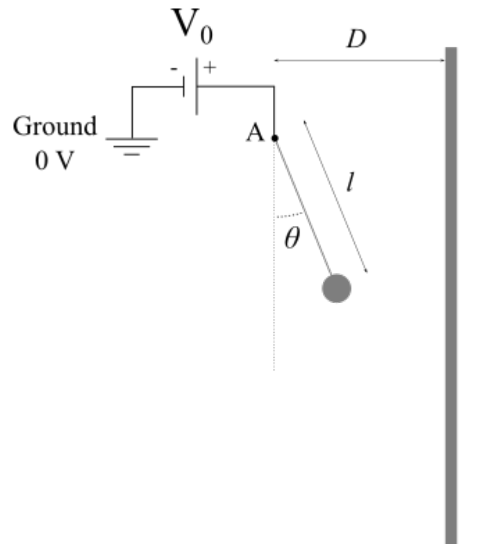
FIGURE 2 – Electric field lines in 2D

Les points importants sont les suivants :
(1) Les lignes de champ électrique sont dirigées vers le centre de la sphère.
(2) L'intensité du champ électrique peut être exprimée en fonction du nombre de lignes ou de l'épaisseur des lignes.

f) 2 points : explication correcte de l'effet diélectrique + réponse correcte concernant l'effet sur le champ intérieur et extérieur.

Le champ électrique est diminué d'un facteur 3 à l'intérieur de la sphère à cause du diélectrique. En revanche comme la charge de la sphère est inchangée, à l'extérieur de la sphère pleine le champ électrique n'est pas modifié.

Exercice 2 : Voltmètre mécanique



On souhaite mesurer la tension V_0 aux bornes d'une batterie. Pour cela on connecte la borne négative à la Terre, et la borne positive à un câble conducteur, de résistance et de capacité négligeables, au bout duquel est fixée une sphère conductrice pleine, de rayon $R = 1$ mm et masse $m = 20$ mg. La sphère peut bouger comme un pendule avec un seul degré de liberté, et on note θ l'angle entre le câble et la verticale. La longueur entre le point A de fixation du câble et le centre de la sphère est de $l = 8$ cm. À une distance $D = 5$ cm du point A on place verticalement une plaque carrée conductrice, de côté $L = 50$ cm, d'épaisseur $e = 4$ mm, et chargée avec une charge $Q = -3\ \mu$C.

On observe une position d'équilibre et on mesure l'angle θ. On néglige les effets d'induction électrique (donc la densité de charge de chaque objet est uniforme).

a) Où se trouve la charge dans la sphère et la plaque ?

b) Calculer la charge totale portée par la sphère en fonction du potentiel V_0.

c) Déterminer le champ électrique créé par la plaque aux alentours de la sphère. Quelle est la dépendance de ce champ par rapport à la distance à la plaque ?

d) Calculer le potentiel V_0 en fonction de l'angle d'équilibre θ. Application numérique : $\theta = 10°$.

e) On pousse la sphère jusqu'à ce que le câble conducteur soit à la verticale. Quel est le signe du travail de la force électrique sur la sphère ? Calculer sa valeur.

f) Calculer l'énergie dépensée par nous pour effectuer cette tâche.

Corrigé

a) 1 point

Comme la sphère pleine et la plaque sont conductrices, la charge se trouve en surface.

b) Potentiel d'une sphère (ou capacité d'une sphère + $C = Q/V$) : 1 point

Résultat : 1 point

$$V_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{18}$$

Donc : $q = 4\pi\varepsilon_0 R V_0$.

c) Justifier que le plan est infini OU Justification $\vec{E} = E(x)\vec{x}$: 1 point

Trouver $\sigma = Q/L^2$ OU Théorème de Gauss correctement utilisé : 1 point

Expression du champ avec orientation : 1 point

E ne dépend pas de la distance : 0.5 point

Valeur numérique (bonus) : 0.5 point

La sphère est à une distance de l'ordre de $D = 5$ cm du plan, qui a une longueur de $L = 50$ cm. Comme $L \gg D$ on peut considérer que du point de vue de la sphère le plan est infini.
Le champ est donc

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x} = -\frac{Q}{2L^2\varepsilon_0}\hat{x} \tag{19}$$

L'application numérique donne $|E| \approx 6.78 \cdot 10^5$ V/m.

d) Appliquer 2nd loi de Newton : 1 point
Expression correcte de P : 1 point
Expression correcte de T : 1 point
Expression correcte de F : 1 point
Projection pour supprimer T : 1 point
Expression finale correcte : 1 point
Application numérique : 0.5 point
On applique la deuxième loi de Newton à la petite sphère, qui est soumise à l'équilibre à son poids, à la force électrique, et à la tension du fil :

$$\vec{P} + \vec{F}_E + \vec{T} = 0 \tag{20}$$

$\vec{P} = -mg\hat{y}$
$\vec{T} = -T\sin\theta\hat{x} + T\cos\theta\hat{y}$
$\vec{F}_E = -\frac{qQ}{2L^2\varepsilon_0}\vec{x}$
En projetant selon $\hat{y}$ on en déduit l'expression de $T = mg/\cos\theta$, que l'on injecte dans l'équation projetée selon $\hat{x}$, pour en déduire :

$$V_0 = -\frac{mgL^2}{2\pi RQ}\tan\theta \simeq 458 \text{ V} \tag{21}$$

e) Justifier signe négatif : 1 point
Poser expression avec intégrale : 1 point
Expression de l'intégrand correcte : 1 point
Résultat : 1 point
Application numérique : 0.5 point
En notant θ_1 l'angle d'équilibre correspondant à la question précédente, le travail de la force électrique est donné par :

$$W_E = \int_{\theta_1}^{0} \vec{F}_E.\vec{dl} = \int_{\theta_1}^{0} \frac{-qQ}{2L^2\varepsilon_0} \cdot (-ld\theta\cos\theta) = -\frac{-qQl}{2L^2\varepsilon_0} \cdot \int_0^{\theta_1} d\theta\cos\theta = \frac{2\pi Rl\sin\theta}{L^2}QV_0 \tag{22}$$

$$= qEl\sin\theta \tag{23}$$

On trouve $W_E \simeq -3.0$ μJ.

f) Somme des travaux nulle : 1 point
Penser à inclure le poids : 1 point
Calcul du travail du poids : 1 point
Résultat final : 0.5 point
AN : 0.5 point

Aucune énergie n'est dissipée lors du mouvement, donc la somme du travail des forces en jeu est nul. Notez que la tension ne travaille pas car elle est orientée perpendidulairement au mouvement tout le long du déplacement. Donc :

$$W_F = -(W_E + W_P) \tag{24}$$

$$W_P = \int_{\theta_1}^{0} \vec{P}.\vec{dl} = mgl(1 - \cos\theta) \tag{25}$$

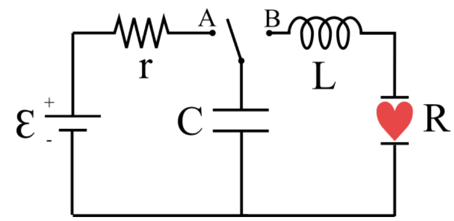
Finalement le travail dépensé par nous est :

$$W_F = -\frac{2\pi RL \sin\theta}{L^2} QV_0 - mgl(1 - \cos\theta) \tag{26}$$

L'application numérique donne $W_F \simeq 2.8\ \mu$J.

Exercice 3 : Défibrillateur

Un défibrillateur a pour principale fonction de délivrer un décharge électrique dans le coeur de la victime d'un arrêt cardio-respiratoire. Lorsqu'une décharge doit être réalisée, un condensateur est chargé par un premier circuit, puis déchargé via les électrodes thoraciques collées au coeur. Les premiers défibrillateurs fonctionnaient avec une simple décharge RLC. On considère un tel défibrillateur, représenté par le circuit suivant, avec $r = 20$ kΩ, $C = 85$ μF, $L = 600$ mH. On considère une résistance du coeur de $R = 75$ Ω. La tension ε est fixée à 2500 V pendant le temps de charge.



a) On place l'interrupteur en position A. Quel est le temps caractéristique τ associé à la charge du condensateur ? Ce temps est-il raisonable pour un défibrillateur ?

b) Quelle est l'énergie qui a été dissipée dans le circuit au temps t $= \tau/2$?

Pour être efficace la décharge doit être au moins de quelques kiloWatts, mais elle ne doit pas durer plus de quelques dizaines de millisecondes afin de dissiper rapidement la chaleur et limiter les risques de brûlures.

c) L'énergie stockée dans le condensateur, une fois chargé, est-elle suffisante pour un défibrillateur ?

d) On place l'interrupteur en position B. Établir l'équation différentielle vérifée par le courant $i(t)$ circulant dans le coeur.

e) Le courant se décharge selon la forme $i(t) = i_0 e^{-t/\tau} \sin(\omega t)$, avec $\tau = \frac{2L}{R}$ et $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$. Combien de périodes le signal va-t-il effectuer avant que son amplitude soit amortie de 80% ? Tracer la forme de $i(t)$.

Corrigé

a) 3 pt
$\tau = rC$: 1 point
A.N. : 1 point
Argument pour temps raisonnable : 1 point
On a $\tau = rC = 1.7$ s. Oui ce temps est suffisamment court pour l'utilisation d'un défibrillateur.

b) 7 pt
$E = \int P dt$: 1 point
$P = iV_r$: 1 point
$V_r = \varepsilon e^{-t/rC}$: 2 points
$i = V_r/r$: 1 point
Evaluation de l'integrale : 1 point
A.N. : 1 point
La tension aux bornes du condensateur lors de la charge est donnée par $V_C(t) = \varepsilon(1 - e^{-t/\tau})$. La tension aux bornes de la résistance est donc $V_r = \varepsilon - V_C = \varepsilon e^{-t/\tau}$.

L'énergie dissipée par la résistance jusqu'au temps $t = \tau/2$ est donc donnée par :

$$E_r(\tau/2) = \int_0^{\tau/2} P_r\, dt = \int_0^{\tau/2} \frac{V_r^2}{r} dt = \frac{\varepsilon^2}{r}\left[-\frac{\tau}{2}e^{-2t/\tau}\right]_0^{\tau/2} = \frac{C\varepsilon^2}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right) \tag{27}$$

L'application numérique donne $E_r(\tau/2) \simeq 167.9$ J.

c) 3 pt
$E = CV^2/2$: 1 point
A.N. : 1 point
Argument pour puissance suffisante : 1 point
$E_C = \frac{1}{2}C\varepsilon^2 \simeq 266$ J.

Si cette énergie est déchargée sur disons 50 ms, cela donne une puissance de 5 kW. Si le temps est plus court, la puissance est plus élevée. Donc oui cette énergie est suffisante pour une puissance de quelques kiloWatts.

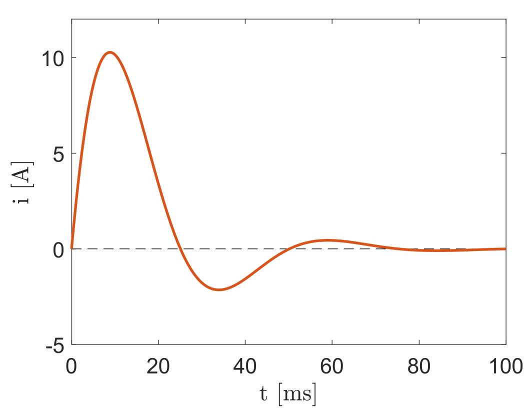
d) 2 pt
Termes correctes : 1 point
Signes correctes : 1 point
On applique la loi de mailles :

$$-\frac{q}{C} - Ri - L\frac{di}{dt} = 0 \tag{28}$$

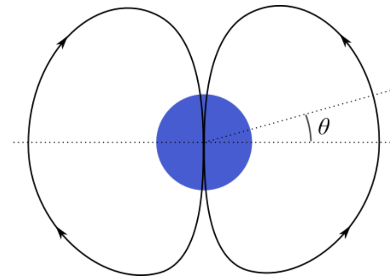
Comme $i = dq/dt$, en dérivant on obtient :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0 \tag{29}$$

e) 5 pt
$T = 2\pi/\omega$: 1 point
$e^{-t_1/\tau} = 0.2$: 1 point
$t_1 = -\tau \ln 0.2$: 1 point
A.N. pour le nombre de periodes : 1 point
Graphe : 1 point
La période des oscillations est donnée par $T = 2\pi/\omega = 50.1$ ms. Et le temps t_1 auquel le signal est amortie de 80 % est donné par : $e^{-t_1/\tau} = 0.2$. On trouve $t_1 = -\tau \ln 0.2$, ce qui donne $t_1 = 25.8$ ms.
Donc le signal aura le temps d'effectuer une demi-oscillation (positive puisqu'il s'agit s'une sinusoïde, avant d'être atténué de 80 %.



Exercice 4 : Mesure du champ magnétique terrestre en altitude



Les lignes de champ magnétique terrestre vont du Sud géographique ($\theta = -\pi/2$) au Nord géographique ($\theta = +\pi/2$), comme illustré dans la figure. On suppose que le long d'une ligne de champ magnétique, l'amplitude du champ varie avec θ selon la forme $B(\theta) = B_0 + C\theta^2$, avec B_0 le minimum de B à l'équateur ($\theta = 0$) et C une constante.

Afin de mesurer B, on lance un satellite en orbite qui suit une ligne de champ à vitesse angulaire constante positive $\Omega = d\theta/dt = 2$ radiants/heure. Autour du satellite est déployé un cadre en cuivre ($\rho = 10^{-8}$ Ω.m, forme carrée de côté 10 m, diamètre du câble 10 cm). Un dispositif assure que la normale au cadre reste toujours orientée avec un angle $\beta = 80°$ par rapport à la direction du champ magnétique. On néglige l'auto-inductance du cadre.

a) Calculer la résistance électrique du cadre.

b) À $t = 0$, le satellite passe par l'équateur. Calculer la tension induite dans le cadre en fonction du temps pour $t > 0$.

c) On mesure un courant sur le cadre en fonction du temps $i(t) = \alpha\, t$ avec $\alpha = 50$ μA/sec. En déduire la constante C.

d) Pour obtenir B_0, on mesure le couple de force que le dispositif doit exercer pour maintenir l'orientation du cadre. Quand le satellite se trouve à une latitude $\theta = 20°$, on mesure un couple $\tau = 10$ μN. Calculer B_0.

Corrigé

a) Expression résistance : 1 point
Surface section droite : 1 point
Longeur fil : 0.5 point
AN : 0.5 point
On considère le cadre comme un fil. La résistance d'un fil est $R = \frac{\rho l}{A}$, où l est la longueur du fil et A est la'ire de sa section droite. Ici, le cadre a une résistivité de $\rho = 10^{-8}$ Ω.m, une longueur $l = 4 \times 10$ m, et une section droite d'aire $A = \pi(\frac{d}{2})^2$. Ainsi :

$$R = \frac{\rho L}{\pi(d/2)^2} = \frac{10^{-8} \times 40}{\pi(5 \times 10^{-2})^2} \approx 5 \times 10^{-5}\,\Omega \tag{30}$$

b) Definition tension induite : 2 point
Definition du flux magnétique : 2 points
Changement d'unité (dans cette question ou les suivantes) : 1 point
Angle en fonction du temps : 1 point
Champ magnétique en fonction du temps : 1 point
Expression finale de la tension induite : 1 point
La tension induite dans le cadre est $\varepsilon = -\frac{d\phi_B^S}{dt}$, où ϕ_B^S est le flux magnétique à travers le cadre.

Le flux magnétique est $\phi_B^S = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$. La surface du cadre étant petite par rapport à l'échelle de variation de B, on peut considérer le champ magnétique comme constant sur la surface. Ainsi, $\phi_B^S = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\cos(\beta)$. $B = B(\theta)$ est une fonction de l'angle du satellite par rapport à l'équateur. La postion du satellite évoluant en fonction du temps, on peut exprimer le champ magnétique auquel est soumis le cadre en fonction du temps. $B(t) = B(\theta(t)) = B_0 + C\theta(t)^2$.
Il nous faut trouver maintenant l'expression de $\theta(t)$. On sait que $\frac{d\theta}{dt} = \Omega = 2$ radiants/heure. In SI unit, $\frac{d\theta}{dt} = \Omega = 5.6\times10^{-4}$ radiants/seconde. Par intégration et $\theta_0 = 0$ la position initiale du satellite, $\theta(t) = \theta_0 + \Omega t = \Omega_{SI}t$.
On insère dans l'expression du champ magnétique : $B(t) = B(\theta(t)) = B_0 + C(\Omega t)^2$. Puis dans l'expression du flux magnétique : $\phi_B^S(t) = (B_0 + C(\Omega t)^2)S\cos(\beta)$. Enfin, en dérivant, on obtient le résultat demandé :

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\phi_S^B(t)}{dt} = -\cos(\beta)SC2\Omega_{SI}^2 t \tag{31}$$

Où $S = L^2$ est la surface du cadre et t en secondes.

c) Courant en fonction du temps : 0.5 point
Constante : 1 point
AN : 0.5 point
Le courant mesuré est $i(t) = \alpha t$. Il dépend de la tension induite et de la résistance du cadre comme $i(t) = |\varepsilon(t)|/R$. Ainsi avec le résultat de la question précédente :

$$\alpha t = \frac{\cos(\beta)SC2\Omega^2 t}{R} \tag{32}$$

On déduit :

$$C = \frac{\alpha R}{2S\cos(\beta)\Omega^2} \approx 2.4\times10^{-4}\,\mathrm{T} \tag{33}$$

d) Definition du couple magnétique : 2 points
Expression du couple magnétique avec sinus : 1 point
temps de la mesure ou courant au moment de la mesure : 2 point
B0 expression finale : 1 point
AN : 1 point
Le couple magnétique subit par le cadre à compenser est $\tau = \vec{\mu}\times\vec{B}$, avec $\vec{\mu}$ le moment magnétique du cadre. En orientant la surface du carré vers le haut, le courant allant dans le sens des aiguilles d'une montre :

$$\vec{\mu} = -i\vec{S} \tag{34}$$

Donc, en notant $\hat{x}$ le vecteur unitaire pointant hors de la page vers nous :

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B} = -iSB\sin(\beta)\hat{x} \tag{35}$$

En insérant l'expression de B, on en déduit :

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B} = -i_0 S(B_0 + C\theta_0^2)\sin(\beta)\hat{x} \tag{36}$$

Pour trouver la valeur du courant dans le cadre quand $\theta = \theta_0$, il nous faut trouver le temps correspondant. Comme $\theta = \Omega t$, on trouve $t_0 = \theta_0/\Omega$ et $i(t_0) = \alpha\theta_0/\Omega$. On en déduit, en isolant B_0 :

$$B_0 = \frac{|\tau|\Omega}{\alpha\theta_0 S\sin\beta} - C\theta_0^2 \approx -23\,\mu\mathrm{T} \tag{37}$$

Avec $\theta_0 \approx 0.35$ rad.

Exercice 5 : Lévitation par laser

Un faisceau laser d'une puissance $P = 100$ W, de longueur d'onde $l = 630$ nm et diamètre $d = 5$ mm est envoyé en direction verticale vers le haut depuis l'EPFL. On considère le faisceau laser comme collimaté, c'est-à-dire un ensemble de rayons parallèles sans divergence, et que la propagation dans l'air est identique à celle dans le vide. Une petite bille, ayant une surface parfaitement absorbante pour la lumière, est entièrement immergée dans le faisceau. Le matériau de la bille a une densité de 1.2 g/cm^3. Le champ électrique de l'onde du laser a l'expression suivante : $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x}$, où z est la direction verticale.

a) Calculer l'expression analytique du champ $\vec{B}$ en fonction de z et t, son orientation et son amplitude.

b) Déterminer les valeurs de E_0, du nombre d'onde k et de la fréquence angulaire ω.

c) Calculer la valeur du diamètre que la bille doit avoir pour rester suspendue dans le faisceau laser grâce à la pression de radiation.

d) Si à la place d'un faisceau laser collimaté, on avait une source ponctuelle, de même puissance, et que l'on plaçait la bille à une altitude de 20 m par rapport à la source, est-ce que l'on trouverait une valeur du rayon pour la suspendre ? Motiver la réponse.

Corrigé

a) 5 pts.
Writing necessary part of Maxwell's equation : 2 pts.
finding direction of B_y : 1 pt
correct expression for B_y : 2 pts.
The connection between electric and magnetic field is given one of the following equations :

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \tag{38}$$

or

$$\mathrm{rot}\vec{B} = 0 + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \tag{39}$$

Considering the first one :

$$0 = -\frac{\partial B_x}{\partial t}; \tag{40}$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}; \tag{41}$$
$$0 = -\frac{\partial B_z}{\partial t}; \tag{42}$$

Substituting a cosine dependence for E and B :

$$-kE_0 \sin(kz - \omega t) = -\omega B_0 \sin(kz - \omega t); \tag{43}$$

Resulting in :

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega}E_0 cos(kz - \omega t)\vec{e_y} = \frac{E_0}{c}cos(kz - \omega t)\vec{e_y}; \tag{44}$$

b) 6 pts.
getting k and ω : 1 pt each
realising energy flux is needed : 1 pt.
correct answer 2 pts.
correct numbers 1 pt.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \approx 1 \cdot 10^7 \text{m}^{-1}; \tag{45}$$

$$\omega = ck = \frac{2\pi c}{\lambda} \approx 3 \cdot 10^{15}\text{Hz}; \tag{46}$$

To find E_0, we need to consider the density of energy flux. We can use the expression for Poynting vector :

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}; \tag{47}$$

Averaging it over the wave period :

$$< \vec{S} >= \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}\vec{e_z} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0}\vec{e_z}; \tag{48}$$

At the same time the total power produced by a laser is a sum over its beam :

$$P = \pi d^2 < S > /4; \tag{49}$$

This allows us to write the final expression for E_0 :

$$E_0 = \sqrt{2\mu_0 c \frac{4P}{\pi d^2}} = \sqrt{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{4 \cdot 100}{\pi \cdot 25 \cdot 10^{-6}}} \approx 6 \cdot 10^4 \text{V/m}; \tag{50}$$

c) 6 pts.
Equating light pressure to gravity : 1 pt.
Knowing/deriving light pressure correctly : 2 pts.
Finding correct expression : 2 pts.
correct numbers : 1 pt.
Ball is suspended by a balance of gravity and light pressure :

$$mg = F_{light} = P_{light} \cdot A; \tag{51}$$

Light pressure for a source is expressed through the Poynting vector :

$$P_{light} = \frac{< S >}{c}; \tag{52}$$

Since the ball is perfectly absorbing, its area is effectively a circle of radius d in the plane perpendicular to the beam. Additionally the ball's mass can be expressed through its density.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = \pi r^2 \frac{< S >}{c} = r^2 \frac{4P}{d^2 c}; \tag{53}$$

$$r = 3\frac{P}{d^2 c \rho g} = 3\frac{100}{\pi cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1200 \cdot 9.8} \approx 1 \cdot 10^{-6}\text{m}; \tag{54}$$

d) 3 pts.
Realising the field is a lot smaller : 2 pts.
Finding correct answer : 1 pts.
Due to the light being a point source the light pressure is a lot smaller since the same power is dispersed on a larger area. As a result Eq. 53 will now take a form :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = r^2 \frac{P}{4h^2 c}; \tag{55}$$

$$r = \frac{3}{4}\frac{P}{4\pi h^2 c \rho g} = \frac{3}{4}\frac{100}{4\pi cdot 20^2 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1200 \cdot 9.8} \approx 10^{-15}\text{m}; \tag{56}$$

This value is smaller than a size of a molecule meaning it's impossible to balance a real ball this way.