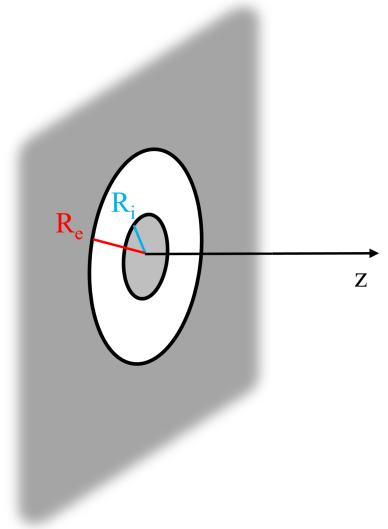


Corrigé Test à mi-semestre

Exercice 1 (25 points)

Un plan infini est chargé uniformément avec une densité de charge $\sigma = 10^{-5}$ C/m². Le plan contient un trou qui a la forme d'un anneau circulaire de rayon interne $R_i = 1$ cm et de rayon externe $R_e = 2$ cm.



- a) Calculez le champ électrique en tout point de l'axe perpendiculaire au plan (parallèle à \hat{z}) et passant par le centre de l'anneau, pour $z > 0$. On définit $z = 0$ comme le centre de l'anneau. Montrez que le champ suit l'expression :

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{R_e^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_i^2 + z^2}} \right)$$

- b) Que vaut ce champ en $z = 0$, et en $z \rightarrow \infty$? Comparez au cas sans trou.

Deux charges (de taille négligeable) sont placées sur l'axe z : d'abord la charge $q_1 = 2 \cdot 10^{-7}$ C est placée et tenue fixe en $z_1 = 10$ cm, et ensuite la charge $q_2 = 1 \cdot 10^{-7}$ C est placée en $z_2 = 5$ cm et peut bouger librement.

- c) Calculez la force totale qui agit sur q_2 . Dans quel sens q_2 se déplacera-t-elle? Est-ce que le sens aurait été différent si la valeur de q_2 était 10 fois plus élevée?
- d) On considère le système formé par le plan (avec le trou) et la charge q_1 toujours fixe en z_1 (la charge q_2 est enlevée du problème). Calculez l'expression de la variation du potentiel électrique entre les positions z_i et z_f , avec $z_1 < z_i < z_f$.

Indications : $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m

- On définit l'élément de surface d'un anneau circulaire comme : $dS = r dr d\phi$ (ϕ l'angle du tour du cercle).
- On donne les primitives suivantes :

$$\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \quad \text{et} \quad \int \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}} dx = (x^2 + a^2)^{1/2}$$

Corrigé

- a) (8 pts) Pour trouver la norme du champ électrique total, nous pouvons exploiter le principe de superposition en décomposant le système en deux distributions de charge : un plan infini avec une densité de charge surfacique σ et un anneau de rayon interne $R_i = 1$ cm et de rayon externe $R_e = 2$ cm, avec une densité de charge $-\sigma$. Le champ électrique sur l'axe \hat{z} sera la somme des champs électriques générés par ces deux distributions.

Le champ créé par un plan infini a été calculé au cours et pendant les séries comme $E_{plan} = \sigma/2\epsilon_0$ en appliquant la loi de Gauss.

Pour le champ créé par un disque uniformément chargé, appliquer la loi de Gauss n'est pas une bonne idée. En effet, si on essaie de prendre des surfaces de Gauss cylindriques ou sphériques, le champ ne serait pas parallèle ou perpendiculaire à la surface en tout point, et donc le calcul de $\int \vec{E} \cdot d\vec{A}$ deviendrait extrêmement compliqué : autrement dit, le champ créé par le disque n'est pas assez symétrique. On va donc "découper" l'anneau en petits éléments infinitésimaux de charge dq et on considère que chaque élément produit le champ électrique $dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 d^2}$ d'une charge ponctuelle. En sommant (intégrant) la contribution de chaque élément, on retrouve le champ total créé par l'anneau.

Comme on peut voir sur la figure, la distance entre un élément dq de l'anneau et le point z sur l'axe est

$$d(r, z) = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (1)$$

De plus, si on considère les contributions de tous les éléments sur un anneau, on voit que la somme des champs s'annule dans la direction radiale, et seul la composante selon z du champ électrique total sera non-nulle (ceci n'est valable que sur l'axe z , mais pas ailleurs). On calcule donc seulement la composante dE_z de chaque élément. En projetant sur l'axe z , on a

$$dE_z = dE \cos\alpha \quad (2)$$

avec $\cos\alpha = z/d$.

On a donc l'expression suivante pour la somme des champs créés par les éléments dq :

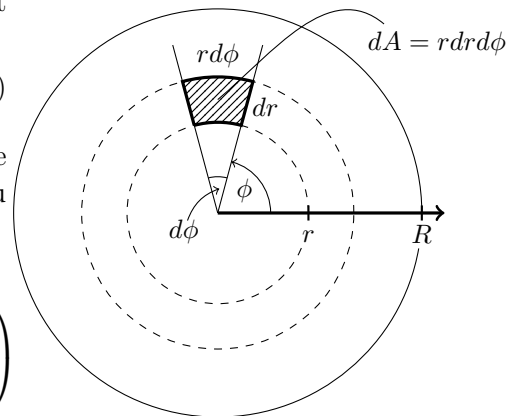
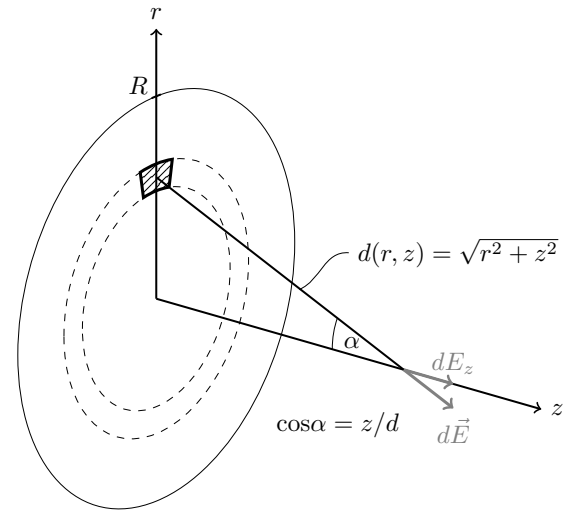
$$E_{disque}(z) = \int dE_z = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 d^2(r, z)} \cos\alpha = \int \frac{z dq}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3)$$

Il nous reste à exprimer l'élément de charge dq : puisque l'anneau est uniformément chargé, on a $dq = \sigma dA$ avec $dA = r dr d\phi$ un élément de surface infinitésimal sur l'anneau (voir figure). Pour considérer tous les éléments de l'anneau, on a r entre R_i et R_e , et ϕ entre 0 et 2π . On obtient donc :

$$E_{anneau}(z) = \int_{R_i}^{R_e} \int_0^{2\pi} \frac{-\sigma r z}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} dr d\phi \quad (4)$$

L'intégrale selon ϕ donne tout simplement un facteur 2π , et il nous reste l'intégrale selon r (qui correspond à la forme donnée en indication du problème) :

$$E_{anneau}(z) = -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_{R_i}^{R_e} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{R_e^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_i^2 + z^2}} \right) \quad (5)$$



On obtient donc finalement la norme du champ total du système en sommant le champ créé par le plan et le trou

avec la forme d'anneau :

$$E_{dis+ann}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{R_e^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_i^2 + z^2}} \right) \quad (6)$$

On voit que le champ électrique sera dirigé vers le sens positive de \hat{z} car $\sigma > 0$.

Veillez noter que on aurait pu trouver le même résultat avec la somme des champs générés par un disque ("Dis") de rayon externe R_i et densité de charge surfacique σ , et celui d'un anneaux ("Ann") de rayon interne R_e et rayon externe ∞ , avec densité de charge surfacique σ :

$$\begin{cases} E_{Dis}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R_i^2 + z^2}} \right) \\ E_{Ann}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{R_e^2 + z^2}} \right) \end{cases} \quad (7)$$

b) (5 pts) On évalue le résultat aux points spécifiés :

$$E_{dis+ann}(z=0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (8)$$

$$E_{dis+ann}(z \rightarrow \infty) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{R_e^2/z^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{R_i^2/z^2 + 1}} \right) \underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (9)$$

On retrouve l'expression du champ créé par le plan infini à la fois pour $z=0$ et pour $z \rightarrow \infty$. Dans le cas $z=0$, la contribution de l'anneau s'annule par symétrie. Lorsque $z \rightarrow \infty$, l'anneau devient invisible par rapport au plan infini.

L'application numérique donne comme résultat pour les deux cas $z=0$ et pour $z \rightarrow \infty$:

$$E_{dis+ann} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 5.6 \times 10^5 \text{ [V/m]} \quad (10)$$

c) (7 pts) La force qui agit sur q_2 sera donnée par la somme de la force due au champ généré par le plan (avec son trou), et celle due au champ généré par la charge q_1 . La force due au plan sera dans le sens positif de \hat{z} (car répulsion entre le plan et q_2) :

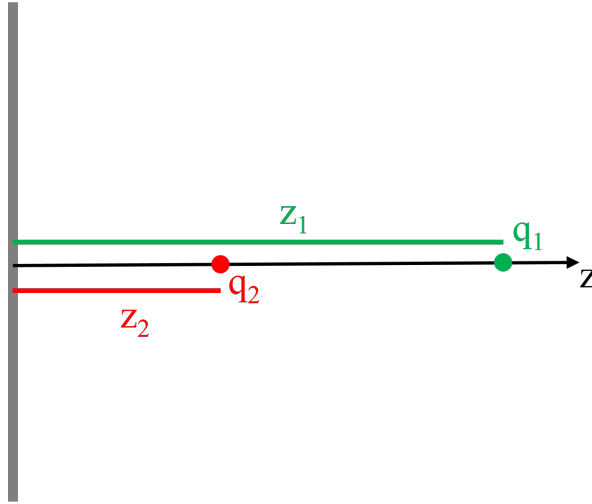
$$\vec{F}_{Plan \rightarrow q_2} = q_2 \vec{E}_{dis+ann}(z_2) = q_2 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 + \frac{z_2}{\sqrt{R_e^2 + z_2^2}} - \frac{z_2}{\sqrt{R_i^2 + z_2^2}} \right) \hat{z} \quad (11)$$

La force qui agit sur q_2 due à la charge q_1 sera dans le sens négatif de \hat{z} (car répulsion entre q_1 et q_2) :

$$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(z_2 - z_1)^2} \hat{z} \quad (12)$$

La force totale est donc :

$$\vec{F}_{tot, q_2} = \vec{F}_{Plan \rightarrow q_2} + \vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = 5.3 \cdot 10^{-2} \text{ N} - 7.2 \cdot 10^{-2} \text{ N} = -1.8 \cdot 10^{-2} \text{ N} \quad (13)$$



Plan
(vu de coté)

La charge q_2 se déplacera donc vers la direction négative des \hat{z} (donc vers le plan). On voit que le rapport entre les deux forces ne dépend pas de la charge q_2 , la direction sera donc la même quelle que soit la charge q_2 (dix fois plus élevée, ou même n'importe quelle valeur!).

d) (5 pts) La variation du potentiel électrique entre deux points est calculé comme :

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (14)$$

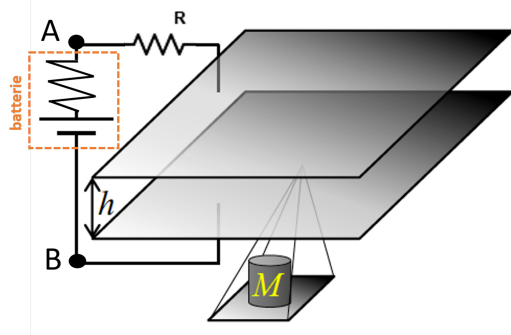
Entre z_i et z_f , les deux champs électriques ont la même direction (vers le sens positif de \hat{z}). Il faut donc calculer :

$$\Delta V = V_{z_f} - V_{z_i} = - \int_{z_i}^{z_f} \vec{E} \cdot d\vec{z} = - \int_{z_i}^{z_f} \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{R_e^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_i^2 + z^2}} \right) + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0(z - z_1)^2} \right] dz = \quad (15)$$

$$- \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[(z_f - z_i) + \left(\sqrt{R_e^2 + z_f^2} - \sqrt{R_e^2 + z_i^2} \right) - \left(\sqrt{R_i^2 + z_f^2} - \sqrt{R_i^2 + z_i^2} \right) \right] + \left[\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0(z_f - z_1)} - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0(z_i - z_1)} \right] \quad (16)$$

Exercice 2 (25 points)

Un condensateur à faces carrées planes et parallèles de surface $A = 40 \text{ cm}^2$ et de masse négligeable a un petit poids de $M = 5 \text{ g}$ attaché sur sa face inférieure (voir figure). La face supérieure est attachée rigidement à un soutien mécanique. On connecte une résistance $R = 20 \Omega$ et une batterie de résistance interne $r = 1 \Omega$ en série avec le condensateur.



a) Calculez la capacité du condensateur si à l'équilibre la distance entre les plaques est de $h_a = 4 \text{ mm}$, avec de l'air entre les plaques.

b) Calculez la force électromotrice \mathcal{E} de la batterie pour que l'équilibre avec une distance entre les plaques de $h_a = 4 \text{ mm}$ soit maintenu, ainsi que la charge du condensateur dans ces conditions.

c) Si on remplit l'espace entre les deux faces avec un fluide de constante diélectrique $K_f = 4$, quelle sera la nouvelle valeur de h_f (avec la force électromotrice trouvée en (a), maintenue constante)? Calculez aussi la nouvelle capacité et la charge sur les deux faces.

On continue dans la configuration de la question (c) avec le fluide diélectrique. Maintenant la plaque inférieure aussi est fixe (h_f ne peut plus changer). Au moment t_0 la batterie (avec aussi sa résistance interne) est remplacée par une résistance $R_A = 10 \text{ k}\Omega$.

d) Combien de temps passe à partir de t_0 avant qu'un courant de $i_{min} = 20 \text{ mA}$ ne circule dans le circuit? Quelle puissance a été dissipée dans le circuit jusqu'à ce moment-là?

Indications :

- $g = 9.81 \text{ m/s}^2$;
- $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$.
- $\sqrt{A} \gg h_{a,f}$

Corrigé

a) (2 pts) La capacité dans ces conditions est :

$$C = \frac{\varepsilon_0 K_a A}{h} = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \times 1 \times 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2}{4 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \simeq 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \quad (17)$$

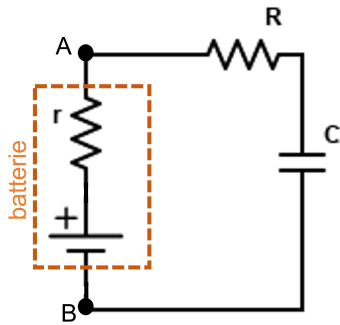
b) (9 pts) Pour calculer la force électromotrice, nous imposons un équilibre entre la force électrique (qui attire la plaque inférieure vers la plaque supérieure) et la force de gravité.

Le champ électrique généré par la plaque supérieure et agissant sur la plaque inférieure du condensateur peut être approximé par un champ de plan infini (car comme spécifié en indication, $\sqrt{A} \gg h$) :

$$E = \frac{E_0}{K} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 K} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 K A} \quad (18)$$

Pour le cas générique avec un diélectrique de constant K . La force électrique tirant la plaque vers le haut est alors :

$$F = EQ = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 K A} = \frac{(CV)^2}{2\varepsilon_0 K A} \stackrel{C=K\varepsilon_0 A/h}{=} \frac{\varepsilon_0 K A V^2}{2h^2} \quad (19)$$



Cette force doit être équilibrée avec la force gravitationnelle Mg , ce qui nous permet de déterminer la tension appropriée :

$$\frac{\varepsilon_0 K A V^2}{2h^2} = Mg \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2Mg}{\varepsilon_0 K A}} h \quad (20)$$

Dans un cas stationnaire, une fois le condensateur complètement chargé, il n'y a pas de courant dans le système, ce qui signifie que toute la tension de la batterie est appliquée au condensateur. Par conséquent, puisque il y a de l'air entre les plaques $K = K_a = 1$ nous obtenons

$$V = \mathcal{E} = \sqrt{\frac{2 \times 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2}{8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \times 1 \times 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2}} \times 4 \cdot 10^{-3} \text{ m} \simeq 6.66 \text{ kV}$$

La charge dans ces conditions est :

$$Q = C\mathcal{E} \simeq 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C/V} \times 6.66 \cdot 10^3 \text{ V} \simeq 5.89 \cdot 10^{-8} \text{ C} \quad (21)$$

c) (5 pts) Dans ce cas, lorsque la valeur de K devient $K_f = 4$, à partir de la formule (20), nous obtenons :

$$h_f = \mathcal{E} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 K_f A}{2Mg}} = h_a \sqrt{K_f} = 2h_a = 8 \text{ mm} \quad (22)$$

La capacité et la charge avec le fluide sont :

$$C_f = \frac{\varepsilon_0 K_f A}{h_f} \simeq \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \times 4 \times 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2}{8 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \simeq 1.77 \cdot 10^{-11} \text{ F} \quad (23)$$

$$Q_f = C_f \mathcal{E} = 1.78 \cdot 10^{-11} \text{ F} \times 6.64 \cdot 10^3 \text{ V} \simeq 1.18 \cdot 10^{-7} \text{ C} \quad (24)$$

d) (9 pts) Quand le condensateur commence à se décharger sur les deux résistances R_A et R , la charge $q(t)$ est donnée par :

$$q(t) = V_0 C_f \cdot e^{-t/((R_A+R)C_f)} \quad (25)$$

Le courant du circuit est donc :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{V_0}{(R_A + R)} e^{-t/[(R_A+R)C_f]} \quad (26)$$

Le temps qui correspond au courant i_{min} est donc :

$$t_{min} = -(R_A + R)C_f \cdot \ln \left[\frac{i_{min}(R_A + R)}{V_0} \right] \simeq 6.2 \times 10^{-7} \text{ s} = 0.62 \mu\text{s} \quad (27)$$

ou nous avons pris la valeur absolue du courant, car le signe indique juste le sens du courant (il faut prendre sa valeur absolue pour pouvoir estimer le logarithme).

Pour calculer la puissance dissipée, nous pouvons d'abord calculer l'énergie perdue par le condensateur comme la différence entre l'énergie stockée au début et l'énergie finale. L'énergie du condensateur initiale est :

$$W_{in} = \frac{Q_f^2}{2C_f} = \frac{(1.18 \cdot 10^{-7} \text{ C})^2}{2 \times 1.77 \cdot 10^{-11} \text{ F}} \simeq 3.92 \cdot 10^{-4} \text{ J} \quad (28)$$

Pour calculer l'énergie finale, nous calculons la charge finale du condensateur comme :

$$q_{min} = V_0 C_f \cdot e^{-t_{min}/((R_A+R)C_f)} \simeq 3.55 \cdot 10^{-9} \text{ C} \quad (29)$$

L'énergie finale est :

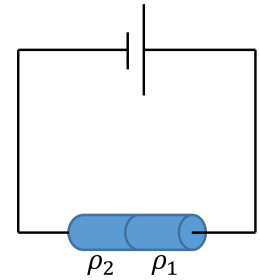
$$W_{min} = \frac{q_{min}^2}{2C_f} \simeq 3.55 \cdot 10^{-7} \text{ J} \quad (30)$$

La puissance dissipée est donc :

$$P = \frac{W_{in} - W_{min}}{t_{min}} \simeq 631 \text{ W} \quad (31)$$

Exercice 3 (25 points)

Une batterie donnant une force électromotrice de $\mathcal{E} = 1 \text{ V}$ est connectée aux extrémités d'une résistance de $R = 10 \Omega$. La résistance est constituée de deux cylindres de matériaux différents, avec une résistivité de ρ_1 et $\rho_2 = 2\rho_1$, respectivement. La section des cylindres est de $A = 3 \text{ mm}^2$ et la longueur de chaque cylindre est de $L = 1 \text{ cm}$.



Calculez (pour des conditions stationnaires) :

- La valeur de ρ_1 (en Ωm).
- La puissance dissipée dans chaque cylindre.
- La densité de charge superficielle accumulée à l'interface entre les deux cylindres (indication : utilisez la loi de Gauss).

Une résistance est composée par un cylindre creux de longueur D , de rayon interne $r_i = 2 \text{ mm}$ et rayon externe $r_e = 4 \text{ mm}$. Sa résistivité varie linéairement le long de sa longueur entre $x = 0$ et $x = D$ comme :

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{x}{D} \right), \quad (32)$$

avec $\rho_0 = 5 \cdot 10^{-3} \Omega\text{m}$. Cette résistance est ajoutée au circuit pour la question suivante, en parallèle avec celle composée par les deux cylindres.

- Quelle doit être la longueur D de cette résistance pour que la résistance équivalente du circuit soit $R_{eq} = 8 \Omega$?

Indications : $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$.

Corrigé

a) (5 pts) La résistance totale de deux résistances en série est donnée par : $R_{tot} = R_1 + R_2 = 10 \Omega$. Sachant que les résistances ont la même longueur l et la même section A :

$$R = \frac{\rho l}{A} \quad (33)$$

$$R_1 = \frac{\rho_1 \cdot l}{A} \quad (34)$$

$$R_2 = \frac{\rho_2 \cdot l}{A} \quad (35)$$

Alors :

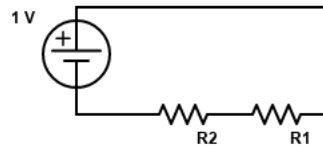
$$R_{tot} = \frac{\rho_1 l}{A} + \frac{2\rho_1 l}{A} = \frac{3\rho_1 l}{A} \quad (36)$$

Enfin :

$$\rho_1 = \frac{R_{tot} A}{3l} = 10^{-3} \Omega\text{m} \quad (37)$$

b) (4 pts) La puissance dissipée est calculée comme :

$$P = IV = I^2 R \quad (38)$$



Puisque les résistances en série sont parcourues par les mêmes courants :

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{tot}} = 0.1 \text{ A} \quad (39)$$

On a :

$$P_1 = I^2 R_1 = \frac{I^2 \rho_1 \cdot l}{A} = \frac{0.1^2 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 10^{-6}} = 0.033 \text{ W} \quad (40)$$

$$P_2 = I^2 R_2 = \frac{0.1^2 \cdot 2 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 10^{-6}} = 0.067 \text{ W} \quad (41)$$

c) (8 pts) A partir de la définition de la densité de courant et de la loi d'Ohm locale, on a :

$$J = \frac{I}{A} = \frac{E}{\rho} \quad (42)$$

La densité de courant électrique $J = I/A$, ainsi que la résistivité ρ , sont constantes à l'intérieur des chaque cylindre et donc le champ électrique $E = \rho J$ est constant dans chaque cylindre. De plus, comme $\rho_2 > \rho_1$, on a $E_2 > E_1$. La direction du champ électrique (figure ci-dessous) se déduit du fait qu'elle est la même que la direction du courant.

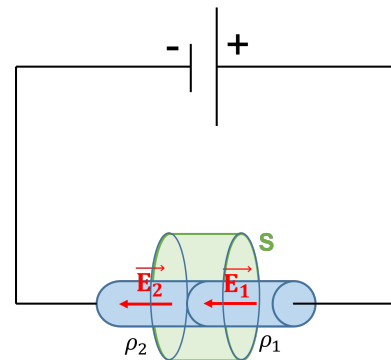
Considérons une surface gaussienne cylindrique qui contient l'interface entre les deux cylindres (figure). Par la loi de Gauss :

$$E_2 S - E_1 S = \frac{Q_{net}}{\epsilon_0} \quad (43)$$

$$\rho_2 J - \rho_1 J = \frac{\sigma_{interface}}{\epsilon_0} \quad (44)$$

Et donc :

$$\sigma_{interface} = \epsilon_0 (\rho_2 - \rho_1) J = \epsilon_0 (\rho_2 - \rho_1) \frac{I}{A} \simeq 2.95 \cdot 10^{-10} \text{ C/m}^2 \quad (45)$$



d) (8 pts) La résistance dR d'une tranche infinitésimale de R peut être écrite comme :

$$dR = \frac{\rho(x) dx}{A} = \frac{\rho_0 (1 + x/D)}{\pi (r_e^2 - r_i^2)} dx \quad (46)$$

La résistance totale est donc :

$$R_{\rho(x)} = \int_0^D dR = \int_0^D \frac{\rho_0 (1 + x/D)}{\pi (r_e^2 - r_i^2)} dx = \frac{\rho_0}{\pi (r_e^2 - r_i^2)} \frac{3}{2} D \quad (47)$$

La résistance équivalente est :

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_{1+2}} + \frac{1}{R_{\rho(x)}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{R_{1+2}} + \frac{\pi (r_e^2 - r_i^2)}{\rho_0} \frac{2}{3D} \right)^{-1} \quad (48)$$

et pour la longueur on obtient :

$$D = \frac{\pi (r_e^2 - r_i^2)}{\rho_0} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{R_{eq}} - \frac{1}{R_{1+2}} \right)^{-1} \simeq 0.2 \text{ m} \quad (49)$$