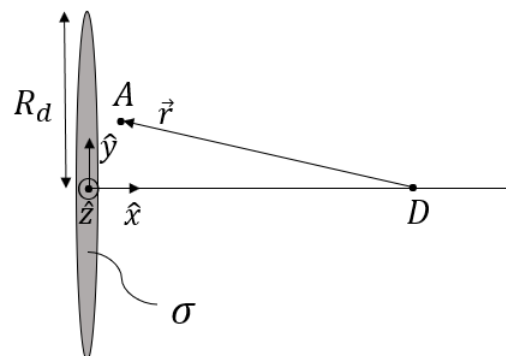


Exercice 1 (25 points)

Un disque de rayon $R_d = 50$ cm (épaisseur négligeable) a une densité de charge surfacique $\sigma = 1.28 \times 10^{-8}$ C/m².

- Donnez l'expression et la valeur de la charge totale du disque Q_d .
- Donnez l'expression du potentiel électrique du disque $V_d(x)$ le long de son axe \hat{x} . Donnez sa valeur au point D situé à 80 cm du disque sur l'axe \hat{x} .



Un premier projectile P_1 de charge $Q_{p1} = 2 \times 10^{-8}$ C et de masse $m = 1.2$ g (dimension négligeable) est lancé à partir du point D , le long de \hat{x} , vers le disque avec une vitesse initiale $v_i = 10$ cm/s.

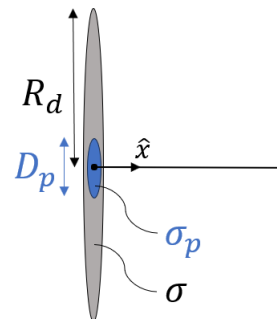
- Donnez l'expression et la valeur de la vitesse v_f de P_1 à la position du disque. Donnez l'expression et la valeur de la vitesse initiale $v_{i,0}$ que P_1 aurait dû avoir pour que sa vitesse soit nulle à la position du disque.
- En prenant P_1 à son point de départ D , donnez l'expression et la valeur du champ magnétique \vec{B}_{p1} (direction, sens et norme) produit par P_1 au niveau du point A . Le point A est situé à une distance $r = 80$ cm de D , \vec{r} formant un angle de 10° avec \vec{v}_i .

Un deuxième projectile P_2 (on enlève P_1 du problème) de charge totale Q_{p2} est lancé vers le disque à partir du point D . P_2 est composé d'une sphère pleine de rayon $R_1 = 1$ cm et de densité de charge volumique ρ_1 , entourée par une couche sphérique de rayon interne R_1 , de rayon externe $R_2 = 3R_1$, et de densité de charge volumique ρ_2 .

- Donnez l'expression du champ électrique \vec{E}_{p2} produit uniquement par P_2 en tout point (à l'intérieur et à l'extérieur de P_2). Donnez ensuite l'expression du champ électrique total \vec{E}_{tot} au point A (direction et sens). Veuillez noter que le point A est très proche du disque et justifiez vos éventuelles approximations.

À cause de l'impact de P_2 sur le disque, une région circulaire de diamètre $D_p < R_d$, centrée par rapport au disque, a une densité de charge surfacique augmentée à σ_p .

- En considérant cette modification, donnez l'expression du champ électrique $\vec{E}(x)$ du disque le long de son axe \hat{x} .


Indications :

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} ; \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1} ; \quad \int \frac{x}{\sqrt{a+x^2}} dx = \sqrt{a+x^2}$$

Négligez les effets d'induction/polarisation du champ électrique sur les distributions de charge du disque et des projectiles.

Négligez l'effet de la pesanteur sur la trajectoire des projectiles.

L'énergie cinétique d'un objet de masse m qui se déplace avec vitesse v est donnée par $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.

a) (2 pts) La densité surfacique de charge est définie comme : $\sigma = Q_d/S$. On a donc :

$$Q_d = \sigma S = \sigma \pi R_d^2 \quad (1)$$

Avec les valeurs fournies on trouve $Q_p \simeq 10^{-8}$ [C]

b) (4 pts) Différentes méthodes peuvent être utilisées pour trouver le potentiel :

1. Avoir noté le cas particulier du disque sur le formulaire, l'adapter de manière cohérente au problème et justifier son utilisation.
2. Intégrer le potentiel produit par un anneau infinitésimal de charge dq sur toute la surface du disque (voir Notes Fasoli - chapitre 3 - page 51, refait ci-dessous). L'intégrale était donnée en indication.
3. Calculer (ou reprendre du formulaire) le champ électrique produit par le disque (voir série 2 - exercice 2) puis l'intégrer pour trouver $V(x)$. Cette méthode est plus longue car elle nécessite deux intégrations.

En prenant la méthode 2, on a :

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (2)$$

en sachant que $dq = \sigma 2\pi r' dr'$ et que $r = \sqrt{x^2 + r'^2}$, il nous faut intégrer la forme suivante entre $r' = 0$ et $r' = R_d$:

$$dV(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r' dr'}{\sqrt{x^2 + r'^2}} \quad (3)$$

Ce qui donne (en utilisant l'indication) :

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{R_d} \frac{r' dr'}{\sqrt{x^2 + r'^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{x^2 + r'^2} \right]_0^{R_d} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{x^2 + R_d^2} - |x| \right) \quad (4)$$

Application numérique au point D : $V(D) = 103.7$ [V].

c) (5 pts) On applique ici la loi de conservation de l'énergie (voir Notes Fasoli - chapitre 3 - page 43) : l'énergie cinétique initiale du projectile P_1 est partiellement (voir totalement pour le 2e point) transférée en énergie potentielle électrique. On a donc :

$$\Delta K + \Delta U = 0 \implies \frac{m}{2}(v_f^2 - v_i^2) + Q_{p1}[V(0) - V(D)] = 0 \quad (5)$$

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + \frac{2Q_{p1}}{m}[V(D) - V(0)]} = 3.75 \text{ [cm/s]} \quad (6)$$

Pour la seconde question, l'équation est la même mais on sait que $v_f = 0$ et on cherche alors $v_{i,0}$, donné par :

$$v_{i,0} = \sqrt{\frac{2Q_{p1}}{m}[V(0) - V(D)]} = 9.27 \text{ [cm/s]} \quad (7)$$

Méthode alternative : utiliser la 2e loi de Newton. En négligeant la pesanteur (hypothèse formulée en indication), on peut écrire : $F = ma = Q_{p1}E(x)$. En développant $E(x)$, on obtient une équation différentielle non-linéaire :

$$\ddot{x} = \frac{Q_{p1}\sigma}{2m\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R_d^2 - x^2}} \right) \quad (8)$$

On ne peut pas aller plus loin, il est dès lors impossible de résoudre cette équation analytiquement et d'arriver à un résultat final correct avec cette méthode.

d) (6 pts) Le champ magnétique \vec{B}_{p1} est trouvé grâce à la loi de Biot-Savart :

$$\vec{B}_{p1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_{p1} \vec{v}_i \times \hat{r}}{r^2} \quad (9)$$

Le vecteur unitaire \hat{r} est explicité avec l'angle : $\hat{r} = -\cos(10)\hat{x} + \sin(10)\hat{y}$. Comme $\vec{v}_i = -v_i\hat{x}$, on voit que la seule composante non nulle du produit vectoriel sera dirigée selon $-\hat{z}$.

$$\vec{B}_{p1} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_{p1} v_i \sin(10)}{r^2} \hat{z} \quad (10)$$

L'application numérique donne : $\vec{B}_{p1} \simeq -5 \times 10^{-17} \hat{z}$ [T]. La norme du vecteur est donc $\|\vec{B}_{p1}\| = 5 \times 10^{-17}$ [T]

e) (5 pts) *Partie 1 : \vec{E}_{p2}*

La première partie de l'exercice nécessite, au vu de la géométrie du problème, d'utiliser la loi de Gauss à 3 reprises : pour (i) $r \leq R_1$, pour (ii) $R_1 \leq r \leq R_2$ et pour (iii) $r \geq R_2$. Dans tous les cas, on intègre $d\vec{E}$ sur une sphère de surface $S = 4\pi r^2$.

Pour (i), la charge incluse est une fraction de la charge de la sphère interne. On a donc :

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \quad \text{avec} \quad Q_{in} = \rho_1 \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \implies E(r \leq R_1) = \frac{\rho_1 r}{3\epsilon_0} \quad (11)$$

Pour (ii), il faut prendre en compte toute la charge de la sphère interne à laquelle on ajoute une fraction de la charge de la sphère externe :

$$Q_{in} = \frac{4\pi}{3} [\rho_1 R_1^3 + \rho_2 (r^3 - R_1^3)] \quad \implies E(R_1 \leq r \leq R_2) = \frac{\rho_1 R_1^3 + \rho_2 (r^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2} \quad (12)$$

Enfin, pour (iii), on prend en compte la charge totale de P_2 :

$$Q_{in} = Q_{p2} = \frac{4\pi}{3} [\rho_1 R_1^3 + \rho_2 (R_2^3 - R_1^3)] \quad \implies E(r \geq R_2) = \frac{\rho_1 R_1^3 + \rho_2 (R_2^3 - R_1^3)}{3r^2 \epsilon_0} = \frac{(\rho_1 + 26\rho_2) R_1^3}{3r^2 \epsilon_0} \quad (13)$$

N.B. : on utilise le fait que $R_2 = 3R_1$ dans la dernière égalité.

Partie 2 : \vec{E}_{tot}

Le champ électrique total au point A est obtenu en prenant la somme du champ produit par P_2 et par le disque. Comme le point A est très proche du disque, on fait l'approximation du plan infini pour \vec{E}_d . Le champ produit par le disque vu au point A peut donc s'écrire comme :

$$\vec{E}_d(A) \simeq \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{x} \quad (14)$$

Le champ produit par P_2 en A correspond à celui trouvé dans le cas (iii). Le résultat a été trouvé en fonction de r , il faut donc le projeter sur notre repère cartésien. Comme $\hat{r} = -\cos(10)\hat{x} + \sin(10)\hat{y}$, on obtient :

$$\vec{E}_{p2}(A) = \frac{(\rho_1 + 26\rho_2) R_1^3}{3r^2 \epsilon_0} [-\cos(10)\hat{x} + \sin(10)\hat{y}] \quad (15)$$

Le champ total est donc donné par la somme des deux contributions :

$$\vec{E}_{tot}(A) = \vec{E}_d(A) + \vec{E}_{Q2}(A) = \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{(\rho_1 + 26\rho_2) R_1^3}{3r^2 \epsilon_0} \cos(10) \right] \hat{x} + \frac{(\rho_1 + 26\rho_2) R_1^3}{3r^2 \epsilon_0} \sin(10) \hat{y} \quad (16)$$

f) (3 pts) Le champ électrique total peut être calculé comme la superposition du champ électrique produit par le disque, auquel on ajoute le champ électrique produit par la surface de charge augmentée. Dans les deux cas, il s'agit de champ électrique produits par un disque, dont on peut connaître l'expression grâce à différentes méthodes :

1. Grâce au formulaire.
2. En dérivant le résultat de la question b).
3. En intégrant sur la surface du disque le champ $dE(x)$ produit par un anneau infinitésimal (voir série 2 - exercice 2).

On trouve (méthode 2) :

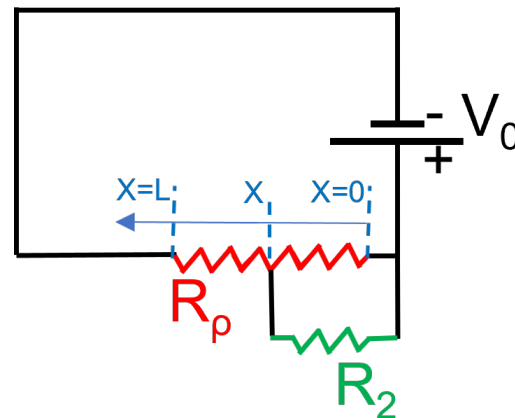
$$E_{tot} = E_d + E_p = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V_p}{\partial x} \implies E_{tot} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R_d^2 + x^2}} \right) + \frac{\sigma_p - \sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R_p^2 + x^2}} \right) \quad (17)$$

Exercice 2 (25 points)

Une résistance $R_\rho = 8 \text{ k}\Omega$ est composée d'un cube de longueur L , avec une résistivité $\rho(x) = \rho_0 x^2$ entre les deux faces connectées au circuit, en $x = 0$ et $x = L$.

a) Donnez la longueur L du cube si $\rho_0 = 2 \times 10^5 \Omega/\text{m}$.

Un générateur de tension qui fournit une tension V_0 est connecté à la résistance R_ρ et à une deuxième résistance R_2 , comme indiqué sur le dessin. La connexion entre R_2 et R_ρ est faite à une position x variable entre 0 et L .

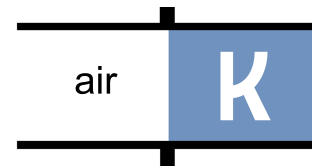


b) Donnez l'expression de la puissance dissipée $P(x)$ par la résistance totale équivalente $R_{eq}(x)$.

Considérez pour la suite de l'exercice que la position x de la connexion entre R_ρ et R_2 est telle que leur résistance équivalente vaut $R_{eq} = 5 \text{ k}\Omega$. Au temps $t = 0 \text{ s}$, R_{eq} est connectée en série à un condensateur planaire déchargé ($q(t = 0 \text{ s}) = 0 \text{ C}$). Après $t_1 = 50 \text{ ms}$, on mesure (sans perturber le système) une quantité de charge $q_1 = 0.5 q_{max}$ sur une plaque du condensateur, q_{max} étant la charge maximale pouvant être stockée sur la plaque du condensateur avec le V_0 fourni.

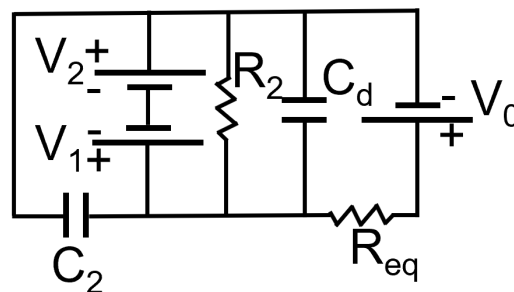
c) Donnez la valeur de la capacité C du condensateur. Si au début de la charge la capacité était déjà chargée à $0.1 q_{max}$, combien de temps aurait-il fallu attendre pour obtenir $0.5 q_{max}$ sur la plaque du condensateur ?

Le condensateur est maintenant chargé à $q_{max} = 2 \times 10^{-2} \text{ C}$. Vous ajoutez alors un diélectrique de constante diélectrique $K = 10$ entre les plaques qui remplit la moitié du volume du condensateur, en couvrant la moitié de la surface des plaques, comme dans le dessin fourni.



d) Calculez la nouvelle capacité du condensateur C_d en sachant que la distance entre les plaques est $d = 2 \text{ mm}$. Quelle est l'énergie totale dissipée dans la résistance R_{eq} , à partir du moment où la charge q_{max} est atteinte, pour que le condensateur puisse atteindre sa nouvelle condition stationnaire ?

Le circuit discuté aux points précédents est modifié comme dans le dessin ci-contre, en ajoutant la résistance $R_2 = 20 \Omega$, le condensateur $C_2 = 2 \mu\text{F}$, et les deux générateurs de tension $V_1 = 60 \text{ V}$ et $V_2 = 30 \text{ V}$.



e) Calculez toutes les valeurs des courants du circuit dans l'état stationnaire et dessinez leur sens sur le circuit (sur la feuille de réponse).

Indications :

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

- a) (6 pts) La résistance infinitésimale d'un objet est proportionnelle à sa longueur dx et inversement proportionnelle à sa section $S(x)$:

$$dR = \frac{\rho(x)}{S(x)} dx \quad (18)$$

Au vu de l'énoncé, on a que $S(x) = L^2$, et $\rho(x) = \rho_0 x^2$. La résistance totale d'un cube de côté L est donc :

$$R_\rho = \frac{1}{L^2} \int_0^L dx \rho_0 x^2 = \rho_0 \frac{L}{3} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{3R_\rho}{\rho_0} = \frac{3}{25} \text{ m} = 12 \text{ cm} \quad (19)$$

- b) (7 pts) Calculons d'abord la résistance $R_\rho(x)$:

$$R_\rho(x) = \frac{1}{L^2} \int_0^x \rho_0 y^2 dy = \rho_0 \frac{x^3}{3L^2}, \quad R_\rho(L) - R_\rho(x) = \frac{\rho_0}{3} (L - x^3/L^2) \quad (20)$$

Le circuit équivalent est donné par 2 résistances connectées en parallèle (R_2 et $R_\rho(x)$) et une autre en série ($R_\rho(L) - R_\rho(x)$). La résistance équivalente est donc :

$$\begin{aligned} R_{eq} &= \text{série}(R_\rho(L) - R_\rho(x), \text{parallèle}(R_2, R_\rho(x))) \\ &= R_\rho(L) - R_\rho(x) + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_\rho(x)} \right)^{-1} \\ &= \frac{\rho_0(3L^5 R_2 + L^3 \rho_0 x^3 - \rho_0 x^6)}{3L^2(3L^2 R_2 + \rho_0 x^3)} \end{aligned} \quad (21)$$

La puissance dissipée est ensuite :

$$P = \frac{V_0^2}{R_{eq}} \quad (22)$$

- c) (5 pts) En utilisant les lois constitutives de la capacité, on obtient que la tension $V_C(t)$ à ses bornes en fonction du temps vaut :

$$V_C(t) = V_0(1 - e^{-t/(RC)}) \quad (23)$$

la charge présente sur une des faces vaut simplement $q(t) = CV_C(t)$, et l'on obtient q_{\max} via :

$$q_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = CV_0 \quad (24)$$

sachant qu'à t_1 , $q(t_1) = q_{\max}/2$, on a que :

$$\frac{CV_0}{2} = CV_0(1 - e^{-t_1/(RC)}) \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-t_1/(RC)} \Rightarrow \ln(2) = \frac{t_1}{RC} \Rightarrow C = \frac{t_1}{R \ln(2)} = 14.427 \mu\text{F} \quad (25)$$

Dans le cas où le chargeur est déjà chargé à $q_0 = 0.1q_{\max}$, il s'agit de trouver t_0 tel que $V(t_0) = 0.1V_0$ et de calculer $\Delta t = t_1 - t_0$. Par la première condition, on obtient :

$$t_0 = RC(\ln(10) - \ln(9)) \quad (26)$$

on obtient donc :

$$\Delta t = t_1 - t_0 = 42.4 \text{ ms} \quad (27)$$

Une méthode alternatif est de dériver l'équation de la charge du condensateur avec la bonne condition initiale. Depuis la loi des maille de Kirchoff, on obtient :

$$\int_{q_0}^{q(t)} \frac{dq'}{q' - V_0 C} = - \int_0^t \frac{dt'}{RC} \quad \ln \left(\frac{q(t) - V_0 C}{q_0 - V_0 C} \right) = \frac{-t}{RC} \quad (28)$$

en isolant $q(t)$:

$$q(t) = V_0 C (1 - e^{-t/(RC)}) + q_0 e^{-t/(RC)} \quad (29)$$

Avec la condition initiale $q_0 = 0.1 q_{max}$ et $q(t) = 0.5 q_{max}$, on trouve le temps cherché.

- d) (**4 pts**) Le diélectrique placé ainsi est équivalent à diviser le condensateur en deux, branchés en parallèle. On a donc :

$$C_d = C_1 + C_2 = \epsilon_0 K \frac{A_1}{d} + \epsilon_0 \frac{A_2}{d} = \frac{\epsilon_0 A}{2d} (1 + K) = \frac{C}{2} (1 + K) = 79.3 \mu\text{F} \quad (30)$$

La puissance dissipée par la résistance a pour expression :

$$W = \int_{t_2}^{t_3} dt P_J(t) = \int_{t_2}^{t_3} dt V_R(t) I(t) \quad (31)$$

où $V_R(t)$ est la tension aux bornes de la résistance et $I(t)$ est le courant dans le circuit (un seul, tout est en série). En utilisant la loi des mailles on a que :

$$V_R(t) = V_0 - V_C(t) \quad (32)$$

La charge du condensateur évolue dans le temps en suivant la loi des mailles :

$$V_0 = RI(t) + V_C(t) \Rightarrow V_0 = R\dot{q}(t) + \frac{1}{C_d} q(t) \quad (33)$$

avec pour solution générale :

$$q(t) = (V_0 C_d e^{t/(RC_d)} + A) e^{-t/(RC_d)} \quad (34)$$

Le condensateur a comme conditions initiales $q(0) = q_{max}$:

$$q(0) = q_{max} = C V_0 \Rightarrow A = V_0 (C - C_d) \quad (35)$$

d'où :

$$q(t) = V_0 (C_d + (C - C_d) e^{-t/(RC_d)}) \quad (36)$$

et a pour limite $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = C_d V_0$ comme attendu. Le courant est donné par :

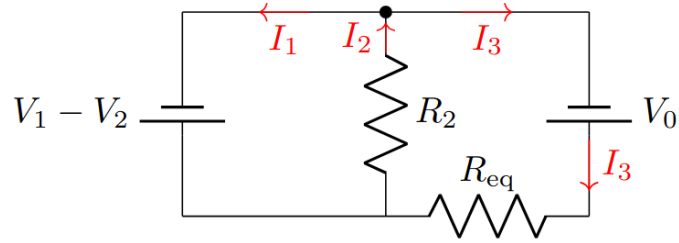
$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{V_0}{R} \frac{C_d - C}{C_d} e^{-t/(RC_d)} \quad (37)$$

et la tension aux bornes de la résistance :

$$V_R(t) = V_0 - V_C(t) = RI(t) = V_0 \frac{C_d - C}{C_d} e^{-t/(RC_d)} \quad (38)$$

donnent pour l'énergie dissipée :

$$W = \frac{V_0^2}{R} \frac{(C_d - C)^2}{C_d^2} \left[\int_0^\infty e^{-2t/(RC_d)} dt \right] = \frac{1}{2} \frac{(C_d - C)^2}{C_d} V_0^2 \quad (39)$$



- e) (**3 pts**) Il s'agit de remplacer les condensateurs par des fils ouverts (pas de courant circule) et d'ajouter (soustraire) les tensions dues aux générateurs. En fixant les sens des courants comme indiqué sur le schéma ci-dessous, les équations des mailles et des nœuds donnent :

$$V_2 - V_1 + R_2 I_2 = 0 \quad (40)$$

$$V_0 - I_3 R_{eq} - I_2 R_2 = 0 \quad (41)$$

$$I_1 + I_3 = I_2 \quad (42)$$

D'où l'on tire :

$$I_1 = \frac{1}{R_{eq}} \left(\frac{(R_{eq} - R_2)(V_1 - V_2)}{R_2} - V_0 \right) + \frac{V_1 - V_2}{R_2} = 1.2 \text{ A} \quad (43)$$

$$I_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2} = 1.5 \text{ A} \quad (44)$$

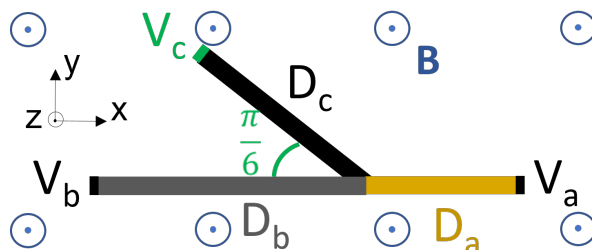
$$I_3 = \frac{V_0 - V_1 + V_2}{R_{eq}} = 0.3 \text{ A} \quad (45)$$

On a bien toutes les valeurs positives, donc les sens des courants sont comme indiqués plus haut.

Exercice 3 (25 points)

Un conducteur fixe dans l'espace (pas libre de se déplacer) est composé de trois secteurs de longueurs et masses ($D_a = 8 \text{ cm}$, $m_a = 0.2 \text{ kg}$), ($D_b = 16 \text{ cm}$, $m_b = 0.4 \text{ kg}$), et ($D_c = 10 \text{ cm}$, $m_c = 0.4 \text{ kg}$), comme indiqué sur la figure, avec des voltages appliqués aux trois extrémités et maintenus constants $V_a = 200 \text{ V}$ et $V_b = V_c = 50 \text{ V}$ (par rapport à une terre commune).

Les trois secteurs ont des valeurs de résistance $R_a = 200 \Omega$, $R_b = 50 \Omega$, et $R_c = 300 \Omega$. Les secteurs b et c forment un angle de $\pi/6$ entre eux. Le conducteur se trouve dans une région avec un champ magnétique constant et uniforme $\vec{B} = 0.8\hat{e}_z \text{ T}$ qui sort du plan de la feuille.



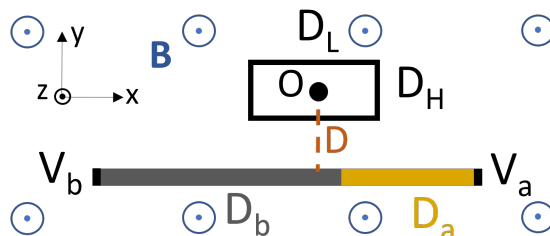
- Dessinez le circuit électrique équivalent.
- Donnez l'expression et la valeur des courants I_a, I_b, I_c à travers D_a, D_b , et D_c respectivement.
- Donnez l'expression et la valeur des forces \vec{F}_a, \vec{F}_b et \vec{F}_c (norme, direction et sens) qui agissent sur chaque secteur du conducteur. Sur un schéma, dessinez la direction des forces sur chaque secteur du conducteur. Négligez le champ magnétique produit par le courant traversant le conducteur.

Considérez le conducteur précédemment introduit sans le secteur c (avec les secteurs a et b uniquement). Chaque secteur est modélisé comme sa résistance (R_a, R_b) en série avec une inductance (L_a, L_b), respectivement.

- Dessinez le circuit électrique équivalent.
- Donnez l'expression et la valeur de l'inductance totale L_{tot} du conducteur, si après 3 s de l'application de V_a et V_b (avec un courant initial nul) le courant qui circule est de $I(t_m = 3 \text{ s}) = I_m = 0.2 \text{ A}$. Donnez l'expression et la valeur du courant stationnaire I_s .

À un temps t_0 , le courant dans le conducteur est considéré stationnaire, et le conducteur est laissé libre de se déplacer.

- Donnez l'expression et la direction de la vitesse v_f du conducteur au temps $t_f = t_0 + 5 \text{ s}$.

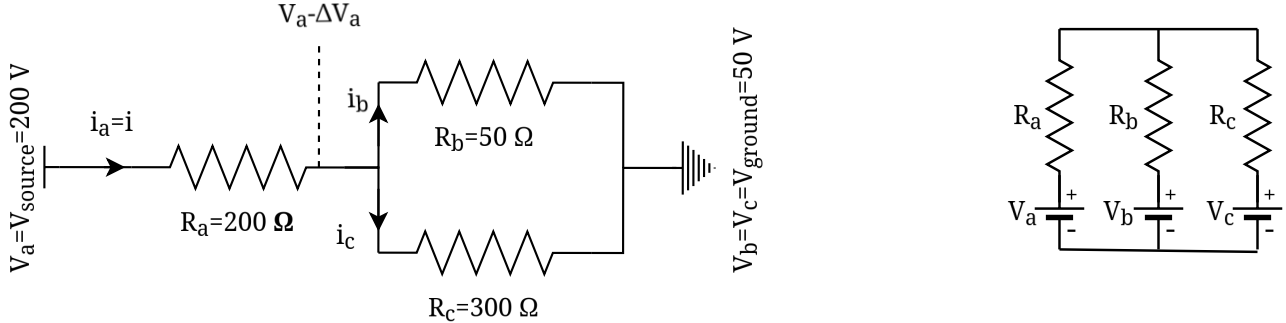


À partir du temps t_f , la vitesse du conducteur v_f est considérée constante. Le conducteur se trouve alors à une distance $D = 3 \text{ mm}$ du centre O d'une spire rectangulaire de cotés $D_L = 3 \text{ mm}$ et $D_H = 2 \text{ mm}$, placée dans le plan xy , dont le long côté (D_L) est parallèle au conducteur. Voir dessin (notez que le dessin n'est pas à l'échelle).

- Donnez l'expression de la force électromotrice $\varepsilon(t)$ induite dans la spire rectangulaire. Dessinez le sens du courant induit. Négligez les effets d'auto-induction de la spire et justifiez vos éventuelles approximations.

Indications : Négligez la pesanteur dans ce problème.

- a) (2.5 pts) Pas de boucles fermées dans la partie exposée du circuit → pas d'effets d'induction → schéma classique valable. Deux exemples de variantes,



D'autres variantes sont acceptées tant que les lois de Kirchoff rendent les même équations.

- b) (5 pts) Deux approches possibles. Approche 1 : écrire les lois de Kirchoff (conservation du courant et loi des mailles), puis résoudre le système algébrique. Approche 2 : Réaliser que $V_b = V_c = V_{gnd}$, donc que la baisse de tension à travers R_b et R_c est la même, et simplifier le circuit comme dans la figure indiquée, avec $1/R_{eq} = 1/R_a + 1/R_b$. La résistance totale $R_{tot} = R_a + R_{eq}$, est soumise à une baisse de tension totale de $\Delta V_{tot} = V_a - V_0$, et le courant

$$I = I_a = \frac{\Delta V_{tot}}{R_{tot}} = \frac{21}{34} \approx 0.62 \text{ A.} \quad (46)$$

La baisse de tension à travers R_a est $\Delta V_a = R_a I = \Delta V_{tot} \frac{1}{1 + R_{eq}/R_a}$ (diviseur de tension!), donc la baisse de tension restante sur la résistance parallèle et $\Delta V_{eq} = \Delta V_{tot} - \Delta V_a = \Delta V_{tot} \frac{1}{1 + R_a/R_{eq}}$, et on obtient

$$I_b = \frac{\Delta V_{eq}}{R_b} = \frac{9}{17} \approx 0.53 \text{ A}, I_c = \frac{\Delta V_{eq}}{R_c} = \frac{3}{34} \approx 0.088 \text{ A.} \quad (47)$$

- c) (4.5 pts) Les charges portant le courant dans chaque secteur sont soumises à la force de Lorentz. Pour chaque segment $\gamma = a, b, c$, elle s'écrit par unité de longueur

$$\vec{f}_\gamma = \underbrace{q\vec{v}_\gamma}_{\vec{j}_\gamma} \times \vec{B} \quad (48)$$

et s'intègre, où la densité de courant linéique $\vec{j} = \vec{I}$, uniforme dans chaque conducteur, est substituée

$$\vec{F}_\gamma = \int_{\text{secteur } \gamma} \vec{j}_\gamma \times \vec{B} dl = D_\gamma \vec{I}_\gamma \times \vec{B}, \quad (49)$$

et avec

$$\vec{B} = B\hat{e}_z, \vec{I}_a = -I_a\hat{e}_x, \vec{I}_b = -I_b\hat{e}_x, \vec{I}_c = I_c(-\cos(\theta)\hat{e}_x + \sin(\theta)\hat{e}_y) \quad (50)$$

donne

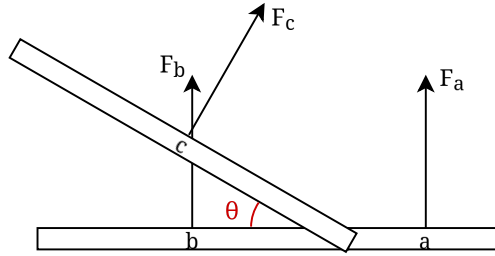
$$\vec{F}_a = D_a I B (-\hat{e}_x \times \hat{e}_z) = D_a I B \hat{e}_y = (0, \frac{84}{2125}, 0) \approx (0, 0.04, 0) \quad (51)$$

$$\vec{F}_b = D_b I_b B (-\hat{e}_x \times \hat{e}_z) = D_b I_b B \hat{e}_y = (0, \frac{144}{2125}, 0) \approx (0, 0.07, 0) \quad (52)$$

$$\vec{F}_c = D_c I_c B ((-\cos(\theta)\hat{e}_x + \sin(\theta)\hat{e}_y) \times \hat{e}_z) = D_c I_c B \hat{e}_y = D_c I_c B (\sin(\theta)\hat{e}_x + \cos(\theta)\hat{e}_y) = \quad (53)$$

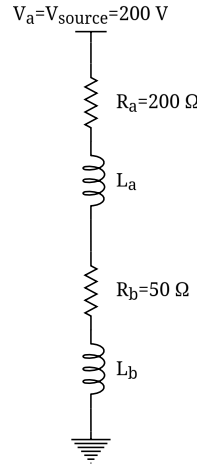
$$\left(\frac{3}{850}, \frac{3\sqrt{3}}{850}, 0\right) \approx (0.0035, 0.0061, 0) \quad (54)$$

Note : on accepte aussi la valeur numérique $|\vec{F}_c| = \frac{3}{425} \approx 0.00706$.



Sur le dessin, il est important de noter que la force de Lorentz est toujours normale au conducteur.

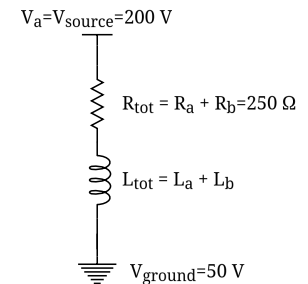
— d) (3 pts) Similairement à la question a),



l'autre variante avec les branchements à la terre commune est aussi correcte.

— e) (4 pts) Simplifier le circuit avec $R_{tot} = R_a + R_b$ et $L_{tot} = L_a + L_b$, écrire la loi de la maille pour les baisses de tension à travers les résistances et inductances $\Delta V_R = \Delta V_L = \Delta V_{tot}$, en utilisant les lois caractéristiques pour les résistances et les inductances, $R_{tot} I(t) + L_{tot} \dot{I}(t) = \Delta V_{tot}$ et le résoudre avec la condition initiale $I(0) = 0$ pour obtenir

$$I(t) = \frac{\Delta V_{tot}}{R_{tot}} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\frac{L_{tot}}{R_{tot}}}\right) \right). \quad (55)$$



Étant donné le courant $I_m = 0.2$ A à l'instant $t_m = 3$ s, on peut inverser la relation et trouver

$$L_{tot} = L_a + L_b = \frac{t_m R_{tot}}{-\ln\left(1 - \frac{I_m R_{tot}}{\Delta V_{tot}}\right)} \approx 1849.73 \text{ H} \quad (56)$$

Le courant stationnaire ($\dot{I} = 0 \implies \Delta V_L = 0$, et donc seules les résistances "contribuent")

$$I_s = \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \frac{\Delta V_{tot}}{R_{tot}} = 0.6 \text{ A} \quad (57)$$

- f) (**3 pts**) On considère la force sur le conducteur entier, de masse $M = m_a + m_b = 0.6 \text{ kg}$ et de longueur $D_{tot} = D_a + D_b = 24 \text{ cm}$, traversé par un courant $\vec{I}_s = -I_s \hat{e}_x$ (de la droite vers la gauche). La force s'exerçant sur le conducteur entier est encore la force de Lorentz

$$\vec{F} = \vec{F}_a + \vec{F}_b = (D_a + D_b) \vec{I}_s \times \vec{B} = D_{tot} I_s B \hat{e}_y. \quad (58)$$

On écrit la loi de Newton décrivant la trajectoire du centre de masse

$$M \dot{\vec{v}}(t) = \vec{F}, \quad (59)$$

qui projeté sur les coordonnées $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$,

$$\dot{v}_x = 0 \quad (60)$$

$$\dot{v}_y = \frac{D_{tot} I_s B}{M} \quad (61)$$

$$\dot{v}_z = 0, \quad (62)$$

avec les conditions initiales $\vec{v}(t_0) = \vec{0}$ s'intègre une fois

$$v_x(t) = 0 \quad (63)$$

$$v_y(t) = \frac{D_{tot} I_s B (t - t_0)}{M} \quad (64)$$

$$v_z(t) = 0. \quad (65)$$

Au bout de $t_f - t_0 = \Delta t = 5 \text{ s}$, le conducteur atteint une vitesse :

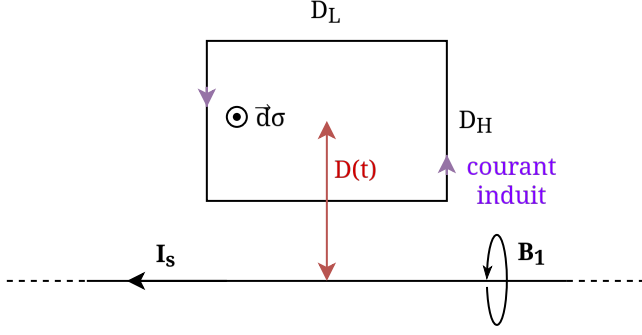
$$v_f = v_y(t_f) = \frac{D_{tot} I_s B \Delta t}{M}, \quad (66)$$

alignée le long de l'axe \hat{e}_y

- g) (**3 pts**) La longueur D_{tot} du fil est beaucoup plus grande que les dimensions D_L et D_H de la bobine, ainsi que la distance $D(t)$ que l'on sait petite, on peut donc faire l'approximation du fil infini. Le champ magnétique généré par le fil a une symétrie cylindrique autour de l'axe \hat{e}_x . Dans le plan (\hat{e}_x, \hat{e}_y) et à une distance radiale $D(t)$ du fil,

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_s}{2\pi D(t)} \hat{e}_z. \quad (67)$$

Puisque le fil est en mouvement, $D = D(t) = D_0 - v_f(t - t_f)$ varie dans le temps (avec $D(0) = 3 \text{ mm}$), et donc $\vec{B}_1 = \vec{B}_1(t)$ varie aussi. Le champ $\vec{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$ arrière plan est constant, donc ne contribue pas à la variation temporelle du flux magnétique dans la bobine. La variation du flux magnétique dans la bobine induit une force électromotrice (une tension dans la bobine), qui met en mouvement des charges dans la bobine, et ce courant induit un champ magnétique de direction opposée à \vec{B}_1 :



Il reste à calculer la force électromotrice. En notant $d\vec{\sigma} = dx dy \hat{e}_z$,

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_{\vec{B}_1}}{dt} \quad (68)$$

$$= - \frac{d}{dt} \int \int_{\text{bobine}} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\sigma} \quad (69)$$

$$= D_L \frac{\mu_0 I_s}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_{D(t) - D_H/2}^{D(t) + D_H/2} \frac{1}{y} dy \quad (70)$$

$$= D_L \frac{\mu_0 I_s}{2\pi} \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{D(t) + \frac{D_H}{2}}{D(t) - \frac{D_H}{2}} \right) \quad (71)$$

$$= D_L \frac{\mu_0 I_s}{2\pi} \frac{dD(t)}{dt} \frac{d}{dD} \ln \left(\frac{D(t) + \frac{D_H}{2}}{D(t) - \frac{D_H}{2}} \right) \quad (72)$$

$$= D_L \frac{\mu_0 I_s}{2\pi} v_f \left(\frac{1}{D(t) - \frac{D_H}{2}} - \frac{1}{D(t) + \frac{D_H}{2}} \right). \quad (73)$$

Exercice 4 (25 points)

Le champ magnétique associé à une onde électromagnétique qui se propage dans la direction \hat{x} est composé de deux longueurs d'ondes telles que $\lambda_1 = 2\lambda_2$, avec des fréquences angulaires ω_1 et ω_2 .

- a) Calculez le rapport entre ω_1 et ω_2 .

Les deux harmoniques ω_1 , ω_2 contribuent au spectre de l'onde avec des coefficients B_1 et B_2 selon l'expression :

$$\vec{B}(x, t) = [B_1 \sin(k_1 x - \omega_1 t) + B_2 \sin(k_2 x - \omega_2 t)]\hat{z} \quad (74)$$

- b) Donnez l'expression du champ électrique \vec{E} de l'onde et du vecteur de Poynting \vec{S} associé (norme, direction, et sens de propagation) en fonction de B_1 , B_2 , k_1 , ω_1 .

Vous mesurez $\omega_1 = 6\pi \times 10^6$ rad/s. Après $1/4$ de la période T_1 de l'harmonique B_1 depuis $t = 0$ s, l'amplitude totale du champ magnétique à la position $x_A = 150$ m est $B = 4 \times 10^{-7}$ T.

- c) Déterminez les valeurs de B_1 et B_2 en sachant que $B_2 = 3B_1$.
- d) Démontrez qu'à la position x_A le champ magnétique atteint sa valeur maximale quand la condition $\cos(\omega_1 t) = 3/4$ est satisfaite. Utilisez l'identité $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.

Des scientifiques placent en x_A un détecteur de forme circulaire avec son axe le long de \hat{x} , qui peut absorber toute l'énergie de l'harmonique ω_1 de l'onde électromagnétique. Ils pensent qu'un détecteur avec une base de rayon $R = 1$ m est suffisant pour récolter une énergie de 10^{-2} J pendant un intervalle de temps $\Delta t = 100T_1$.

- e) Dans le cas où l'onde électromagnétique est plane, vérifiez avec des calculs si les scientifiques ont raison ou pas.

Indications :

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}}$$

a) (4 pts) Le rapport entre ω_1 et ω_2 peut être calculé en passant par la fréquence

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\frac{2\pi c}{\lambda_1}}{\frac{2\pi c}{\lambda_2}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0.5 \quad (75)$$

b) (9 pts) Pour calculer le champ électrique \vec{E} associé on passe par l'équation de Faraday (loi d'induction de Maxwell) :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (76)$$

Le champ électrique \vec{E} est dans la direction y , soit $\vec{E} = E_y(x, t)\hat{y}$, et que le champ magnétique \vec{B} est dans la direction z .

La dérivée temporelle de \vec{B} est :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = [-B_1\omega_1 \cos(k_1x - \omega_1t) - B_2\omega_2 \cos(k_2x - \omega_2t)] \hat{z}. \quad (77)$$

Le rotationnel de \vec{E} s'écrit dans la direction z pour une onde plane dans x :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \hat{z}. \quad (78)$$

En utilisant $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, on obtient :

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -[-B_1\omega_1 \cos(k_1x - \omega_1t) - B_2\omega_2 \cos(k_2x - \omega_2t)]. \quad (79)$$

On intègre par rapport à x :

$$E_y(x, t) = cB_1 \sin(k_1x - \omega_1t) + cB_2 \sin(k_2x - \omega_2t) = cB_1 \sin(k_1x - \omega_1t) + cB_2 \sin(2k_1x - 2\omega_1t), \quad (80)$$

Avec k_2 et ω_2 substitués. où nous avons utilisé la relation de dispersion $\omega = ck$ dans le vide.

Le vecteur de Poynting est donné par :

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}. \quad (81)$$

Pour $\vec{E} = E_y\hat{y}$ et $\vec{B} = B_z\hat{z}$, le produit vectoriel $\vec{E} \times \vec{B}$ donne :

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} [(cB_1 \sin(k_1x - \omega_1t) + cB_2 \sin(k_2x - \omega_2t)) \hat{y} \times (B_1 \sin(k_1x - \omega_1t) + B_2 \sin(k_2x - \omega_2t)) \hat{z}]. \quad (82)$$

Le produit vectoriel $\hat{y} \times \hat{z}$ pointe dans la direction x , et la norme du vecteur de Poynting devient :

$$S(x, t) = \frac{c}{\mu_0} [B_1^2 \sin^2(k_1x - \omega_1t) + 2B_1B_2 \sin(k_1x - \omega_1t) \sin(k_2x - \omega_2t) + B_2^2 \sin^2(k_2x - \omega_2t)]. \quad (83)$$

c) (7 pts)

— À la position $x_A = 150$ m et au temps $t = \frac{T_1}{4}$, l'intensité du champ magnétique est :

$$B(x_A, t = T_1/4) = 4 \times 10^{-7} \text{ T}. \quad (84)$$

— $B_2 = 3B_1$ (relation entre les amplitudes des deux harmoniques).

— La longueur d'onde et les pulsations vérifient : $\lambda_1 = 2\lambda_2 \implies k_2 = 2k_1$ et $\omega_2 = 2\omega_1$.

L'expression générale du champ magnétique est :

$$B(x, t) = B_1 \sin(k_1 x - \omega_1 t) + B_2 \sin(k_2 x - \omega_2 t). \quad (85)$$

Au temps $t = \frac{T_1}{4}$, la période de l'harmonique B_1 est $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$. On a alors :

$$\omega_1 t = \omega_1 \frac{T_1}{4} = \frac{\pi}{2}. \quad (86)$$

L'expression devient :

$$B(x_A, t = T_1/4) = B_1 \sin\left(k_1 x_A - \frac{\pi}{2}\right) + B_2 \sin(k_2 x_A - \pi). \quad (87)$$

En utilisant les identités trigonométriques :

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\theta), \quad \sin(\theta - \pi) = -\sin(\theta), \quad (88)$$

on obtient :

$$B(x_A, t = T_1/4) = -B_1 \cos(k_1 x_A) - B_2 \sin(k_2 x_A) = -B_1 \cos(k_1 x_A) - 3B_1 \sin(2k_1 x_A). \quad (89)$$

En utilisant $B_2 = 3B_1$ et $k_2 = 2k_1$.

Application numérique :

Données

— $\lambda_1 = 2\lambda_2$, où λ_1 et λ_2 sont les longueurs d'onde respectives,

— $\omega_1 = 6\pi \times 10^6$ rad/s.

$$\omega_2 = 2 \times 6\pi \times 10^6 = 12\pi \times 10^6 \text{ rad/s}. \quad (90)$$

Les vecteurs d'onde k_1 et k_2 s'obtiennent via $k = \frac{\omega}{c}$:

$$k_1 = \frac{\omega_1}{c} = \frac{6\pi \times 10^6}{3 \times 10^8} = 2\pi \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}, \quad , \quad k_2 = \frac{\omega_2}{c} = \frac{12\pi \times 10^6}{3 \times 10^8} = 4\pi \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}. \quad (91)$$

Nous savons que $x_A = 150$ m et $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}$. Précédemment, nous avons trouvé :

$$\lambda_1 = 2\lambda_2 \implies k_1 = 2\pi \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}. \quad (92)$$

$$k_1 x_A = (2\pi \times 10^{-2})(150) = 3\pi. \quad (93)$$

$$\cos(3\pi) = -1, \quad \sin(6\pi) = 0 \quad (\text{car } 6\pi \text{ est un multiple de } 2\pi). \quad (94)$$

Substituons ces valeurs dans l'expression du champ magnétique :

$$B(x_A, t = T_1/4) = -B_1(-1) - 3B_1(0) = B_1 = 4 \times 10^{-7} \text{ T}. \quad (95)$$

d'après les données du problème. Puisque $B_2 = 3B_1$, on a :

$$B_2 = 3 \times 4 \times 10^{-7} = 1,2 \times 10^{-6} \text{ T}. \quad (96)$$

d) (3 pts)

Pour trouver les instants où le champ atteint un maximum, nous devons dériver cette expression par rapport au temps t et poser la dérivée à zéro :

$$\frac{dB(t)}{dt} = -B_1\omega_1 \cos(k_1x - \omega_1t) - B_2\omega_2 \cos(k_2x - \omega_2t) = 0. \quad (97)$$

On utilise :

$$\lambda_1 = 2\lambda_2 \implies k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}, \quad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = 2k_1. \quad \omega_2 = 2\omega_1 \quad (98)$$

En substituant ces relations dans l'expression de la dérivée du champ magnétique, on obtient :

$$\frac{dB(t)}{dt} = -B_1\omega_1 \cos(k_1x - \omega_1t) - B_2(2\omega_1) \cos(2k_1x - 2\omega_1t) \quad (99)$$

On simplifie en divisant par ω_1 et on utilise $B_2 = 3B_1$:

$$-B_1 \cos(k_1x - \omega_1t) - 6B_1 \cos(2k_1x - 2\omega_1t) = 0. \quad (100)$$

Comme $B_1 \neq 0$, on obtient la condition suivante :

$$\cos(k_1x - \omega_1t) + 6 \cos(2k_1x - 2\omega_1t) = 0. \quad (101)$$

On utilise l'identité trigonométrique fourni $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ pour simplifier $\cos(2k_1x - 2\omega_1t)$.

$$\cos(k_1x - \omega_1t) + 6 [2 \cos^2(k_1x - \omega_1t) - 1] = 0. \quad (102)$$

On réorganise l'équation :

$$12 \cos^2(k_1x - \omega_1t) + \cos(k_1x - \omega_1t) - 6 = 0. \quad (103)$$

En posant $u = \cos(k_1x - \omega_1t)$, on obtient une équation quadratique :

$$12u^2 + u - 6 = 0. \quad (104)$$

Les solutions sont donc :

$$u = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm 17}{2(12)}. \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{-1 + 17}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}, \quad u_2 = \frac{-1 - 17}{24} = \frac{-18}{24} = -\frac{3}{4}. \quad (105)$$

Puisque $u = \cos(k_1x - \omega_1t)$, on choisit la solution physique $\cos(k_1x - \omega_1t) = \frac{3}{4}$, ce qui correspond à la condition initiale recherchée.

e) (2 pts)

- Rayon du détecteur : $R = 10$ m,
- Temps : $\Delta t = 100T_1$,
- Énergie absorbée : $E = 10^{-12}$ J,
- Champ magnétique maximal : $B_1 = 4 \times 10^{-7}$ T.

La puissance surfacique moyenne de l'onde est donnée par :

$$\langle S \rangle = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}, \quad (106)$$

où $E_0 = cB_0$. La puissance totale interceptée par le détecteur est alors :

$$\langle P \rangle = \langle S \rangle \cdot A = \frac{cB_0^2}{2\mu_0} \cdot (\pi R^2). \quad (107)$$

L'énergie absorbée pendant Δt est :

$$E_{\text{abs}} = \langle P \rangle \Delta t. \quad (108)$$

Application numérique : les données sont les suivantes :

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}, \quad c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}, \quad B_1 = 4 \times 10^{-7} \text{ T}, \quad R = 10 \text{ m}, \quad \Delta t = 100T_1 = \frac{100}{6\pi \times 10^6} \text{ s}. \quad (109)$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de E , on obtient :

$$E = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}} \cdot \frac{(4 \times 10^{-7})^2 \text{ T}}{2} \cdot \pi(10 \text{ m})^2 \cdot \frac{100 \cdot 2\pi}{6\pi \times 10^6} \text{ s} \approx 0.2 \text{ J}. \quad (110)$$

L'énergie collectée par le détecteur ($E \approx 0.0318 \text{ J}$) est supérieure à celle mesurée par les scientifiques.