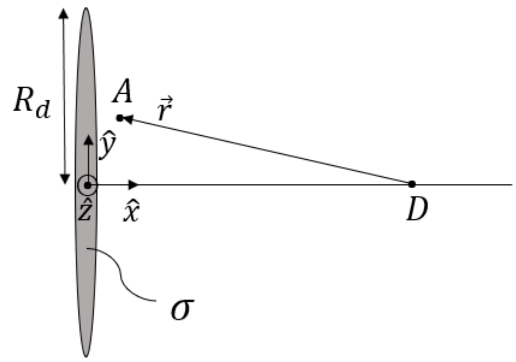
Exercice 1 (25 points)



Un disque de rayon $R_d = 50\,\text{cm}$ (épaisseur négligeable) a une densité de charge surfacique $\sigma = 1.28 \times 10^{-8}\,\text{C/m}^2$.

a) Donnez l'expression et la valeur de la charge totale du disque Q_d.

b) Donnez l'expression du potentiel électrique du disque $V_d(x)$ le long de son axe $\hat{x}$. Donnez sa valeur au point D situé à 80 cm du disque sur l'axe $\hat{x}$.

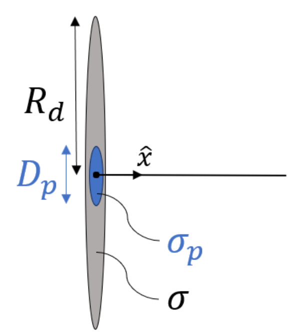
Un premier projectile P_1 de charge $Q_{p1} = 2 \times 10^{-8}\,\text{C}$ et de masse $m = 1.2\,\text{g}$ (dimension négligeable) est lancé à partir du point D, le long de $\hat{x}$, vers le disque avec une vitesse initiale $v_i = 10\,\text{cm/s}$.

c) Donnez l'expression et la valeur de la vitesse v_f de P_1 à la position du disque. Donnez l'expression et la valeur de la vitesse initiale $v_{i,0}$ que P_1 aurait dû avoir pour que sa vitesse soit nulle à la position du disque.

d) En prenant P_1 à son point de départ D, donnez l'expression et la valeur du champ magnétique $\vec{B}_{p1}$ (direction, sens et norme) produit par P_1 au niveau du point A. Le point A est situé à une distance $r = 80\,\text{cm}$ de D, $\vec{r}$ formant un angle de 10° avec $\vec{v}_i$.

Un deuxième projectile P_2 (on enlève P_1 du problème) de charge totale Q_{p2} est lancé vers le disque à partir du point D. P_2 est composé d'une sphère pleine de rayon $R_1 = 1\,\text{cm}$ et de densité de charge volumique ρ_1, entourée par une couche sphérique de rayon interne R_1, de rayon externe $R_2 = 3R_1$, et de densité de charge volumique ρ_2.

e) Donnez l'expression du champ électrique $\vec{E}_{p2}$ produit uniquement par P_2 en tout point (à l'intérieur et à l'extérieur de P_2). Donnez ensuite l'expression du champ électrique total $\vec{E}_{tot}$ au point A (direction et sens). Veuillez noter que le point A est très proche du disque et justifiez vos éventuelles approximations.



À cause de l'impact de P_2 sur le disque, une région circulaire de diamètre $D_p < R_d$, centrée par rapport au disque, a une densité de charge surfacique augmentée à σ_p.

f) En considérant cette modification, donnez l'expression du champ électrique $\vec{E}(x)$ du disque le long de son axe $\hat{x}$.

Indications :

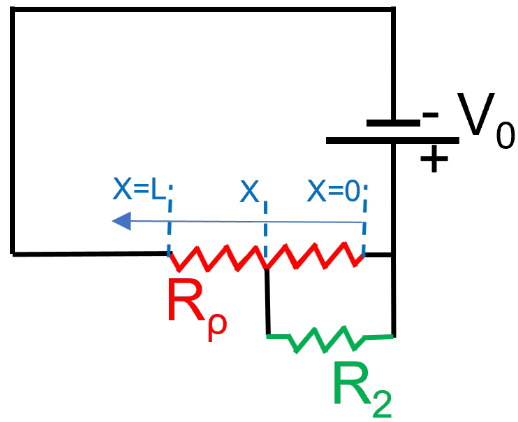
$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\text{C}^2.\text{N}^{-1}.\text{m}^{-2} \quad ; \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\text{T.m.A}^{-1} \quad ; \quad \int \frac{x}{\sqrt{a+x^2}}dx = \sqrt{a+x^2}$$

Négligez les effets d'induction/polarisation du champ électrique sur les distributions de charge du disque et des projectiles.
Négligez l'effet de la pesanteur sur la trajectoire des projectiles.
L'énergie cinétique d'un objet de masse m qui se déplace avec vitesse v est donnée par $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.

Exercice 2 (25 points)

Une résistance $R_\rho = 8\,\mathrm{k}\Omega$ est composée d'un cube de longueur L, avec une résistivité $\rho(x) = \rho_0 x^2$ entre les deux faces connectées au circuit, en $x = 0$ et $x = L$.

a) Donnez la longueur L du cube si $\rho_0 = 2 \times 10^5\,\Omega/\mathrm{m}$.



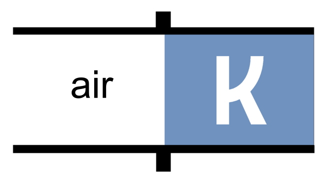
Un générateur de tension qui fournit une tension V_0 est connecté à la résistance R_ρ et à une deuxième résistance R_2, comme indiqué sur le dessin. La connexion entre R_2 et R_ρ est faite à une position x variable entre 0 et L.

b) Donnez l'expression de la puissance dissipée $P(x)$ par la résistance totale équivalente $R_{eq}(x)$.

Considérez pour la suite de l'exercice que la position x de la connexion entre R_ρ et R_2 est telle que leur résistance équivalente vaut $R_{eq} = 5\,\mathrm{k}\Omega$. Au temps $t = 0\,\mathrm{s}$, R_{eq} est connectée en série à un condensateur planaire déchargé ($q(t = 0\,s) = 0\,\mathrm{C}$). Après $t_1 = 50\,\mathrm{ms}$, on mesure (sans perturber le système) une quantité de charge $q_1 = 0.5 q_{max}$ sur une plaque du condensateur, q_{max} étant la charge maximale pouvant être stockée sur la plaque du condensateur avec le V_0 fourni.

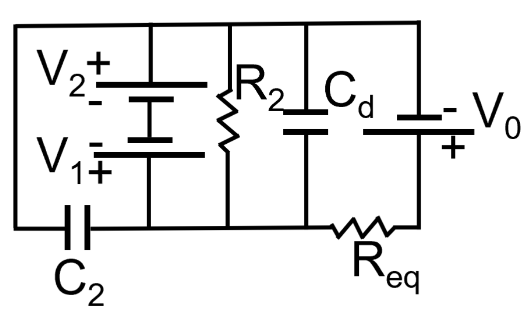
c) Donnez la valeur de la capacité C du condensateur. Si au début de la charge la capacité était déjà chargée à $0.1\,q_{max}$, combien de temps aurait-il fallu attendre pour obtenir $0.5\,q_{max}$ sur la plaque du condensateur ?

Le condensateur est maintenant chargé à $q_{max} = 2 \times 10^{-2}\,\mathrm{C}$. Vous ajoutez alors un diélectrique de constante diélectrique $K = 10$ entre les plaques qui remplit la moitié du volume du condensateur, en couvrant la moitié de la surface des plaques, comme dans le dessin fourni.



d) Calculez la nouvelle capacité du condensateur C_d en sachant que la distance entre les plaques est $d = 2\,\mathrm{mm}$. Quelle est l'énergie totale dissipée dans la résistance R_{eq}, à partir du moment où la charge q_{max} est atteinte, pour que le condensateur puisse atteindre sa nouvelle condition stationnaire ?

Le circuit discuté aux points précédents est modifié comme dans le dessin ci-contre, en ajoutant la résistance $R_2 = 20\,\Omega$, le condensateur $C_2 = 2\,\mu\mathrm{F}$, et les deux générateurs de tension $V_1 = 60\,\mathrm{V}$ et $V_2 = 30\,\mathrm{V}$.

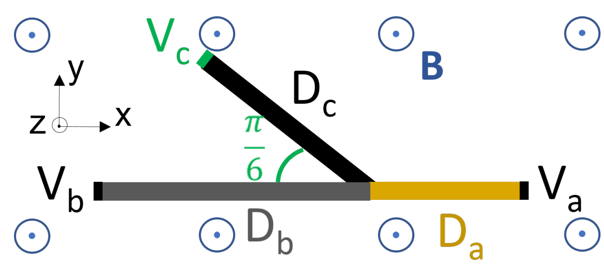


e) Calculez toutes les valeurs des courants du circuit dans l'état stationnaire et dessinez leur sens sur le circuit (sur la feuille de réponse).

Indications :
$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\mathrm{C}^2.\mathrm{N}^{-1}.\mathrm{m}^{-2}$

Exercice 3 (25 points)

Un conducteur fixe dans l'espace (pas libre de se déplacer) est composé de trois secteurs de longueurs et masses ($D_a = 8\,\text{cm}$, $m_a = 0.2\,\text{kg}$), ($D_b = 16\,\text{cm}$, $m_b = 0.4\,\text{kg}$), et ($D_c = 10\,\text{cm}$, $m_c = 0.4\,\text{kg}$), comme indiqué sur la figure, avec des voltages appliqués aux trois extrémités et maintenus constants $V_a = 200\,\text{V}$ et $V_b = V_c = 50\,\text{V}$ (par rapport à une terre commune).
Les trois secteurs ont des valeurs de résistance $R_a = 200\,\Omega$, $R_b = 50\,\Omega$, et $R_c = 300\,\Omega$. Les secteurs b et c forment un angle de $\pi/6$ entre eux. Le conducteur se trouve dans une région avec un champ magnétique constant et uniforme $\vec{B} = 0.8\hat{e_z}\,\text{T}$ qui sort du plan de la feuille.



a) Dessinez le circuit électrique équivalent.

b) Donnez l'expression et la valeur des courants I_a, I_b, I_c à travers D_a, D_b, et D_c respectivement.

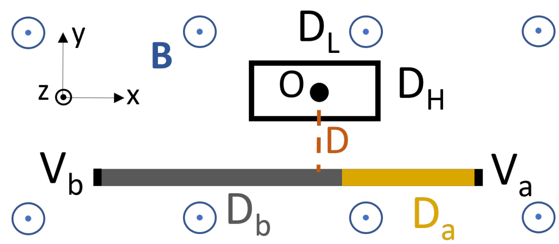
c) Donnez l'expression et la valeur des forces $\vec{F_a}$, $\vec{F_b}$ et $\vec{F_c}$ (norme, direction et sens) qui agissent sur chaque secteur du conducteur. Sur un schéma, dessinez la direction des forces sur chaque secteur du conducteur. Négligez le champ magnétique produit par le courant traversant le conducteur.

Considérez le conducteur précédemment introduit sans le secteur c (avec les secteurs a et b uniquement). Chaque secteur est modélisé comme sa résistance (R_a, R_b) en série avec une inductance (L_a, L_b), respectivement.

d) Dessinez le circuit électrique équivalent.

e) Donnez l'expression et la valeur de l'inductance totale L_{tot} du conducteur, si après $3\,\text{s}$ de l'application de V_a et V_b (avec un courant initial nul) le courant qui circule est de $I(t_{\text{m}} = 3\,\text{s}) = I_{\text{m}} = 0.2\,\text{A}$. Donnez l'expression et la valeur du courant stationnaire I_s.

À un temps t_0, le courant dans le conducteur est considéré stationnaire, et le conducteur est laissé libre de se déplacer.



f) Donnez l'expression et la direction de la vitesse v_f du conducteur au temps $t_f = t_0 + 5$ s.

À partir du temps t_f, la vitesse du conducteur v_f est considérée constante. Le conducteur se trouve alors à une distance $D = 3\,\text{mm}$ du centre O d'une spire rectangulaire de cotés $D_L = 3\,\text{mm}$ et $D_H = 2\,\text{mm}$, placée dans le plan xy, dont le long côté (D_L) est parallèle au conducteur. Voir dessin (notez que le dessin n'est pas à l'échelle).

g) Donnez l'expression de la force électromotrice $\varepsilon(t)$ induite dans la spire rectangulaire. Dessinez le sens du courant induit. Négligez les effets d'auto-induction de la spire et justifiez vos éventuelles approximations.

Indications : Négligez la pesanteur dans ce problème.

Exercice 4 (25 points)

Le champ magnétique associé à une onde électromagnétique qui se propage dans la direction $\hat{x}$ est composé de deux longueurs d'ondes telles que $\lambda_1 = 2\lambda_2$, avec des fréquences angulaires ω_1 et ω_2.

a) Calculez le rapport entre ω_1 et ω_2.

Les deux harmoniques ω_1, ω_2 contribuent au spectre de l'onde avec des coefficients B_1 et B_2 selon l'expression :

$$\vec{B}(x,t) = [B_1 \sin(k_1 x - \omega_1 t) + B_2 \sin(k_2 x - \omega_2 t)]\hat{z} \tag{1}$$

b) Donnez l'expression du champ électrique $\vec{E}$ de l'onde et du vecteur de Poynting $\vec{S}$ associé (norme, direction, et sens de propagation) en fonction de B_1, B_2, k_1, ω_1.

Vous mesurez $\omega_1 = 6\pi \times 10^6\,\mathrm{rad/s}$. Après 1/4 de la période T_1 de l'harmonique B_1 depuis $t = 0\,\mathrm{s}$, l'amplitude totale du champ magnétique à la position $x_A = 150\,\mathrm{m}$ est $B = 4 \times 10^{-7}\,\mathrm{T}$.

c) Déterminez les valeurs de B_1 et B_2 en sachant que $B_2 = 3B_1$.

d) Démontrez qu'à la position x_A le champ magnétique atteint sa valeur maximale quand la condition $\cos(\omega_1 t) = 3/4$ est satisfaite. Utilisez l'identité $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.

Des scientifiques placent en x_A un détecteur de forme circulaire avec son axe le long de $\hat{x}$, qui peut absorber toute l'énergie de l'harmonique ω_1 de l'onde électromagnétique. Ils pensent qu'un détecteur avec une base de rayon $R = 1\,\mathrm{m}$ est suffisant pour récolter une énergie de 10^{-2} J pendant un intervalle de temps $\Delta t = 100 T_1$.

e) Vérifiez avec des calculs si les scientifiques ont raison ou pas.

Indications :
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \dfrac{\mathrm{Tm}}{\mathrm{A}}$