Oscillateur vertical

1- Calculer d_0 en fonction des données

2- Etablir l'équation diférentielle dans le repère de la figure.

3- Faire un changement de variable sur x pour retrouver l'équation différentielle habituelle et la résoudre.

4- Calculer et tracer l'énergie potentielle dans le référentiel de la figure.

5- Utiliser cette énergie potentielle pour retrouver la solution précédente.

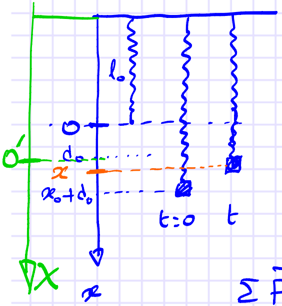
1- A l'équilibre $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$; forces : $m\vec{g}$; $\vec{F}_k$

$\vec{F}_k = -k \underbrace{\Delta l}_{\text{l'allongement}} \vec{e}_x$ à l'équilibre $\Delta l = d_0 \Rightarrow \vec{F}_k = -k d_0 \vec{e}_x$

$m\vec{g} = mg\vec{e}_x$; $\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow mg\vec{e}_x - kd_0\vec{e}_x = \vec{0} \Rightarrow mg = kd_0$ $\boxed{d_0 = \frac{mg}{k}}$

Oscillateur vertical

2. $\sum \vec{F} = m\vec{a}$



Lien entre x coordonnée de M et Δl allongement du ressort.

$\Delta l = l - l_0 = x$ à cause du choix de l'origine.

$\vec{F}_R = -kx\,\vec{e}_x$ $\qquad m\vec{g} = mg\,\vec{e}_x$

$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -kx\,\vec{e}_x + mg\,\vec{e}_x = m\ddot{x}\,\vec{e}_x$

Ser($\vec{e}_x$) $\quad m\ddot{x} = mg - kx \qquad m\ddot{x} + kx = mg$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g}$$

3- (OX) orienté vers le bas l'origine en $x = d_0$

$$x = X + d_0 \qquad X = x - d_0$$

équa diff sur variable X ; $x = X + d_0 \Rightarrow \dot{x} = \dot{X} \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{X}$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = g \Rightarrow \ddot{X} + \frac{k}{m}(X + d_0) = g \Rightarrow \ddot{X} + \frac{k}{m} X + \frac{k d_0}{m} = g$$

or $d_0 = \frac{mg}{k} \Rightarrow \ddot{X} + \frac{k}{m} X + \cancel{\frac{k}{m}\frac{mg}{k}} = \cancel{g} \Rightarrow \boxed{\ddot{X} + \frac{k}{m} X = 0}$

$$\Omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \ddot{X} + \Omega_0^2 X = 0$$

$X(t) = A \cos \Omega_0 t + B \sin \Omega_0 t$ constantes d'intégration A et B

$t = 0$ vitesse nulle $\dot{X}(0) = 0$; position $X(0) = x_0$

Oscillateur vertical

$\dot{X}(t) = -A\,\Omega_0 \sin \Omega_0 t + B\,\Omega_0 \cos \Omega_0 t$

$\dot{X}(0) = -A\,\Omega_0 \cancel{\sin(0)} + B\,\Omega_0 \underbrace{\cos(0)}_{1} = B\,\Omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0$

$X(t) = A \cos \Omega_0 t \qquad X(0) = x_0 = A\cos(0) = A \Rightarrow A = x_0$

$X(t) = x_0 \cos \Omega_0 t \qquad x(t) = x_0 \cos \Omega_0 t + d_0$

Oscillateur vertical

4) $E_p = E_p$ (ressort) $+$ E_p gravitationelle

Dans (Ox)

$E_p^k = \frac{1}{2} k \Delta l^2 = \frac{1}{2} k x^2$

$E_p^g = -mgx$ (zéro en O)

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} k x^2 - mgx}$$

$m\ddot{x} = -\frac{dE_p}{dx} = -\left[\frac{1}{\cancel{2}} k \cancel{2} x - mg\right]$

$m\ddot{x} = -kx + mg$ $\quad \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m} x = g}$

Dans $(O'X)$

$E_p^k = \frac{1}{2} k (X + d_0)^2$

$E_p^g = -mgX$ (zéro de E_p^g en O')

$\frac{1}{2} k (X + d_0)^2 - mgX$

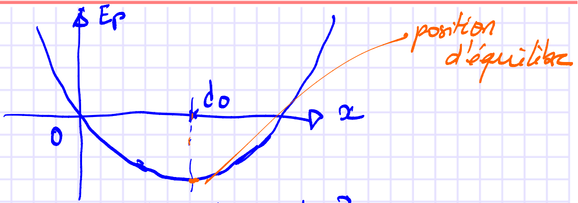
$E_p^{tot} = \frac{1}{2} k (X + d_0)^2 - mgX$

$m\ddot{X} = -\frac{dE_p}{dx} = -\left(\frac{1}{\cancel{2}} k \cancel{2} (X + d_0) - mg\right)$

$= -kX \underbrace{- kd_0 + mg}_{0} \Rightarrow \ddot{X} + \frac{k}{m} X = 0$

Oscillateur vertical

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 - mgx$$



Remarque [fait pendant la pause suite à 1 question]

Avec l'énergie mécanique $E_m(\text{temps}) = \text{cte} = E_p(t) + E_c(t)$

$$E_m(t) = E_p[x(t)] + E_c[t] = \frac{1}{2}kx(t)^2 - mgx(t) + \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2$$

dérivation par rapport à t

$$0 = \frac{1}{\cancel{2}}k\cancel{2}\dot{x}x - mg\dot{x} + \frac{1}{\cancel{2}}m\cancel{2}\dot{x}\ddot{x} \Rightarrow \dot{x}[kx - mg + m\ddot{x}] = 0$$

Soit $\dot{x} = 0$ $v = 0$: équilibre soit $kx - mg + m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = g$