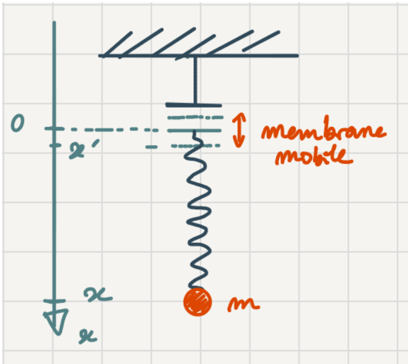
Exercice 1

Cet exercice permet d reprendre pas par pas la démarche pour comprendre le fonctionnement de l'oscillateur forcé vu en amphi.



On considère la manip d'auditoire : un oscillateur amorti et forcé constitué d'une masse m, d'un ressort de raideur k et longueur au repos l_0 et subissant un frottement fluide de constante b_l.
L'oscillateur est entraîné par une membrane déplacée autour de sa position moyenne en $a_e \cos(\omega t)$.

Le montage est représenté ci contre, ainsi que le repère utilisé. L'origine du repère est prise à la position moyenne de la membrane. La membrane a donc une position $x'(t) = a_e \cos(\omega_e t)$

La masse est représentée par la position $x(t)$.

1. montrer que l'allongement du ressort est donné par $x - x' - l_0$
2. en déduire que l'équation différentielle du mouvement de la masse m dans le repère choisi s'écrit :
$$\ddot{x} + \frac{b_l}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}a_e \cos(\omega_e t) + \frac{kl_0}{m} + g$$
3. montrer qu'en prenant un nouveau repère (A, X) d'origine A tel que $x_A = l_0 + mg/k$ l'équation différentielle devient :
$$\ddot{X} + \frac{b_l}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = \frac{k}{m}a_e \cos(\omega_e t)$$
X correspond donc à la position de la masse autour de A, obtenu quand la masse est à l'équilibre et la membrane d'excitation en O. On s'intéresse maintenant au mouvement de m dans ce nouveau repère.
4. Montrer qu'on obtient l'équation différentielle générique du cours en posant $2\gamma = b_l/m$, $\Omega_0^2 = k/m$ et $F_0 = ka_e$
5. rappeler la forme que prend la solution $X(t)$, appelée aussi "réponse" en régime permanent.
6. Montrer que pour $\omega_e \to 0$ l'amplitude de la réponse $A(\omega_e)$ est égale à a_e
7. Montrer que pour $\omega_e \to \infty$, $A(\omega_e) \to 0$
8. On appelle amplitude relative de la réponse $A_r = \frac{A(\omega_e)}{a_e}$. Montrer que
$$A_r = \frac{\Omega_0^2}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}}$$

(Vous avez le droit d'utiliser la formule trouvée dans la vidéo "analyse du régime permanent pour $A(\omega_e)$, mais justifiez-le)

9. Application numérique : on prend $k = 15\frac{N}{m}$, $m = 0,19kg$ (ces valeurs correspondent à peu près à la manip d'amphi). On considère trois valeurs pour b_l : $b_{l,air} = 0,02\ kg \cdot s^{-1}$, $b_{l,fluide} = 0,05\ kg \cdot s^{-1}$, $b_{l,eau} = 0,3\ kg \cdot s^{-1}$

   Calculer Ω_0, ω (pseudopulsation) et ω_{res} pour ces trois cas.

   Calculer pour chacun des trois cas l'amplitude relative A_r pour trois valeurs de la pulsation d'excitation ω_e, valant respectivement $0,1\omega_{\text{res}}$, ω_{res} et $10\,\omega_{\text{res}}$

Exercice 2

Une masse $m = 2$ kg est accrochée à un ressort. Les frottements secs et fluides sont ici négligés. Le système est forcé par une force externe donnée par $F = 3\sin(2\pi t)$ où F est en N et t en s.

Le ressort est de constante $k = 20$ N·m^{-1}. Déterminer

1. La pulsation propre du système
2. La pulsation de résonance
3. La pulsation du système forcé.
4. L'amplitude des oscillations

Reponses

1. Solution de l'AN (1.9) :
   Dans tous les cas $\Omega_0 = 8.885$ 1/s, soit $T_0 = 1.41 Hz$

	Air	Fluide	Eau	Units
b_e	0,02	0,05	0,3	$kg.s^{-1}$
γ	0,0526	0,132	0,789	s^{-1}
ω	8,885	8,884	8,85	s^{-1}
ω_{res}	8,885	8,883	8,815	s^{-1}
$A_r @ \frac{\omega_e}{\omega_{res}} = 0{,}1$	1,01	1,01	1,01	
$A_r @ \frac{\omega_e}{\omega_{res}} = 1$	84,4	33,3	5,65	
$A_r @ \frac{\omega}{\omega_{res}} = 10$	0,01	0,01	0,01	

   On remarque que même avec un amortissement déjà assez important (eau), la pseudopulsation et la pulsation de résonnance restent très proche de la pulsation propre.

   Pour les trois fluides, l'amplitude relative à 1/10 de la pulsation de résonnance est la même, et à peu près égale à l'amplitude d'excitation, et pour les 3 fluides l'amplitude relative à 10 fois la pulsation de résonnance est proche de 0. Par contre l'amplitude relative à la résonnance n'a rien à voir !

2. (a) $3,16$ rad·s^{-1}
   (b) $3,16$ rad·s^{-1} (on retrouve la même car $\gamma = 0$)
   (c) $6,28$ rad·s^{-1}
   (d) $5,1$ cm

Solutions

Solution 1

1. La longueur l du ressort se trouve avec $l = x - x'$ puisque x et x' sont les coordonnées des extrémités.
   L'allongement est $l - l_0$, donc $\Delta l = x - x' - l_0$
2. En utilisant la Seconde Loi de Newton et $x' = a_e \cos(\omega_e t)$:

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = m\vec{a} = m\ddot{x}\vec{e}_x = \vec{F}_k + m\vec{g} + \vec{F}_f = -k\Delta l\vec{e}_x + mg\vec{e}_x - b_l\dot{x}\vec{e}_x \tag{1}$$

$$=> \text{Projeté sur } \vec{e}_x : m\ddot{x} = -k(x - x' - l_0) + mg - b_l\dot{x} \tag{2}$$

$$\ddot{x} + \frac{b_l}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}a_e\cos(\omega_e t) + \frac{kl_0}{m} + g \tag{3}$$

3. On effectue le changement de repère suivant : $X = x - x_A$, donc $x = X + x_A$. Ainsi en dérivant par rapport au temps, on a $\dot{x} = \dot{X}$ et $\ddot{x} = \ddot{X}$. En prenant $x_A = l_0 + \frac{mg}{k}$ et remplaçant dans l'équation trouvée à la question précédente, on en déduit :

$$\ddot{X} + \frac{b_l}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}(X + x_A) = \frac{k}{m}a_e\cos(\omega_e t) + \frac{kl_0}{m} + g \tag{4}$$

$$\ddot{X} + \frac{b_l}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = \frac{k}{m}a_e\cos(\omega_e t) \tag{5}$$

4. On pose $\Omega_0^2 = \frac{k}{m}$; $2\gamma = \frac{b_l}{m}$; $F_0 = ka_e$. On a alors :

$$\ddot{X} + 2\gamma + \Omega_0^2 = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_e t) \tag{6}$$

5. En régime permanent, la réponse est de la forme suivante :

$$X(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e)) \tag{7}$$

   avec $A(\omega_e)$ l'amplitude et $\varphi(\omega_e)$ le déphasage.
   Comme l'excitation a exactement la forme du cours (en cosinus de $\omega_e t$) et la réponse proposée aussi, les expressions de $A(\omega_e)$ et $\varphi(\omega_e)$ seront les expressions du cours :

$$A(\omega_e) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} \tag{8}$$

6. Si $\omega_e \to 0$, en utilisant $F_0 = a_e k$ pour déduire :

$$A(\omega_e) \to \frac{F_0/m}{\sqrt{\Omega_0^4}} = \frac{F_0/m}{\Omega_0^2} = \frac{F_0/m}{k/m} = \frac{F_0}{k} = \frac{a_e k}{k} = a_e \tag{9}$$

   Donc $A(\omega_e) \to a_e$.

7. Si $\omega_e \to \infty$, alors $\omega_e^2 - \Omega_0^2 \simeq \omega_e^2$ et on a :

$$A(\omega_e) \to \frac{F_0/m}{\sqrt{\omega_e^4 + 4\gamma^2\omega_e^2}} \simeq \frac{F_0/m}{\sqrt{\omega_e^4}} = \frac{F_0/m}{\omega_e^2} \to 0 \tag{10}$$

   Donc $A(\omega_e) \to 0$.

8. En utilisant $F_0 = a_e k$ et l'expression de l'amplitude $A(\omega_e)$:

$$A_r = \frac{A(\omega_e)}{a_e} = \frac{F_0/m}{a_e * \sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} = \frac{k/m}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} = \frac{\Omega_0^2}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} \tag{11}$$

9. La solution est détaillée dans la section "Reponses".

Solution 2

1. $$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 3.16 rad/s \tag{12}$$

2. La pulsation de résonance est égale à la pulsation propre car les frottements sont nuls ($b_l = 0$) :

$$\omega = \sqrt{\Omega_0^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b_l^2}{4m^2}} = 3.16 rad/s \tag{13}$$

3. Elle se lit directement dans le sinus de la force externe :

$$\omega_e = 2\pi = 6.28 rad/s \tag{14}$$

4. $$A(\omega_e) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} = \frac{3/m}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 0}} = 5.1 cm \tag{15}$$