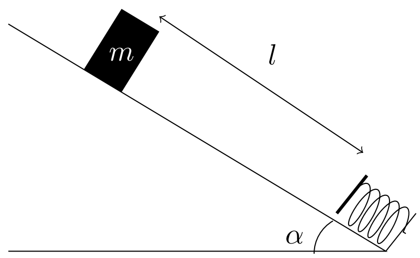
Exercices

Exercice 1
Une masse $m = 1$ kg glisse sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$ sans frottements.

1. Avec $l = 10$ cm, trouver la vitesse v_1 à laquelle la masse vient percuter le ressort.
2. Une fois arrivée au contact du ressort de constante $k = 1$ kN·m^{-1}, la masse le comprime. Trouver de combien.



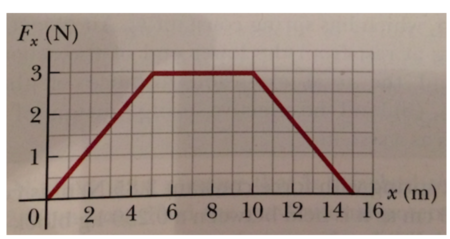
Exercice 2
En 1990, Walter Arfeuille a soulevé une masse de $281,5$ kg sur une distance de $17,1$ cm avec ses dents.

1. Quel est le travail effectué sur l'objet par W. Arfeuille durant sa performance en supposant que l'objet a été soulevé à vitesse constante.
2. Quelle est la force totale exercée sur les dents de W. Arfeuille durant la performance

Exercice 3
Un archer tire sur la corde de son arc sur une distance horizontale de 40 cm en exerçant une force uniformément croissante allant de 0 à 230 N.

1. En modélisant la corde par un ressort, quelle serait la constante de raideur du ressort équivalent ?
2. Quel travail l'archer doit-il fournir sur son arc pour tirer la corde ?

Exercice 4
Un point matériel subit une force F_x variant selon x comme le montre la figure ci-dessous



Trouver le travail de la force F_x lorsque la particule bouge de :

1. $x = 0$ à $x = 5$ m
2. $x = 5$ m à $x = 10$ m
3. $x = 10$ m à $x = 15$ m
4. $x = 0$ à $x = 15$ m

Exercice 5

Une particule de masse $m = 600$ g a une vitesse $v_A = 2$ m·s^{-1} au point A et une énergie cinétique $E_{c_B} = 7,5$ J au point B. Déterminer :

1. l'énergie cinétique E_{c_A} de la particule au point A,
2. sa vitesse au point B,
3. le travail des forces extérieures entre A et B.

Exercice 6

Une masse $m = 3$ kg a une vitesse donnée par $v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ m·s^{-1}.

1. Quelle est l'énergie cinétique ?
2. Quel est le travail effectué sur la masse si sa vitesse passe à $v_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ m·s^{-1} ?

Indication : Par définition du produit scalaire, on a $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$

Reponses

1. 1. On trouve $v_1 = 1$ m·s^{-1}
   2. On trouve $\Delta x = 3$ cm
2. 1. $W = 481J$
   2. $F \simeq mg = 2800$ N
3. 1. on trouve $k_{eq} = 575$ N·m^{-1}
   2. La force est uniformément croissante, donc elle peut s'écrire $F = \frac{230x}{0,4}$ puisqu'elle part de 0 N à 0 m de tension pour aller à 230 N à $0,4$ m. Dès lors, on trouve $W = 46$ J
4. 1. $W_1 = 7,5$ J
   2. $W_2 = 15$ J
   3. $W_3 = 7,5$ J
   4. $W_{tot} = W_1 + W_2 + W_3 = 30$
5. 1. On trouve $E_{c_A} = 1,2$ J
   2. On a $v_B = 5$ m·s^{-1}
   3. $W = \Delta E_c = 6,3$ J
6. 1. $E_c = 55,5$ J
   2. on calcule $E'_c = 120$ J donc $W = 64,5$ J

Solutions

Solution 1

Prenons un repère incliné avec comme origine le point de départ de la masse, l'axe x le long de la pente et l'axe y perpendiculaire à celui-ci. En appliquant la Seconde Loi de Newton au système **avant** le contact avec le ressort (et sans frottement) :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{1}$$

$$=> \text{Sur x} : ma_x = mg\sin\alpha \tag{2}$$

$$=> \text{Sur y} : 0 = -mg\cos\alpha + R \tag{3}$$

1. On a donc une accélération selon x qui vaut $a_x = g\sin\alpha$. Intégrons celle-ci deux fois par rapport au temps pour obtenir l'expression de $x(t)$ (équations horaires avec comme conditions initiales $v_0 = 0$ et $x_0 = 0$) :

   $$v_x(t) = gt\sin\alpha \tag{4}$$

   $$x(t) = \frac{g\sin\alpha}{2}t^2 \tag{5}$$

   La masse touche le ressort lorsque $x(t_r) = l$ au temps t_r, donc :

   $$\frac{g\sin\alpha}{2}t_r^2 = l \tag{6}$$

   $$t_r = \sqrt{\frac{2l}{g\sin\alpha}} \tag{7}$$

   En injectant ce temps dans l'expression de la vitesse on obtient finalement :

   $$v_x(t) = \sqrt{2lg\sin\alpha} = 1m/s \tag{8}$$

2. Pour trouver la compression du ressort on applique la conservation de l'énergie mécanique entre le moment ou la masse arrive en contact avec le ressort (état initial) et le moment où la masse est arrêtée et le ressort comprimé au maximum.
   - Initialement, on a $x = 0$, l'énergie potentielle est donc nulle. La masse est en déplacement et donc à vitesse initiale non-nulle, il ne reste alors que l'énergie cinétique.
   - A la position finale, lors de la compression du ressort, la vitesse est nulle et donc l'énergie cinétique aussi. La compression induit une énergie potentielle élastique.

   On en déduit donc :

   $$E_m^i = \frac{1}{2}mv_r^2 + 0 = E_m^f = 0 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{9}$$

   $$x = v_r\sqrt{\frac{m}{k}} = 3cm \tag{10}$$

Solution 2

1. Le travail est calculé en prenant l'expression suivante :

$$W_{AB}^{ext} = W_{AB}^{\vec{F}} + W_{AB}^{\vec{P}} = 0 \tag{11}$$
$$W_{AB}^{\vec{F}} = -W_{AB}^{\vec{P}} = mg * d = 481.365J \tag{12}$$

2. La force totale sur ses dents est le poids : $F = mg = 2815$ N.

Solution 3

1. Modéliser la corde par un ressort revient à prendre le cas unidimensionnel ou l'archer comprime un ressort, et la force croît du moment où ce dernier est au repos jusqu'à sa compression totale de 0 à 230 N. On peut ainsi considérer $\Delta F_{el} = k * \Delta x = 230$N (où $\Delta x = d = 40$cm), et isoler la constante de raideur k. Donc :

$$k = \frac{\Delta F_{el}}{\Delta x} = 575N/m \tag{13}$$

2. Le travail est calculé en prenant la définition intégrale suivante :

$$W_{AB}^{\vec{\Delta} F_{el}} = \int_A^B \Delta F_{el} dx = \int_0^d kx dx = k\frac{d^2}{2} = 46J \tag{14}$$

Solution 4
Avant toute chose il est judicieux d'écrire l'équation de la force en fonction de la distance, basé sur le graphique fourni. La fonction se découpe en 3 parties :

- Pour x entre 0 et 5m : $F_x = \frac{3}{5}x$.
- Pour x entre 5 et 10m : $F_x = 3$.
- Pour x entre 10 et 15m : $F_x = 9 - \frac{3}{5}x$.

On peut alors utiliser la définition du travail et calculer pour les différents intervalles de distance donnés :

1. $$W_1^{F_x} = \int_0^5 F_x dx = \int_0^5 \frac{3}{5} x dx = 7.5J \tag{15}$$

2. $$W_2^{F_x} = \int_5^{10} F_x dx = \int_5^{10} 3dx = 15J \tag{16}$$

3. $$W_3^{F_x} = \int_{10}^{15} F_x dx = \int_{10}^{15} (9 - \frac{3}{5}x) dx = 7.5J \tag{17}$$

4.

$$W_{\text{tot}}^{F_x} = \int_0^{15} F_x dx = \int_0^5 F_x dx + \int_5^{10} F_x dx + \int_{10}^{15} F_x dx = W_1 + W_2 + W_3 = 30J \quad (18)$$

Solution 5

1. On peut directement calculer l'energie cinétique par définition :

$$E_{c_A} = \frac{1}{2} m v_A^2 = 1.2J \quad (19)$$

2. Par définition de l'énergie cinétique, on peut isoler la vitesse au point B :

$$E_{c_B} = \frac{1}{2} m v_B^2 \quad (20)$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2 * E_{c_B}}{m}} = 5m/s \quad (21)$$

3. Le travail de A à B est aussi égal à la différence de l'énergie cinétique finale et initiale, ainsi :

$$W = \Delta E_c = E_{c_B} - E_{c_A} = 6,3J \quad (22)$$

Solution 6

1. Il est nécessaire de calculer le carré de la norme du vecteur $\vec{v}_1$ pour obtenir l'énergie cinétique, celà est possible par produit scalaire :

$$v_1^2 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 6 * 6 + (-1) + (-1) = 37 \quad (23)$$

$$E_{c_1} = \frac{1}{2} m v_1^2 = 55.5J \quad (24)$$

2. On calcule de la même façon E_{c_2} grâce à la norme au carré de la vitesse $\vec{v}_2$:

$$E_{c_2} = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2) = 120J \quad (25)$$

   Donc $W = E_{c_2} - E_{c_1} = 64,5$ J