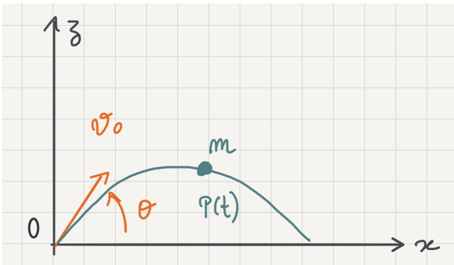
Exercice 1



Calculer $\vec{L}_O$ et $\vec{M}_O^{m\vec{g}}$ en fonction du temps, pour un objet de masse m lancé avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle θ avec $(0,\vec{x})$, depuis l'origine O.
Montrer que $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{m\vec{g}}$

Exercice 2

Calculer l'altitude à laquelle placer un satellite pour qu'il soit géostationnaire.
Indication : $R_T = 6378km,\ G = 6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2},\ M_T = 5,974 \cdot 10^{24} kg$

Exercice 3

L'ISS orbite à 400 km au dessus de la surface de la Terre. Quelle est sa vitesse et combien de temps (en minutes) dure une orbite ?

Exercice 4

Calculer la vitesse qu'il faudrait communiquer à un objet pour le mettre en orbite à une altitude nulle. (Il tournerait autour de la Terre, considérée sphérique "au ras du sol"). Cette vitesse est la première vitesse cosmique.
Indication : $R_T = 6378km,\ G = 6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2},\ M_T = 5,974 \cdot 10^{24} kg$

Exercice 5

Un satellite GPS a une masse de 860 kg. Il est à une altitude de 20'000 km.

1. Calculer sa vitesse et sa période de révolution.
2. Calculer l'énergie à fournir au satellite pour le mettre en orbite ? Comparer à l'énergie nécessaire pour accélérer un train de 380 tonnes de 0 à 200 km/h.
3. Calculer le moment cinétique du satellite par rapport au centre de la Terre lorsqu'il est en orbite. Calculer son moment cinétique lorsqu'il est à la surface de la Terre, dans son hangar de rangement, à 40° de latitude Nord ?

Reponses

1. $\vec{a} = -g\vec{e}_z; \vec{v} = (v_0 \cos\theta;\ 0\,; -gt + v_0 \sin\theta); \vec{r} = (v_0 \cos\theta\, t;\ 0\,; -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta\, t)$
   $\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v} = (0; \frac{1}{2}mgv_0 \cos\theta\, t^2; 0)$

   $\vec{M}_O^{m\vec{g}} = \vec{r} \wedge (-mg\vec{e}_z) = -mgv_0 \cos\theta\, t \underbrace{\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z}_{-\vec{e}_y}$

   $\vec{M}_O^{m\vec{g}} = mgv_0 \cos\theta\, t\vec{e}_y \ \Rightarrow$ On a bien $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{m\vec{g}}$
2. h≅35800km
3. $v = 7667 m \cdot s^{-1}$
   $T = 5555 s = 92,6 min$

4. $7,9$ km.s^{-1}
5. (a) L'orbite est circulaire. Les forces de gravitation correspondent donc à l'accélération normale :
   $$F_G = \frac{GMm}{R_s^2} = m\frac{v^2}{R_s}$$
   où M est la masse de la Terre, m la masse du satellite et R_s le rayon de l'orbite du satellite. Donc :
   $$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{R_s}}}$$
   A.N. : $v = 3.88 \cdot 10^3$ m $\cdot$ s^{-1}
   $$v = R_s\omega = R_s\frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\frac{R_s}{v}$$
   $$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{R_s^3}{GM}}}$$
   A.N. : $T = 42700$ s ($\simeq 12$ h), soit 2 tours par jour.

   (b) Attention : on ne peut pas considérer g comme constant ! L'énergie potentielle de gravitation est donnée par :
   $$E_p = -\frac{GMm}{R}$$
   Quand le satellite est sur Terre, son énergie potentielle est
   $$E_{p_1} = -\frac{GMm}{R_T} \qquad E_{c_1} = \frac{1}{2}mv_T^2$$

Quand il est en orbite,

$$E_{p_2} = -\frac{GMm}{R_s} \qquad E_{c_2} = \frac{1}{2}mv^2$$

L'énergie à fournit est

$$\begin{aligned}
\Delta E &= E_2 - E_1 \\
&= -\frac{GMm}{R_s} + \frac{1}{2}mv^2 - \left(-\frac{GMm}{R_T} + \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi R_T}{T_T}\right)^2\right) \\
&= -\frac{GMm}{R_s} + \frac{1}{2}m\frac{GM}{R_s} + \frac{GMm}{R_T} - \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi R_T}{T_T}\right)^2 \\
&= GMm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2R_s}\right) - \frac{2m\pi^2 R_T^2}{T_T^2}
\end{aligned}$$

en supposant que le lancement s'effectue près de l'équateur...
A.N. :
$\Delta E = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24} \cdot 860 \cdot \left(\frac{1}{6.378 \cdot 10^6} - \frac{1}{2 \cdot 2.6378 \cdot 10^7}\right) - \frac{2 \cdot 860(\pi 6.378 \cdot 10^6)^2}{(8.64 \cdot 10^4)^2} = 47.2 \cdot 10^9$ J.

Accélérer un train de 380 tonne de 0 à 200 km/h nécessite

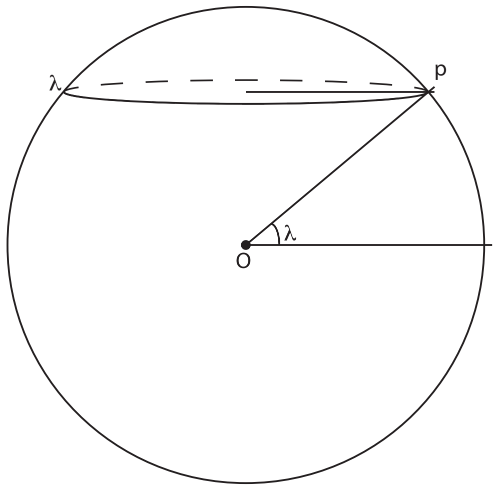
$$\Delta E = \frac{1}{2}m_t v_t^2 = 0.586 \cdot 10^9 \text{ J}$$

(c) $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}$ et $L_0 = R_s m v_s$ car le mouvement est circulaire uniforme.

$$L_0 = mR_s\sqrt{\frac{GM}{R_s}} = m\sqrt{GMR_s}$$

A.N. : $L_0 = 860\sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24} \cdot 26.378 \cdot 10^6} = 88.2 \cdot 10^{12}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Lorsque le satellite est dans son hangar, il décrit une corde de rayon $R_T \cos\lambda$ sur le parallèle et avec la vitesse de rotation de la Terre (période de 24h)



$\vec{L}'_0 = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}'$, et comme $\overrightarrow{OP} \perp \vec{v}$, on a :

$$\begin{aligned} |\vec{L}_0| = L'_0 = OP \cdot mv' &= R_T m v' \\ &= R_T m (R_T \omega \cos\lambda) \\ &= m R_T^2 \frac{2\pi}{T} \cos\lambda \end{aligned}$$

A.N. : $L'_0 = m R_T^2 \frac{2\pi}{T} \cos\lambda = 1.95 \cdot 10^{12}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$

Solutions

Solution 1

Commençons par déduire la vitesse et la position en fonction du temps (équations horaires) grâce à l'accélération fournie :
$\vec{a} = -g\vec{e}_z; \vec{v} = (v_0\cos\theta;\ 0\,; -gt + v_0\sin\theta); \vec{r} = (v_0\cos\theta\, t;\ 0\,; -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\theta\, t)$

Il suffit ensuite d'appliquer les formules suivantes :

$$\vec{L}_O = \vec{r}\wedge m\vec{v} = (0; \frac{1}{2}mgv_0\cos\theta\, t^2; 0) \tag{1}$$

$$\vec{M}_O^{m\vec{g}} = \vec{r}\wedge(-mg\vec{e}_z) = -mgv_0\cos\theta\, t\,\underbrace{\vec{e}_x\wedge\vec{e}_z}_{-\vec{e}_y} \tag{2}$$

$\vec{M}_O^{m\vec{g}} = mgv_0\cos\theta\, t\vec{e}_y \;\Rightarrow\;$ On a bien $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{m\vec{g}}$

Solution 2

Un satellite géostationnaire reste toujours au dessus du même point de la Terre, c'est à dire que son orbite est de période égale, donc $T_s = 24$h. Sachant que l'expression de cette dernière est $T_s = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{GM_T}}$, on peut isoler la distance d, avec la hauteur que l'on recherche étant $h = d - R_T$:

$$h = d - R_T = (\frac{GM_T T_s^2}{4\pi^2})^{1/3} - R_T \cong 35800km \tag{3}$$

Solution

On utilise la Seconde loi de Newton avec l'expression de l'accéleration centripète, le tout projeté sur la direction radiale :

$$ma_R = m\frac{v^2}{d} = F_G = \frac{GM_T m}{d^2} \tag{4}$$

Avec $d = R_T + h$. De cette expression nous pouvons isoler la vitesse : $v = \sqrt{\frac{GM_T}{d}} = 7667m\cdot s^{-1}$.
L'expression de la période est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R_s^3}{GM}} = 5555s = 92,6min \tag{5}$$

Solution 4

Nous procédons exactement de la même manière que dans l'exercice précédent, mais en prenant h=0m. On obtient finalement : $v = 7,9$ km.s^{-1}

Solution 5

1. L'orbite est circulaire. Les forces de gravitation correspondent donc à l'accélération normale :
$$F_G = \frac{GMm}{R_s^2} = m\frac{v^2}{R_s}$$
où M est la masse de la Terre, m la masse du satellite et R_s le rayon de l'orbite du satellite. Donc :
$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{R_s}}}$$
A.N. : $v = 3.88 \cdot 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
$$v = R_s\omega = R_s\frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\frac{R_s}{v}$$
$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{R_s^3}{GM}}}$$
A.N. : $T = 42700$ s ($\simeq 12$ h), soit 2 tours par jour.
2. Attention : on ne peut pas considérer g comme constant ! L'énergie potentielle de gravitation est donnée par :
$$E_p = -\frac{GMm}{R}$$
Quand le satellite est sur Terre, son énergie potentielle est
$$E_{p_1} = -\frac{GMm}{R_T} \qquad E_{c_1} = \frac{1}{2}mv_T^2$$
Quand il est en orbite,
$$E_{p_2} = -\frac{GMm}{R_s} \qquad E_{c_2} = \frac{1}{2}mv^2$$
L'énergie à fournit est
$$\begin{aligned}\Delta E &= E_2 - E_1 \\ &= -\frac{GMm}{R_s} + \frac{1}{2}mv^2 - \left(-\frac{GMm}{R_T} + \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi R_T}{T_T}\right)^2\right) \\ &= -\frac{GMm}{R_s} + \frac{1}{2}m\frac{GM}{R_s} + \frac{GMm}{R_T} - \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi R_T}{T_T}\right)^2 \\ &= GMm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2R_s}\right) - \frac{2m\pi^2 R_T^2}{T_T^2}\end{aligned}$$

en supposant que le lancement s'effectue près de l'équateur...
A.N. :
$\Delta E = 6.67{\cdot}10^{-11}{\cdot}5.98{\cdot}10^{24}{\cdot}860{\cdot}\left(\frac{1}{6.378\cdot10^6} - \frac{1}{2\cdot2.6378\cdot10^7}\right) - \frac{2\cdot860(\pi6.378\cdot10^6)^2}{(8.64\cdot10^4)^2} = 47.2{\cdot}10^9$ J.

Accélérer un train de 380 tonne de 0 à 200 km/h nécessite

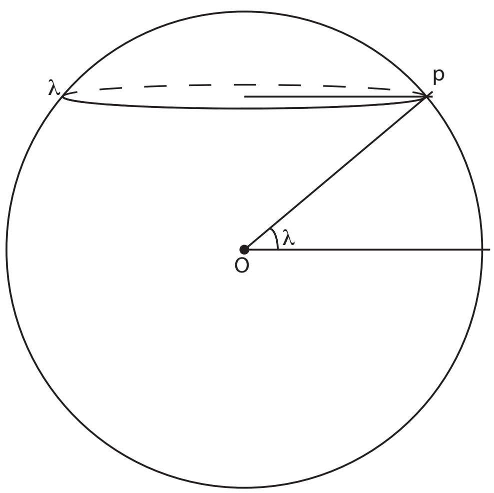
$$\Delta E = \frac{1}{2}m_t v_t^2 = 0.586 \cdot 10^9 \text{ J}$$

3. $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}$ et $L_0 = R_s m v_s$ car le mouvement est circulaire uniforme.

$$L_0 = mR_s\sqrt{\frac{GM}{R_s}} = m\sqrt{GMR_s}$$

A.N. : $L_0 = 860\sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24} \cdot 26.378 \cdot 10^6} = 88.2 \cdot 10^{12}$ kg $\cdot$ m$^2 \cdot$ s^{-1}.

Lorsque le satellite est dans son hangar, il décrit une corde de rayon $R_T \cos\lambda$ sur le parallèle et avec la vitesse de rotation de la Terre (période de 24h)



$\vec{L}_0' = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}'$, et comme $\overrightarrow{OP} \perp \vec{v}$, on a :

$$\begin{aligned}|\vec{L}_0| = L_0' = OP \cdot mv' &= R_T m v' \\ &= R_T m (R_T \omega \cos\lambda) \\ &= mR_T^2 \frac{2\pi}{T}\cos\lambda\end{aligned}$$

A.N. : $L_0' = mR_T^2 \frac{2\pi}{T}\cos\lambda = 1.95 \cdot 10^{12}$ kg $\cdot$ m$^2 \cdot$ s^{-1}